MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME XIX.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME XIX.



PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 56.

1845.



TABLE DES ARTICLES

CONTENUS

DANS LE DIX-NEUVIÈME VOLUME

DE LA NOUVELLE COLLECTION DES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

16

FIN DE LA TABLE DU DIX-NEUVIÈME VOLUME.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

PYRAMUS DE CANDOLLE,

PAR M. FLOURENS, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Lu à la séance publique du 19 décembre 1842.

L'Académie a perdu, en peu d'années, trois hommes dont les travaux ont profondément influé sur la marche des sciences naturelles. Elle a perdu Georges Cuvier, lequel a fait, de ces sciences, l'application la plus vaste que pût concevoir le génie des hommes. Elle a perdu Laurent de Jussieu qui, par la méthode, semble leur avoir donné une langue pour les idées, comme Linné, par la nomenclature, leur en avait donné une pour les choses. Elle vient de perdre M. de Candolle qui, par une belle théorie, ouvre la série des idées heureuses et des essais hardis du XIX[e] siècle.

Chaque siècle voit briller, dans les sciences, un esprit nouveau. Le XVIII[e] fonde les grandes méthodes, et le caractère de ses travaux est la précision. Le XIX[e] cherche les lois intimes de l'organisation des êtres, et porte, dans ses tentatives, quelque chose d'aventureux.

Quel spectacle que celui de ces grands efforts! Et l'historien des sciences qui, plein de ces grandes images, les peint et les analyse, ne semble-t-il pas analyser les forces mêmes de la pensée? Ne touche-t-il pas à ce que sa mission a de plus haut? Ne voit-il pas naître, se développer et s'établir enfin ces idées premières, desquelles dépendent toutes les autres, et qui, dans l'ordre des sciences, constituent et marquent les véritables époques de l'esprit humain?

Augustin-Pyramus DE CANDOLLE naquit à Genève le 4 février 1778, un mois après la mort de Linné, deux mois après la mort de Haller, et trois mois après celle de Bernard de Jussieu.

Rapprochement singulier, et qui l'est d'autant plus, que M. de Candolle semble s'être imposé la tâche de continuer, et, si l'on peut ainsi dire, de rendre à la botanique ces trois grands hommes.

Il disait lui-même (il est vrai qu'il ne le disait qu'en souriant) qu'il avait publié la *Flore française* pour imiter Haller, la *Théorie élémentaire de la botanique* pour être digne de Bernard de Jussieu, et le *Système naturel des végétaux* pour remplacer l'ouvrage de Linné.

M. de Candolle descendait, par son père, d'une des familles les plus anciennes de la noblesse de Provence.

Un membre de cette famille, Pyramus de Candolle, embrassa la religion réformée et se réfugia à Genève, en 1590. De nombreux services, rendus à sa nouvelle patrie, lui

acquirent bientôt la confiance de ses concitoyens, et lui ouvrirent les portes du Grand Conseil.

Marchant sur les pas de cet homme utile, et qui a laissé une mémoire honorée, le père de M. de Candolle se voua, de bonne heure, aux fonctions publiques, et parvint, encore fort jeune, au poste de *Premier Syndic,* c'est-à-dire, au poste le plus élevé de la République.

La mère de M. de Candolle était petite-nièce de ce fameux Genevois Lefort, que l'on vit, tout à la fois, grand amiral, général en chef, et premier ministre de Pierre le Grand.

L'enfance de M. de Candolle rappelle, sous bien des rapports, l'enfance de Georges Cuvier. Des deux côtés, une mère spirituelle et tendre; des deux côtés aussi un enfant d'une santé délicate et du naturel le plus heureux.

Privé, par cette délicatesse, par cette faiblesse même, des amusements de son âge, le petit de Candolle prit un goût prononcé pour les plaisirs qui tiennent au développement de l'intelligence. Dès l'âge de six à sept ans, il s'essayait à faire des comédies. Florian, ami de la famille, vint, à cette époque, passer un hiver à Genève. « Tu vois monsieur, dit « un jour madame de Candolle à son fils, il est auteur de « charmantes pièces de théâtre. » L'enfant, prenant aussitôt le ton de la confraternité, répondit : « Ah ! vous « faites des comédies; eh bien, moi aussi. » Le don des Œuvres de Florian, fait par l'auteur, ne lui parut alors qu'un procédé convenable; il en comprit mieux plus tard la gracieuse pensée.

Une maladie grave mit, pendant quelque temps, sa vie en danger. Les études du collége furent suivies avec ménagement;

mais la littérature, et surtout la poésie, n'y perdaient rien. Presque tout ce qu'écrivait notre jeune écolier, il l'écrivait en vers. Maîtres et camarades étaient toujours entre la chance d'une épître ou la chance d'une épigramme, selon la disposition du moment.

Rien, assurément, ne faisait pressentir alors le savant ou le botaniste; mais tout annonçait déjà l'homme d'un caractère élevé, de goûts élégants, et né pour une société choisie, dans laquelle il put déployer toutes les grâces naturelles de son esprit.

Cependant, le cours de ces paisibles études allait bientôt être interrompu. Genève commençait à ressentir les premiers effets de la commotion électrique, produite par notre révolution. En 1792, une armée française s'empare de la Savoie, et vient camper aux portes de la ville. Chaque citoyen court aux armes; les femmes et les enfants vont chercher, dans l'intérieur de la Suisse, un abri contre le danger : en vain le jeune de Candolle conjure-t-il son père de le garder près de lui; en vain l'assure-t-il qu'il est en âge de servir sa patrie; le père, profondément touché, reste inflexible, et le généreux enfant est obligé de partir avec sa mère et son frère.

Un riche village, situé au pied du Jura, et près du lac de Neufchâtel, fut l'asile qui le reçut.

Là, le charme d'une belle nature, se révélant à lui pour la première fois, l'émut et le captiva. De longues promenades étaient suivies d'une admiration toujours croissante. Accompagné de son jeune frère, il ne recueillait d'abord des fleurs que pour les dessiner. Bientôt il n'en recueillit plus que

pour une collection, entreprise avec ardeur; les courses devinrent plus longues, plus périlleuses; il ne se rassasiait pas du plaisir de voir, de découvrir de nouvelles plantes; déjà même le futur émule des législateurs de la botanique, des Tournefort, des Linné, des Jussieu, tourmenté du besoin de classer, ne connaissant que le nom vulgaire des plantes, et, fort heureusement pour lui, n'ayant aucun livre, classait les plantes qu'il rassemblait, et les classait par leurs rapports naturels, comme l'esprit classe toujours, quand il n'est pas gâté par de faux systèmes.

Quelques années après le temps dont je parle, un minéralogiste français, célèbre alors par d'utiles travaux, devenu depuis plus célèbre encore par de nobles malheurs, M. Dolomieu, parcourait les montagnes de la Suisse. Il vit le jeune de Candolle, et fut touché de son ardeur pour l'étude. Il lui offrit un patronage qui fut accepté; et bientôt notre Genevois, déjà sûr de ses forces par l'essai même qu'il en avait fait dans la solitude, vint chercher à Paris des maîtres et des rivaux.

Dès son arrivée, tous les cours de haut enseignement l'eurent pour auditeur. Mais, entraîné vers la botanique, il préférait à tout le reste le Jardin des plantes.

En quittant Genève, il s'était pourtant bien promis (car il l'avait promis à son père) de se livrer aussi à l'étude de la médecine. Il le voulut en vain. La vue des malades le plongeait dans une tristesse profonde. Il ne pouvait se faire à cette idée, en effet terrible, d'accepter la responsabilité de leurs souffrances. Il avait un esprit hardi, mais un cœur sensible; et il lui fallait des études où il pût se tromper sans crainte.

Aussi chaque fois que, plus tard, il lui arrivait de tomber dans quelque erreur sur le nom ou sur la classification d'une plante: « Grâce à Dieu, disait-il avec une sorte de bonheur, « ce n'est qu'une plante mal nommée. »

Délivré de la médecine, et rendu sans partage à la botanique, il ne quittait plus le Jardin. On l'y voyait, chaque jour, occupé, du matin au soir, à observer ou à décrire des plantes. Chacun respectait ce jeune homme que rien ne distinguait encore que le travail; et les jardiniers eux-mêmes, le désignant par le siége modeste sur lequel ils le voyaient passer des journées entières, ne l'appelaient que le *jeune homme à l'arrosoir*.

Tant de persévérance ne pouvait échapper, bien longtemps, à M. Desfontaines.

Un jour il aborde notre *jeune homme à l'arrosoir*. « M. Re- « douté, lui dit-il, a fait une collection de dessins de plantes « grasses : il cherche un botaniste pour les décrire; voulez- « vous vous charger de ce travail? »

A cette proposition, le jeune homme, surpris et presque effrayé, fait entendre quelques mots sur la difficulté du sujet, sur son peu de savoir : « Vous verrez, lui dit le bon M. Des- « fontaines, que ce n'est pas aussi difficile que vous le « croyez; vous viendrez travailler chez moi; je vous gui- « derai. »

La réputation de M. de Candolle commence, à vingt ans, par l'*Histoire des plantes grasses*.

Mais bientôt, un travail d'un ordre plus élevé, et surtout d'un caractère plus original, vint marquer beaucoup mieux le rang qu'il devait prendre dans la science.

Il eut l'heureuse idée de s'occuper du sommeil des plantes. Il s'assura d'abord que l'air n'était pour rien dans ce phénomène; car des plantes dormantes, plongées dans l'eau, y passèrent du sommeil à la veille et de la veille au sommeil, comme à l'ordinaire.

L'action de l'air étant exclue, restait celle de la lumière. Des plantes dormantes furent donc placées dans l'obscurité, et tour à tour soumises, ou à l'action de cette obscurité même, ou à l'action de la lumière.

Or, en éclairant ces plantes pendant la nuit, et en les laissant dans l'obscurité pendant le jour, M. de Candolle parvint à changer complétement les heures de leur veille et de leur sommeil : il vit les plantes nocturnes s'épanouir le matin ; il vit les plantes diurnes s'épanouir le soir.

Ces expériences curieuses, communiquées à l'Académie, y excitèrent le plus vif intérêt.

Et en effet, on peut le dire sans exagération, les résultats obtenus par l'auteur avaient quelque chose de merveilleux, même pour le vulgaire. Aidé de la seule lumière artificielle, il avait coloré en vert les plantes étiolées, comme le fait le soleil; il avait changé les heures du sommeil et du réveil des plantes; il avait prouvé, et ceci est bien plus remarquable, que les plantes ont des habitudes; car ce n'est pas tout de suite, ce n'est qu'au bout d'un certain temps qu'elles perdent leurs heures ordinaires pour en prendre d'autres.

La vie des plantes est donc un phénomène bien plus compliqué, bien plus rapproché de la vie des animaux qu'on ne l'avait soupçonné encore : elles ont leur action, leur repos, leur sommeil, leur veille, leurs habitudes; et lors-

que Delille, s'empressant de célébrer ces résultats en beaux vers, va jusqu'à dire :

De la crédule fleur le calice est trompé,

ce langage métaphorique de la poésie ne paraît presque plus une métaphore.

Par ce remarquable travail, M. de Candolle venait de passer du rang d'élève à celui de maître : l'Académie, quoiqu'il n'eût encore que vingt-deux ans, l'inscrivait sur la liste de ses candidats; Adanson disait, en parlant de lui, qu'*il était dans les grands chemins de la science ;* Lamarck lui confiait la seconde édition de la *Flore française ;* et Georges Cuvier le choisissait pour son suppléant à la chaire d'*Histoire naturelle* du collége de France.

La *Flore française,* la *Flore* de ce vaste empire dont les frontières étaient chaque jour reculées par la victoire, a été, pour M. de Candolle, le but ou l'occasion de voyages nombreux et pleins de fatigues.

« La botanique, dit Fontenelle, n'est pas une science sé-« dentaire et paresseuse, qui se puisse acquérir dans le « repos et dans l'ombre d'un cabinet..... Elle veut que l'on « coure les montagnes et les forêts, que l'on gravisse contre « des rochers escarpés, que l'on s'expose aux bords des pré-« cipices. »

On peut croire que Fontenelle, qui a écrit cette phrase pour Tournefort, l'aurait aussi écrite pour M. de Candolle. La seule exploration des hautes régions des Alpes par ce botaniste, prouve que l'enthousiasme de la science a une

intrépidité qui ne le cède à aucune autre. Un jour, il veut gagner le grand Saint-Bernard par le col Saint-Remi, passage presque impraticable. Le col franchi, reste une pente très-inclinée, fortement gelée, et qui se termine par un précipice. Les guides marchaient en avant, marquant les pas dans la neige avec leurs bâtons ferrés. Notre voyageur suivait en silence. Tout à coup le pied lui manque, et, glissant avec une effroyable rapidité, il entend les cris de détresse de ses guides, qui ne peuvent lui porter aucun secours. Enfin, il aperçoit une petite fente dans la glace; il y enfonce fortement son bâton, et ce bâton l'arrête. Aux cris de détresse succèdent des cris de joie; le plus intrépide de ses guides vient à lui par un long détour, et, lui traçant un chemin dans la neige, le conduit jusqu'à un lieu sûr. « Ah! lui dit alors ce brave homme, en l'embrassant, « personne ne m'avait jamais donné tant d'inquiétude! »

L'édition de la *Flore française*, publiée par M. de Candolle, est un ouvrage original, d'une exécution savante, et fait pour servir de modèle en ce genre de grands travaux.

Ce bel ouvrage était à peine terminé, qu'il survint une vacance à l'Académie. Adanson mourut. Outre la *Flore française*, les expériences sur les *habitudes des plantes*, et l'*Histoire des plantes grasses*, M. de Candolle avait publié un grand travail sur les *Astragales*, un *Essai*, plein d'intérêt, sur les *propriétés médicales des plantes*, des recherches, aussi neuves qu'importantes, sur les *pores des feuilles*, sur la *végétation du gui*, etc.; et, s'appuyant avec quelque fierté sur de pareils titres, il pouvait croire aisément qu'il serait nommé.

Il ne le fut pas. M. Palissot de Beauvois l'emporta sur lui de deux ou trois voix. Cet insuccès fut, pour M. de Candolle, un coup sensible. Depuis quelque temps, la Faculté de médecine de Montpellier le pressait d'accepter la chaire de botanique, qu'avaient successivement occupée Gouan et Broussonnet. M. de Candolle, qui avait hésité jusque-là, n'hésita plus. Il accepta la chaire qu'on lui offrait, et se résolut à quitter Paris.

Fit-il bien? fit-il mal? A ne considérer que le motif de sa résolution, le conseil emporté d'une susceptibilité blessée, assurément il ne fit pas bien. Mais, si l'on considère les grands résultats que le séjour de Montpellier a valu à la botanique, peut-être que la réponse sera tout autre.

Paris lui aurait-il laissé les mêmes loisirs pour les longs travaux? le même calme pour les méditations abstraites? la même liberté d'idées? la même originalité de vues? Et, pour dire tout en un seul mot, M. de Candolle aurait-il été aussi complétement lui-même qu'il l'a été?

Le moment venu de quitter Paris pour Montpellier, une difficulté se présenta qui faillit tout rompre. A la *Flore française*, M. de Candolle avait fait succéder un travail non moins important sur la *Géographie botanique de la France*. Il s'était passionné pour ce beau travail; et, plutôt que de l'abandonner, plutôt que de perdre la modeste commission de voyageur, qui suffisait à peine aux frais de ses voyages, il aurait bien vite renoncé à sa chaire de professeur.

Fort heureusement pour Montpellier, M. Cretet, ministre de l'Intérieur, consulté sur cette difficulté, répondit : « Que « M. de Candolle choisisse : il aura les deux places, ou il « n'aura ni l'une ni l'autre. »

Un autre mot de M. Cretet montre mieux encore, quoique toujours sous la forme d'une saillie, la pensée réfléchie de l'homme d'État sous la parole brusque du ministre.

A quelques jours de la réponse que je viens de rapporter, M. de Candolle et M. de Laplace se trouvant chez M. Cretet, et M. de Laplace voulant exprimer par quelques paroles flatteuses la haute estime qu'il portait à M. de Candolle, dit au ministre : « Monseigneur, vous nous jouez un mauvais tour ; « nous comptions avoir bientôt M. de Candolle à l'Institut. » — « Votre Institut ! Votre Institut ! s'écrie M. Cretet. » — « Eh quoi ! répond M. de Laplace tout étonné. » — « Savez- « vous que j'ai quelquefois envie de faire tirer un coup de « canon sur votre Institut ? Oui, monsieur, un coup de « canon pour en disperser les membres dans toute la France. « N'est-ce pas une chose déplorable de voir toutes les lu- « mières concentrées dans Paris, et les provinces dans l'igno- « rance ? J'envoie M. de Candolle à Montpellier pour y por- « ter de l'activité. »

L'enseignement de M. de Candolle à Montpellier y ranima bientôt, en effet, toutes les études. L'esprit de Linné y régnait à peu près exclusivement ; et, par esprit de Linné, il faut malheureusement n'entendre ici que l'esprit des méthodes artificielles. Tout ce travail de la dernière moitié du XVIIIe siècle, toute cette philosophie nouvelle de la science, toutes ces grandes idées, successivement élaborées par les Adanson, par les Jussieu, par les Cuvier, n'y avaient point pénétré encore. Les leçons de M. de Candolle semblaient ouvrir les sources, jusque-là demeurées inconnues, d'un savoir nouveau. Ces admirables leçons, entendues alors par une seule province,

ont été reproduites depuis dans trois grands ouvrages, et l'Europe entière est venue s'y instruire.

Les trois ouvrages dont je parle sont : la *Théorie élémentaire de la botanique,* l'*Organographie* et la *Physiologie végétales.*

La *Théorie élémentaire de la botanique,* publiée en 1813, est, de ces trois ouvrages, le plus important.

C'est là que M. de Candolle pose les premières bases de sa théorie générale sur l'organisation des êtres.

Chaque siècle semble s'imposer la solution de quelque nouveau problème.

Deux grands problèmes ont occupé le XVIIIe : le problème des méthodes, et le problème des révolutions du globe.

La question des méthodes, si puissamment agitée au XVIIe siècle par Tournefort et par Ray, au XVIIIe par Linné, par Adanson, par Bernard de Jussieu, est résolue, à la fin de ce même siècle, par Laurent de Jussieu et par Georges Cuvier.

La question des révolutions du globe commence, en 1575, par quelques idées d'un potier de terre, Bernard Palissy : deux siècles après, Buffon conçoit la grande idée des âges du monde, et il écrit ses *Époques de la nature ;* enfin paraissent les *Recherches sur les ossements fossiles,* de Georges Cuvier, et la question des révolutions du globe sera bientôt une question résolue.

Le problème que s'est proposé le XIXe siècle est, comme je l'ai déjà dit, la détermination des lois intimes de l'organisation des êtres.

Et, cette fois-ci, la lumière est venue d'un côté d'où il ne semblait pas que l'on dût l'attendre.

Le même homme qui, vers la fin du dernier siècle, mêlant, par une conception hardie, le génie différent de deux nations voisines, donnait à l'Allemagne une littérature nouvelle, publia, en 1790, un petit ouvrage intitulé *La métamorphose des plantes*.

Cet homme, dont le génie fut universel et les études presque sans limites, est le premier qui ait vu, dans la transformation d'une partie en une autre, tout le mécanisme secret du développement de la plante.

Une première transformation change la feuille en calice; une seconde, le calice en corolle; une troisième, la corolle en organes d'une structure plus délicate.

Tous ces organes ne sont donc que les modifications d'un organe; toutes les parties de la fleur ne sont donc que des modifications de la feuille: la *transformation* est le fait qui règne; et l'expression généralisée de ce grand fait constitue la théorie célèbre de Goëthe.

La théorie de M. de Candolle a quelque chose de plus élevé encore.

Selon M. de Candolle, chaque classe d'êtres est soumise à un plan général; et ce plan général est toujours symétrique.

Tous les êtres organisés, pris dans leur nature intime, sont symétriques.

Mais cette symétrie primitive, sur laquelle tout repose et d'où tout émane, qu'est-elle? Comment la définir? Comment la déterminer même?

La symétrie, fait primitif, est rarement le fait qui subsiste.

Les *avortements*, les *soudures*, les *dégénérescences* des parties altèrent, presque partout, la *symétrie primitive*, ou la masquent.

Il faut donc remonter sans cesse jusqu'à la *symétrie primitive* à travers toutes les *irrégularités subséquentes*.

En un mot, la *symétrie* est toujours le fait primitif; l'*irrégularité* n'est jamais que le fait secondaire.

Et cette belle, cette magnifique vue de M. de Candolle, cette vue si hardie, peut être déjà donnée, dans plus d'un cas, comme une vérité démontrée.

Quelques exemples suffisent pour le faire voir.

Tout le monde connaît le *marronnier*. Qu'on prenne le fruit de cet arbre, et l'on y verra trois graines au plus, quelquefois une seule. Mais qu'on ne s'en tienne pas au fruit; qu'on ouvre la fleur, et l'on y verra trois loges et deux graines dans chaque loge, c'est-à-dire six graines.

Le fruit du chêne, le gland, n'a jamais qu'une graine; et c'est le type primitif *altéré*. Mais, dans la fleur du chêne, l'ovaire a toujours six graines; et c'est le type primitif *retrouvé*.

La théorie de M. de Candolle révèle à l'observateur un monde nouveau.

Que, dans un groupe de plantes à corolle *polypétale*, un naturaliste ordinaire trouve une plante à corolle *monopétale*, il constate le fait et s'arrête là. Où l'étude finit pour le naturaliste ordinaire, pour le naturaliste inspiré par la théorie l'étude commence. Il voit, dans ces espèces qu'il compare, la corolle unique occuper la même place que la corolle à plusieurs pétales; il voit les nervures de la corolle unique répondre aux divisions des corolles polypétales; il remonte

enfin jusqu'au premier âge de la fleur; il cherche cette corolle unique dans le bouton; il l'y trouve composée de plusieurs pièces; et l'analogie profonde du groupe, masquée par la *soudure* des pétales dans une espèce, paraît tout entière.

Ce que M. de Candolle nomme *dégénérescence,* est ce qui, pris dans un sens inverse, constitue la *métamorphose* de Goëthe.

Goëthe, suivant une *échelle ascendante*, voit la feuille *se métamorphoser* en calice, le calice en corolle, les pétales en étamines, les étamines en pistils, en ovaires, en fruits. M. de Candolle, suivant une marche opposée, voit le fruit, l'ovaire, le pistil, *dégénérer* en étamine, l'étamine en pétale, la corolle en calice, les diverses parties du calice en feuilles.

Nos fleurs doubles ne sont, pour la plupart, que le résultat de la *transformation* des étamines en pétales.

La plus belle de toutes les *transformations* est celle qui change la fleur, si simple, de l'*églantier,* en rose de nos jardins, en rose dite *à cent feuilles.*

La *métamorphose*, prise au sens de Goëthe, tire, si l'on peut ainsi dire, de la feuille toutes les parties de la fleur; la *dégénérescence,* prise au sens de M. de Candolle, ramène toutes les parties de la fleur à la feuille; l'un de ces faits prouve l'autre; et la théorie de Goëthe, bien vue, n'est qu'une partie, mais une partie admirable, de la théorie de M. de Candolle.

On l'a dit il y a longtemps, et l'on a eu grande raison de le dire : les livres ont aussi leur destin.

Lorsque, vers la fin du dernier siècle, Goëthe publia sa

doctrine, le poëte nuisit au botaniste; l'éclat immense de l'auteur de *Werther* et de *Faust* ne permit pas d'apercevoir l'éclat, plus modeste, de l'auteur de la *Métamorphose des plantes*.

Lorsque M. de Candolle publia sa théorie en 1813, il était loin de Paris, dans une province; et son livre ne parvint que peu à peu, et presque insensiblement, à fixer l'attention générale.

Ce n'est que près de vingt ans plus tard, ce n'est que lorsqu'une lutte, survenue entre deux illustres rivaux, a porté le débat devant cette Académie, que l'opinion publique a compris enfin tout ce qu'il y avait de puissance et de force dans les nouvelles idées.

Au reste, et pourquoi n'en pas convenir? sans doute que l'esprit nouveau des sciences, qu'il faut louer d'avoir osé, n'a pas toujours su contenir son essor et maîtriser son audace. Même dans M. de Candolle, dont le jugement est si ferme, et la logique si saine, il est plus d'une généralisation qui étonne, et plus d'une conséquence qu'il paraît difficile d'admettre. On ne s'explique pas bien comment la *symétrie primitive,* cette clef mystérieuse de tout le système, est si rarement le cas dominant, et comment le cas habituel est presque toujours, au contraire, l'anomalie. Mais, d'un autre côté, qui pourrait méconnaître la grandeur de tant de conceptions hardies et profondes? Qui pourrait ne pas admirer tant de résultats obtenus par des méthodes si neuves, tant de vérités qu'il fallait, pour ainsi dire, surprendre, en les abordant par des chemins inconnus? Qui ne serait pas frappé enfin de tant de difficultés anciennes résolues, et, ce qui est plus notable, de tant de difficultés nouvelles qui

n'existaient pas encore pour la science, que la science n'était pas assez savante pour soupçonner?

La *Théorie élémentaire de la botanique* avait paru en 1813; bientôt survinrent les événements funestes de 1814; après des succès inouïs, la France commençait à éprouver des revers sans exemple; le grand empereur tomba; la grande nation, épuisée par tant d'efforts, sembla vaincue.

Pendant les Cent jours, M. de Candolle fut nommé recteur de l'Académie de Montpellier : durant l'anarchie administrative qui suivit la seconde Restauration, l'autorité locale de Montpellier, sans consulter l'autorité supérieure, ou plutôt, en ce qui touche personnellement M. de Candolle, malgré l'ordre exprès de l'autorité supérieure, décida que tous les fonctionnaires des Cent jours seraient destitués; et M. de Candolle dut se démettre du rectorat.

Qu'était le rectorat pour M. de Candolle? Il restait professeur de la Faculté de médecine, doyen de la Faculté des sciences; il était plus cher que jamais à ses élèves, à ses collègues, à la population entière; mais la susceptibilité de son caractère, toujours si vive, agissant encore une fois, il se démit de toutes ses places, et quitta Montpellier pour Genève.

On devine assez comment il y fut accueilli. Cette patrie savante des Trembley, des Bonnet, des Saussure, se sentit fière de réacquérir M. de Candolle. Il n'y avait pas de chaire d'histoire naturelle, on en fonda une pour lui ; il n'y avait pas de jardin botanique, on lui en fit un ; et M. de Candolle put bientôt reprendre le cours, à peine interrompu, de ses leçons et de ses travaux.

Et ce grand enseignement, et ces grands travaux ne tardèrent pas à jeter un nouvel éclat sur Genève.

En 1827, parut l'*Organographie végétale,* ouvrage qui n'est, au fond, que la reproduction de la *Théorie élémentaire,* mais une reproduction singulièrement étendue et développée.

En 1832, parut la *Physiologie végétale,* ouvrage d'un ordre éminent, où brillent des vues élevées, vastes, une méthode supérieure, une exposition d'une lucidité admirable, et pour lequel la Société royale de Londres s'empressa de décerner à M. de Candolle le grand prix qu'elle venait d'instituer. Dès 1817, avait paru le premier volume du *Système naturel des végétaux ;* le second parut en 1820.

Ici nous passons à un autre ordre de faits et d'idées, et la gloire de M. de Candolle va nous apparaître sous un nouvel aspect.

Les anciens n'ont connu qu'un petit nombre de plantes. Théophraste, le plus savant de tous en ce genre, n'en comptait que cinq cents. Bien des siècles après Théophraste, Tournefort en comptait dix mille; mais il ne séparait pas les variétés des espèces : par un des plus grands services qu'il ait rendus à la botanique, Linné, séparant les espèces des variétés, réduisit le nombre des espèces proprement dites à sept mille.

Lorsque, vers l'année 1815, M. de Candolle conçut le projet de dresser le catalogue complet du règne végétal, le nombre des espèces connues ne s'élevait guère qu'à vingt-cinq mille. Mais à peine, par la paix générale de 1815, le monde entier fut-il ouvert aux recherches des voyageurs,

que chaque année vit arriver de tous côtés des masses de végétaux inconnus.

M. de Candolle, dans un écrit publié en 1817, comptait déjà cinquante-sept mille espèces de plantes : « Armée immense, « ajoutait-il, où l'ordre le plus méthodique et le plus naturel « peut seul éviter la confusion ! Merveilleuse fécondité qui « pourrait abattre le courage du botaniste, si le premier sen- « timent n'était pas celui de l'admiration pour la cause de « cette innombrable variété ! » — « Puissions-nous aussi, ajou- « tait-il encore, voir les botanistes conclure de ces calculs, « qu'il reste beaucoup à faire, qu'il y a de la gloire à acquérir « pour tout le monde, et qu'il ne faut par conséquent ni « s'endormir, comme si tout était fait, ni se jalouser, comme « si rien ne restait à faire. »

En deux années, de 1815 à 1817, le nombre des végétaux connus avait donc plus que doublé. Enfin, en 1840, ce nombre, toujours d'après le calcul de M. de Candolle, était de quatre-vingt mille.

Il a décrit dans une seule famille, celle des *Composées*, plus de huit mille espèces. C'est, comme on voit, plus de végétaux dans une seule famille, que n'en contenait le règne végétal entier du temps de Linné.

L'ouvrage dans lequel M. de Candolle a réuni les quatre-vingt mille plantes connues, et, grâce à lui, désormais définies et classées, portait d'abord le titre de *Systema naturale regni vegetabilis*.

Recommencé en 1824, sous une forme plus abrégée, il prit le titre de *Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis*. Et, sous cette forme plus abrégée, ce n'en est pas moins encore un ouvrage immense.

Quatre-vingt mille plantes y sont rangées dans un ordre admirable, c'est-à-dire dans l'ordre même de la nature; chacune s'y trouve avec ses caractères, ses rapports, sa description entière; tout, dans cette description, est d'une précision de détail jusque-là sans exemple; l'auteur a laissé cet immense ouvrage inachevé, et pourtant il se compose déjà de sept énormes volumes de sept à huit cents pages chacun!

La puissance de tête que supposent d'aussi grands travaux, n'honore pas seulement celui en qui on l'admire; elle honore l'espèce humaine entière : la force de l'homme en paraît plus grande.

Je viens de dire que le *Prodromus* est resté incomplet. L'auteur, dans les mémoires qu'il a écrits sur sa vie, et dont je parlerai tout à l'heure, dépeint ainsi l'impression qu'il éprouve au moment où il s'aperçoit que les forces lui manquent.

« C'est, dit-il, une grande et solennelle époque dans la « vie, que celle où l'on acquiert la preuve qu'on a mal calculé « ses plans, et qu'il faut renoncer à celui auquel on attache « le plus de prix. » Il ajoute ces autres paroles : « Il faut ce- « pendant remarquer que mon erreur de calcul a tenu, non « à de la paresse de ma part, mais à l'accroissement subit « du nombre des plantes connues. »

De la paresse! Quand on songe qu'un homme comme M. de Candolle a pu craindre d'être accusé de paresse, on est effrayé. Il a calculé lui-même qu'il a établi plus de sept mille espèces nouvelles et près de cinq cents genres nouveaux, c'est-à-dire, à peu près la quatorzième partie des espèces connues, et la seizième partie des genres admis.

Je ne rappelle ici que les grands travaux de M. de Candolle; j'omets une foule de mémoires de pure botanique; je me borne à citer ses belles études sur la fertilisation des dunes, sur la théorie des assolements, notamment sur la géographie botanique, etc. Quand on parle d'un homme tel que M. de Candolle, il ne peut être question que des travaux par lesquels il a influé sur son siècle.

M. de Candolle appartenait à toutes les académies savantes du monde.

Il fut inscrit, en 1814, sur la liste des huit associés étrangers de cette Académie; liste qui s'ouvre par les noms de Newton et du czar Pierre, et qui, depuis bientôt deux siècles, n'a, en aucun temps, dégénéré de cette première splendeur.

Je viens de dire que M. de Candolle a laissé des mémoires sur sa vie. Quand on n'a lu que ses ouvrages, on ne connaît que l'homme supérieur et le grand botaniste; quand on lit ses mémoires, on apprend à connaître l'homme d'un esprit plein de grâce, et d'une bonhomie pleine de charme.

« J'ai toujours aimé, dit-il, les gens qui parlent d'eux : ce « sont, en général, des gens de bon cœur et qui ont peu de « chose à se reprocher. »

« J'ai toujours pris, ajoute-t-il, d'autant plus de plaisir à « la lecture des mémoires particuliers, que leurs auteurs « étaient dans une position plus voisine de la mienne. Ce « n'est pas seulement à cause du style que les *Confessions* « de J. J. Rousseau ont eu tant de succès, c'est qu'il n'était ni « roi, ni prince, et que la plupart des lecteurs pouvaient

« trouver certaines analogies entre sa position et la leur : les « mémoires de Marmontel, de Morellet, ceux de Gibbon « surtout, font comprendre comment la médiocrité de la « situation peut faire passer, si j'ose le dire, par-dessus la « médiocrité des événements et même de la narration. »

M. de Candolle avait un goût très-vif pour la société. Comme Fontenelle l'a dit de Leibnitz, « il s'entretenait sou- « vent avec les dames, et ne comptait pas pour perdu le temps « qu'il donnait à leur conversation. » Son imagination a toujours eu, d'ailleurs, quelque chose de brillant et de jeune, qui était fait pour leur plaire. Inspiré par elles, son esprit gracieux et facile savait trouver des images sensibles pour les choses les plus abstraites, des expressions animées pour les plus arides, des tours familiers pour les plus profondes. C'est à Coppet, c'est dans une réunion brillante qu'il improvisa l'un des résumés les plus remarquables de sa théorie, sa leçon sur l'*état actuel de la botanique.*

Aussi les dames s'intéressaient-elles vivement à sa gloire.

Peu après son retour à Genève, il fut obligé de renvoyer en Espagne les beaux dessins de la *Flore du Mexique.* L'auteur de cette *Flore,* le savant Mocino, exilé de son pays par une politique violente, s'était sauvé de la tempête comme le Camoëns, en emportant son ouvrage. Pendant son séjour en France, désespérant de le publier, il l'avait confié à M. de Candolle, en lui disant ces mots : *C'est par vous que je serai célèbre.* Rappelé enfin dans sa patrie plus calme et plus juste, il n'y voulait pas rentrer sans cette *Flore du Mexique,* l'un des services les plus notables que le gouvernement espagnol ait rendus aux sciences. M. de Candolle allait donc perdre tant de belles plantes, matériaux précieux et si nécessaires

pour son grand ouvrage. A cette nouvelle, Genève s'émut. M. de Candolle songeait à peine à faire copier quelques espèces parmi les plus rares; on résolut de lui copier la *Flore* entière : plus de cent dames prirent part à ce travail; en dix jours la *Flore du Mexique* fut copiée.

Montesquieu a dit « qu'il n'avait jamais eu de chagrin « qu'une heure de lecture n'eût dissipé. » M. de Candolle en disait autant de la société : non-seulement il s'y délassait, mais son esprit s'y ranimait et s'y retrempait.

Dès son premier séjour à Paris, il avait eu le bonheur d'y retrouver quelques amis, originaires, comme lui, de la Suisse française. La famille pour laquelle J. J. Rousseau avait écrit ses *Lettres sur la botanique,* devait être la première à apprécier M. de Candolle. Le chef de cette famille, M. Benjamin Delessert, joignait au soin des vastes entreprises commerciales un goût passionné pour la botanique. Ce goût fut, entre M. de Candolle et lui, l'occasion d'une amitié plus étroite. C'est là que M. de Candolle vit l'amour du bien public inspirer aussi de grands travaux; et ces grands travaux, bientôt lui-même les partagea. Membre de la Société philanthropique, d'une Commission particulière pour les hospices, l'un des fondateurs de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, etc., il portait dans ces fonctions la même ardeur que dans ses études; et c'est ce qu'il appelait joindre une *vie pratique* à sa *vie théorique.*

« Je n'avais aucun doute, dit-il dans les mémoires que je « citais tout à l'heure, sur l'utilité des sciences en général « pour la société prise en masse; mais il m'a toujours semblé

« que je devais, comme individu, quelque service plus di-
« rect à mes contemporains. »

Cette manière de voir a été la règle de toute sa vie. A Genève, élu, jusqu'à trois reprises successives, membre du Conseil Souverain, et, si l'on peut ainsi dire, membre né de toutes les Commissions d'utilité publique, il avait du temps et de l'activité pour tout.

Les premiers amis de sa jeunesse ont été ceux de toute sa vie. Il leur était complétement dévoué, et on le payait de retour. Je ne sais dans laquelle des trois villes où il a vécu, Montpellier, Paris et Genève, M. de Candolle a compté le plus de vrais amis. Deux d'entre eux l'ont précédé dans la tombe : M. Desfontaines et M. Cuvier. Le nom de ces deux-là fait l'éloge de tous les autres.

M. de Candolle a eu pour ses goûts la même constance que pour ses amis. Il avait commencé par faire des vers, et il en a fait toujours. Mais, ayant reconnu, de bonne heure, que la poésie, et particulièrement la poésie française, demande un grand travail, et toutes les forces de son esprit étant employées ailleurs, il ne faisait des vers que pour ses amis ; il n'en a publié aucun.

M. de Candolle avait eu une enfance délicate. Sa constitution éprouva, vers l'âge de quinze à seize ans, une révolution heureuse. Dès lors, son corps sembla fait, comme son esprit, pour les grands travaux. Pendant plus de quarante ans, il a conservé une santé ferme, malgré les fatigues les plus extrêmes. En 1835, une maladie violente mit ses jours en péril. Il ne revint à la vie

que pour revenir au travail : il a publié, depuis sa maladie, la partie, peut-être la plus difficile, et sans comparaison la plus étendue, de son grand ouvrage. Son beau génie semblait nous être rendu tout entier; mais sa santé ne s'est jamais rétablie.

Il est mort le 9 septembre 1841.

Au bonheur qu'il devait à de grands succès, surtout à de grands travaux, M. de Candolle a joint un bonheur plus précieux encore. Une alliance honorable, contractée en 1808, a fait le charme de sa vie; et il laisse un fils digne de porter son nom et de continuer sa gloire.

Ses dernières paroles ont été : « Je meurs sans inquié-
« tude ; mon fils achèvera mon ouvrage. »

Je viens de raconter la vie et d'exposer les travaux de M. de Candolle. Ces grands travaux marquent, dans la botanique, une époque nouvelle.

Tournefort ayant constitué la science, Linné lui ayant donné une langue, les deux Jussieu ayant fondé la méthode, il ne restait qu'à ouvrir à la botanique l'étude des lois intimes des êtres; et c'est ce qu'a fait M. de Candolle.

Il est le seul homme, depuis Linné, qui ait embrassé toutes les parties de cette science avec un égal génie.

Considéré comme professeur, sa gloire est unique. La botanique n'avait point encore été enseignée avec cet éclat. Des idées nettes, une méthode sûre, une élocution pleine de grâce, tout, dans ses leçons, élevait l'esprit et le captivait; il exposait les faits, et, à côté des faits, l'art de les juger; il exposait les observations, et, à côté des observations, l'art

d'observer : « L'art de découvrir, a dit Fontenelle, est plus « précieux que la plupart des choses qu'on découvre. »

Dans ses grands ouvrages sur la *Théorie de la botanique*, sur l'*Organographie*, sur la *Physiologie végétales*, il n'a sans doute ni le beau style de Tournefort, ni l'expression si merveilleusement originale de Linné, mais il a toutes les qualités qui naissent, pour l'écrivain, d'une tête fortement pensante ; il a les deux qualités qui, dans les matières philosophiques, sont les premières : il est élevé et clair. C'est une grande erreur, quoique très-commune, de supposer qu'une idée puisse être élevée sans être claire. La clarté est inhérente à l'élévation : *Transcendentalement clair*, a dit l'esprit le plus lumineux de la France, Descartes.

Considéré comme novateur, une qualité surtout le distingue, savoir, une logique parfaite. La logique est le guide secret des génies qui osent heureusement.

Considéré enfin comme homme, M. de Candolle a été un homme de bien, un citoyen utile, et un homme aimable qui, par la bonhomie de son caractère et les grâces de son esprit, a su faire oublier le savant, et se faire pardonner sa gloire.

NOTES.

Page ij. *M. de Candolle descendait, par son père, d'une des familles les plus anciennes de la noblesse de Provence.*

La branche aînée de cette famille s'est conservée en Provence. Son chef actuel est M. le marquis de Candolle.

Page v..... *Classait les plantes qu'il rassemblait, et les classait par leurs rapports naturels, comme l'esprit classe toujours, quand il n'est pas gâté par de faux systèmes.*

« Je suis resté convaincu, dit M. de Candolle, dans les *Mémoires* qu'il « a écrits sur sa vie, que rien n'a plus influé sur la direction de mes tra- « vaux, et ne m'a mieux disposé à l'étude des rapports naturels, que cette « observation des végétaux, faite sur les végétaux mêmes, et d'après mes « seules idées dépouillées de toute hypothèse. »

Page vij. *Il avait coloré en vert les plantes étiolées, comme le fait le soleil.*

Il faut pourtant remarquer qu'il n'avait obtenu qu'une demi-coloration.

« Ces plantes, dit-il, étaient véritablement intermédiaires entre les plan- « tes étiolées et les plantes vertes. »

Il faut remarquer, de plus, que la lumière artificielle n'eut jamais, dans ses expériences, « assez d'intensité pour développer du gaz oxygène. »

M. de Humboldt avait déjà vu les végétaux se colorer en vert sous l'action de la lumière artificielle : *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, T. XV, p. 1194.

Page ix. *L'édition de la Flore française, publiée par M. de Candolle, est un ouvrage original....*

Une circonstance qui montre à quel point cet ouvrage a été utile, c'est qu'il se composait de cinq volumes, que ces cinq volumes avaient été tirés

au nombre de quatre mille exemplaires, et que, peu d'années après, il fallait songer à une édition nouvelle.

Page ix. *Un* Essai, *plein d'intérêt, sur les propriétés médicales des plantes.*

L'objet de cet ouvrage est de mettre dans tout son jour l'analogie profonde qui existe entre les *propriétés* et les *rapports naturels* des plantes. Ce bel ouvrage, trop peu étudié jusqu'ici, est l'un de ceux qui doivent contribuer le plus à donner des bases sûres et rationnelles à la science la plus empirique qui ait jamais été, à la *matière médicale.*

Page xj. *L'esprit de Linné y régnait à peu près exclusivement.....*

Il y avait été introduit par Sauvages, et immédiatement appliqué par lui à la classification régulière des maladies, par classes, par genres, et par espèces. Voyez sa *Nosologie méthodique* (1), ouvrage très-remarquable pour le temps où il a paru.

Page xj.... *Et, par esprit de Linné, il faut malheureusement n'entendre ici que l'esprit des méthodes artificielles.*

En effet, personne n'a mieux compris que Linné le rôle différent de la *méthode naturelle* et des *méthodes artificielles*, ni mieux marqué les caractères qui les distinguent.

Page xij. *Et la question des révolutions du globe sera bientôt une question résolue.*

Je dis *sera bientôt.* En effet, la *détermination des ossements fossiles* n'avait résolu que la partie zoologique du problème. La partie géologique l'a été par la *théorie du soulèvement des montagnes.* Voyez les beaux travaux de M. Élie de Beaumont sur ce grand sujet.

Page xiij. *Selon M. de Candolle, chaque classe d'êtres est soumise à un plan général; et ce plan général est toujours symétrique.*

Il y a visiblement ici deux idées : l'idée d'un plan général, primitif,

---

(1) *Nosologia methodica sistens Morborum classes, genera et species*, etc. Amsterdam, 1763.

qui pourrait être, ou non, symétrique; et l'idée d'un plan primitif, nécessairement symétrique.

Pour M. de Candolle, ces deux idées n'en font qu'une. Selon lui, non-seulement il y a un *plan primitif*, mais ce plan primitif est *toujours symétrique*.

Ainsi donc, selon M. de Candolle, tout être organisé est primitivement *régulier*, *symétrique*. L'être *irrégulier* est celui dont la symétrie primitive a été dérangée (1).

Page xiij. *Mais cette symétrie primitive,..... qu'est-elle? Comment la définir?*

M. de Candolle ne définit pas rigoureusement cette *symétrie primitive* (2); et Goëthe n'y croyait pas.

« Nous ne saurions approuver, dit Goëthe, les moyens que M. de Candolle « emploie pour faire concevoir aux amis de la botanique l'idée fondamen- « tale de laquelle tout dépend. Il a tort, selon nous, de prendre la *symé-* « *trie* pour point de départ, et même de donner ce nom à l'ensemble de « sa doctrine. *Il suppose* que la régularité entre dans le plan primitif de la « nature.... (3). »

Oui, sans doute, l'idée d'une *symétrie primitive* et *subséquemment altérée* n'est encore, dans bien des cas, qu'une *supposition*. On peut en con-

---

(1) « On ne peut non plus disconvenir que, dans certains cas assez nombreux, la symétrie semble dérangée. » *Organogr. végét.*, t. II, p. 238.

(2) « On a donné, dit-il, le nom de *symétrie* à la *régularité* non géométrique des corps organisés. » *Organographie végétale*, t. II, p. 238. Il dit ailleurs : « Le mot *symétrie* équivaut, dans les êtres « organisés, à la régularité dont on étudie les lois dans les corps bruts. » *De l'État actuel de la botanique générale*, p. 40.

M. de Candolle définit donc la *symétrie* par la *régularité;* mais la *régularité* n'est pas toujours la *symétrie*.

Deux objets *irréguliers*, s'ils ont d'ailleurs même forme, même position relative, etc., seront *symétriques*.

En fait de *symétrie*, l'idée de *régularité* porte, non sur les *choses* mêmes, mais sur le *rapport* des choses.

Voyez d'abord, pour la *symétrie* dans le règne végétal, l'ouvrage de M. Auguste Saint-Hilaire, intitulé : *Morphologie végétale ;* et ensuite, pour la *symétrie* en général, l'ouvrage de M. Chevreul, intitulé : *De la loi du contraste simultané des couleurs*.

(3) *OEuvres d'hist. natur.*, traduites par M. Martins, p. 313.

venir avec Goëthe. Mais il faut convenir aussi que, dans bien d'autres cas, elle est le fait même : dans le *marronnier d'Inde*, la *symétrie primitive* s'altère sous les yeux de l'observateur; dans une foule d'espèces, la *symétrie primitive*, masquée par des *irrégularités ordinaires*, se dégage, par moments, de ces *irrégularités*, et tout à coup reparaît.

Je veux parler ici des *monstruosités*. M. de Candolle les définit par une expression heureuse : *des retours à la symétrie* (1).

Il est le premier qui ait fait entrer la *monstruosité* dans une théorie générale (2).

« C'est par l'observation de certaines monstruosités qu'on est parvenu, « dit-il, à démêler la vraie nature de certains organes avortés, et par con« séquent la vraie symétrie de ces plantes. Ainsi l'observation des Peloria a « prouvé qu'un certain filet qu'on trouve sur la base interne de la corolle « de l'*antirrhinum linaria* et de quelques autres, est une étamine avortée, « puisqu'on l'a vue se changer en étamine (3). »

Il dit ailleurs : « Toute cette classe nombreuse de faits, connue sous le « nom de monstruosités, qui était impossible à comprendre dans l'ancien « système, et qu'on affectait de mépriser, pour se dispenser de les étudier, « toute cette classe, dis-je, a pris une clarté et un intérêt nouveau, depuis « qu'on les a vus sous leur vrai point de vue, savoir, comme des indices « pour reconnaître la symétrie normale ou primitive des êtres (4). »

Je viens de dire que, dans plus d'un cas, la *monstruosité*, c'est-à-dire, et pour me servir de l'expression même de M. de Candolle, le *dérangement de la symétrie*, se fait sous les yeux de l'observateur.

C'est qu'alors, au moment où elle a lieu, les organes qui s'y trouvent

---

(1) « Sous le nom de *monstruosités*, nous confondons, en général, tout ce qui sort de l'état habi« tuel des êtres. Sur ce nombre, il en est qui sont des retours de la nature vers l'ordre symé« trique. . . . » *Théor. élém. de la botaniq.*, p. 97. « Il est des monstruosités qui semblent être « des retours à la symétrie naturelle de l'espèce, laquelle, dans le cours ordinaire des choses, « est masquée par quelque anomalie. » *Physiolog. végét.*, t. II, p. 736.

(2) « C'est par ces faits (que nous appelons *monstruosités*) que nous sommes remontés à l'idée gé« nérale de la symétrie primitive ou de l'ordre propre aux êtres organisés. » *Physiolog. végét.*, t. II, p. 766.

(3) *Théor. élém. de la bot.*, p. 98.

(4) *Organogr. végét.*, t. II, p. 240.

soumis, sont déjà plus ou moins avancés dans leur formation, sont déjà visibles.

Il est d'autres cas, au contraire, où cette action demeure cachée : c'est qu'alors elle a eu lieu à une époque où les organes n'étaient pas encore visibles (1).

Page xiv. *Les avortements, les soudures et les dégénérescences* (2) *des parties altèrent, presque partout, la* symétrie primitive, *ou la masquent.*

Tout l'art du botaniste consiste à discerner, dans chaque *irrégularité particulière,* quelles sont les causes perturbatrices qui interviennent.

Je dis *les causes :* en effet, souvent plusieurs de ces causes agissent ensemble (3).

Page xv. *Et l'analogie profonde du groupe, masquée par la soudure des pétales dans une espèce, paraît tout entière.*

On peut donc rapprocher des plantes à pétales libres et des plantes à pétales soudés, si elles se ressemblent d'ailleurs. On peut les regarder comme étant du même type. Et j'insiste sur ce point, car un des beaux côtés de la théorie de M. de Candolle est celui par lequel elle touche à la *classification naturelle.* Éclairée par cette théorie, la *classification naturelle* est devenue plus rationnelle. La structure du végétal, mieux comprise, s'est montrée plus simple, plus claire, plus régulière : sous la *structure apparente* on a cherché une *structure intime et profonde;* et, dans bien des cas, cette *structure intime et profonde* a conduit à rapprocher des plantes que, sur la *structure apparente,* on avait jugées assez éloignées.

---

(1) . . . . . « Tantôt l'avortement est déterminé par des causes tellement éloignées, qu'il est « déjà effectué au moment où l'organe pourrait être visible à nos yeux; et, dans ce cas, nous ne « pouvons reconnaître son existence que par l'analogie, ou l'observation des monstruosités. » *Théorie élément. de la botaniq.*, p. 105.

(2) A ces trois causes perturbatrices de la symétrie primitive, M. de Candolle ajouta plus tard les *multiplications* des parties. Voyez l'*Organogr. végét.*, t. II, p. 239.

(3) « Outre les cas où les trois causes précédentes empêchent de connaître la symétrie des « plantes, il faut encore, et avec plus de soin et de délicatesse, se garer de ceux où ces causes « réunies ensemble sont plus difficiles à reconnaître et produisent des changements plus profonds...» *De l'état act. de la botaniq. génér.*, p. 45.

Page xv.... *Masquée par la soudure des pétales.....*

« L'étude des soudures, dit M. de Candolle, conduit à se rendre raison « d'une classe de formes sur laquelle on avait conçu des idées très-fausses; « on a pris l'habitude de considérer une corolle, par exemple, ou tout au-« tre organe, comme un tout, et les échancrures apparentes qu'on y re-« marque ont été regardées comme des découpures provenues, on ne sait « comment, dans un ensemble préalablement existant ; on conçoit aujour-« d'hui toutes ces formes avec une singulière facilité par le système inverse. « Toutes les parties des fleurs et des fruits sont composées de parties dis-« tinctes, tantôt libres, tantôt plus ou moins soudées entre elles. Ainsi, « par exemple, les pétales sont des pièces de l'appareil floral qui, lors-« qu'elles ne se soudent point entre elles, forment la corolle dite *polypé-« tale*, et qui, lorsqu'elles sont plus ou moins soudées, forment celle que, « dans l'ancienne théorie, on nommait *monopétale,* et qu'il convient de « nommer *gamopétale,* pour exprimer sa vraie nature, etc., etc. (1). »

Page xv. *Ce que M. de Candolle nomme dégénérescence est ce qui, pris dans un sens inverse, constitue la métamorphose de Goëthe.*

C'est une idée bien ingénieuse que l'idée de Goëthe.

Selon Goëthe, il n'y a qu'un organe (2); cet organe, successivement modifié (3) ou perfectionné (4), donne tous les autres : d'abord la feuille; puis le calice; plus tard l'étamine, le pistil et le reste; chacun de ces organes est le résultat de celui qui le précède (5); et la plante, *sortie d'une*

---

(1) *De l'état actuel de la botaniq. génér.*, p. 42.

(2) « Nous avons noté avec soin les effets de ces forces secrètes, qui modifient successivement un « seul et même organe. » *OEuvres d'hist. nat.* (traduction française), p. 239.

(3) « Un seul et même organe se présente à nous diversement modifié. » *Ibid.*, p. 210.

(4) « La plante grandit en devenant tous les jours plus parfaite. » *Ibid.*, p. 218. « La métamor-« phose, à partir des premières feuilles séminales, se montre toujours graduellement agissante, et « monte en faisant éclore une forme d'une autre, jusqu'au point le plus élevé de la nature vivante, « la propagation par les deux sexes. » *Ibid.*, p. 210.

(5) « Nous avons dit que le calice était le produit des sucs plus épurés qui s'élaborent tous les « jours dans la plante. Nous allons le voir servir d'instrument lui-même à la formation d'un organ

graine, ne s'arrête dans ses *métamorphoses* que lorsqu'elle a produit elle-même une graine (1).

Dans la *dégénérescence* il n'y a pas proprement *dégénérescence*, mais plutôt *perfectionnement non atteint*.

La *dégénérescence* a d'ailleurs, comme l'*avortement*, comme la *soudure*, sa *prédisposition*, sa *constance*.

C'est ainsi que M. de Candolle voit, dans l'état habituel de certaines espèces qui ont beaucoup de pétales, une dégénérescence *constante* des étamines ; dans l'état habituel des espèces qui ont beaucoup d'étamines, une transformation *constante* de quelque organe voisin qui s'ajoute aux vraies étamines, etc., etc.

Une force secrète de *transformation* règne et s'étend partout. — « Ainsi, « dit M. de Candolle, les tiges, les pétioles, les pédoncules de diverses « plantes sont disposés à s'allonger en filets flexibles et roulés en spirale « ou en volute, qu'on appelle des vrilles; ainsi les extrémités de tous les « organes (branches, pétioles, feuilles, pédoncules, calices, pétales, etc.), « sauf la racine et la graine, tendent souvent à s'endurcir et à former des « épines; ainsi des tiges, des rameaux, des pétioles, dilatés et élargis, for- « ment des disques foliacés semblables à de véritables feuilles (2), etc., etc. »

« plus parfait encore. » *Ibid.*, p. 222. « Nous voyons les feuilles atteindre, en dernier lieu, leur « plus grand développement et leur plus haut degré de perfection. Alors un nouveau phénomène « a lieu; il nous montre que la période que nous venons d'examiner finit, et que nous touchons à « l'époque suivante, celle de la *floraison*. » *Ibid.*, p. 218.

(1) « Nous avons observé la plante dans toutes ses métamorphoses, depuis sa sortie de la graine « jusqu'à la formation d'une nouvelle graine. » *Ibid.*, p. 239.

(2) *De l'État actuel de la botaniq. génér.* Voyez aussi, sur ces neuves et fondamentales questions de physiologie végétale, le beau Mémoire de M. Gaudichaud, intitulé : *Recherches générales sur la physiologie et l'organogénie des végétaux : Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. xiv, p. 973.

Page xvj. *On ne s'explique pas bien comment la symétrie primitive, cette clef mystérieuse de tout le système, est si rarement le cas dominant, et comment le cas habituel est presque toujours, au contraire, l'anomalie.*

Goëthe a dit : « C'est précisément ce langage qui a effrayé,... car alors « les intentions de la nature seraient fort rarement remplies; nous marche- « rions d'anomalie en anomalie sans savoir où nous arrêter (1). »

M. de Candolle aurait pu répondre que la question dont il s'agit, bien examinée, se résout en une question de fait; que le fait même est démontré aux yeux dans une foule de cas; que des *avortements constants* (2), que des *soudures prédisposées* (3) *remplissent*, sans doute, *les intentions de la nature,* puisqu'ils sont *constants* et *prédisposés;* et qu'enfin le vrai point de la difficulté n'est pas de savoir si l'*on marche d'anomalie en anomalie,* mais si l'on marche de fait en fait.

Je dis *de fait en fait :* l'avortement d'un certain nombre de graines, dans le *marronnier,* est un fait; l'avortement de cinq graines sur six, dans le chêne, est un fait, etc., etc.

Les causes qui amènent les anomalies *constantes* et *prédisposées* sont, aux yeux de M. de Candolle, soumises à des lois si fixes, si régulières (4),

---

(1) *OEuvres d'hist. nat.* (traduction française), p. 313.

(2) .... « On peut donc, en théorie, admettre la possibilité de l'avortement constant ou pré- « disposé de certains organes. » *Théor. élém. de la botaniq.*, p. 95. « Mais si la cause de l'avorte- « ment se trouve inhérente au végétal lui-même, elle devra se rencontrer toujours dans des circons- « tances données ou des périodes données de son existence : c'est ce qui constitue les avortements « *constants* ou *prédisposés.* » *Physiol. végét.*, t. II, p. 762. . . . « Cette adhérence n'est cependant « pas autre chose qu'un accident, mais c'est un *accident constant,* et, quoique ces deux mots sem- « blent contradictoires, ce genre de phénomènes n'en est pas moins très-commun dans la nature. » *Théor. élém. de la botaniq.*, p. 112.

(3) « Il existe des soudures naturelles, c'est-à-dire qui ont lieu entre des organes par une suite « nécessaire de leur rapprochement primitif; je les désigne sous le nom d'*adhérences prédisposées.* » *Ibid.*, p. 113.

(4) « Les irrégularités apparentes des végétaux tiennent à des phénomènes constants entre cer- « taines limites, et susceptibles d'exister, soit séparément, soit réunis, d'après des lois régulières. » *Organogr. végét.*, t. II, p. 239.

qu'il y trouve la source même des caractères des *genres* et des *espèces*.

« L'arrangement des plantes en ordres naturels suppose, dit-il, qu'on « pourra un jour établir les caractères de ces ordres sur ce qui fait la base « de leur symétrie, et rapporter les formes variées des espèces et des « genres à l'action des causes qui tendent à altérer la symétrie primitive. « Ainsi, chaque famille de plantes peut être représentée par un état régu- « lier, tantôt visible par les yeux, tantôt concevable par l'intelligence; c'est « ce que j'appelle son *type* : des soudures, des avortements, des dégé- « nérescences ou des multiplications, séparées ou combinées ensemble, « modifient ce type primitif, de manière à faire naître les caractères habi- « tuels des êtres qui les composent (1). »

Page xvij. *La patrie savante des Trembley, des Bonnet, des Saussure.....*

J'aurais dû peut-être nommer aussi J. J. Rousseau.

Je dis *peut-être*, car il ne s'agit ici, bien entendu, que du savant, du naturaliste.

J. J. Rousseau était un botaniste très-profond. Il sentait le besoin d'une nomenclature : « Il a fallu, dit-il, pour ne pas s'y perdre, tout rapporter « à une nomenclature particulière. » Mais il sentait aussi qu'une nomenclature n'était pas tout : « Auquel des deux, disait-il, accorderai-je le nom « de botaniste, de celui qui sait cracher un nom ou une phrase à l'aspect « d'une plante, sans rien connaître à sa structure, ou de celui qui, con- « naissant très-bien cette structure, ignore néanmoins le nom très-arbi- « traire qu'on donne à cette plante....? » *Lettres sur la botanique.*

Page xvij. *Il n'y avait pas de jardin botanique, on lui en fit un.*

On lui fit de même un cabinet d'histoire naturelle; et tout cela par souscription. Un enthousiasme, si général et si noble, honore Genève.

Page xx. *Quatre-vingt mille plantes y sont rangées dans un ordre admirable, c'est-à-dire dans l'ordre même de la nature.*

Nul botaniste n'avait mieux compris que M. de Candolle l'esprit de la

(1) *Organogr. végétale*, t. II, p. 240.

Méthode naturelle, de la *Méthode* des deux Jussieu; nul n'a exposé cette *Méthode* sous des points de vue plus philosophiques; et nul, plus que lui, n'a contribué à la rendre générale et dominante en Europe.

Page xx. *Tout, dans cette description, est d'une précision de détail jusque-là sans exemple.*

La simple description des espèces a pris, depuis la théorie de M. de Candolle, un degré nouveau de précision, et surtout un intérêt plus général, un caractère plus philosophique. C'est ce qu'il expose très-bien lui-même dans le passage suivant :

« La simple description des faits et des formes végétales a été singulièrement améliorée depuis que la connaissance de quelques lois générales « a appelé les descripteurs à réfléchir sur ce qu'ils voyaient. Ceux qui refusent de croire à ces lois, peuvent, sans s'en douter, décrire les aberra- « tions pour l'état naturel des êtres, parce que rien ne les engage à soup- « çonner que ce qu'ils voient est contraire à l'ordre; ils peuvent facilement « négliger des organes minutieux, parce que rien ne les avertit de leur « existence; et s'ils sont doués d'un esprit plus exact qu'étendu, ils peu- « vent se donner beaucoup de peine pour décrire en détail certaines « particularités que quelques mots, fondés sur l'analogie, auraient fait con- « naître avec plus de clarté. Lors, enfin, que deux descripteurs ont dé- « crit un même être d'une manière contradictoire, ce qui n'est malheureu- « sement pas très-rare, on n'a évidemment d'autre moyen de discerner la « vérité que l'analogie plus ou moins grande des descriptions avec les lois « de la symétrie. Or, pour arriver à disposer les plantes dans un ordre « rationnel, il faut sans cesse se décider sur des descriptions plus ou « moins inexactes; car nous n'en sommes plus à l'époque où le même « homme pouvait voir par lui-même toutes les plantes connues (1). »

Page xx. *L'auteur a laissé cet immense ouvrage inachevé, et pourtant il se compose déjà de sept énormes volumes de sept à huit cents pages chacun !*

Il faut ajouter ici que rien n'est omis de ce qui peut rendre l'étude de

(1) *Organog. végét.*, t. II, p. 241.

ce grand ouvrage plus facile et plus sûre. Des caractères d'imprimerie différents font distinguer, au premier coup d'œil, ce qui appartient au genre de ce qui appartient à l'espèce, etc. L'auteur sépare ce qui lui est propre de ce qu'il cite; il indique toujours, quand il s'agit des espèces établies par les autres, s'il a vu l'échantillon authentique qui a servi de base à l'établissement de l'espèce, dans quelle collection il l'a vu, etc., etc.

Page xxj. *Quand on parle d'un homme tel que M. de Candolle, il ne peut être question que des travaux par lesquels il a influé sur son siècle.*

Il est pourtant un ouvrage de M. de Candolle dont je crois devoir au moins donner une idée, d'abord parce qu'il est resté inachevé, et ensuite parce qu'il intéresse particulièrement la France, pour laquelle il avait été entrepris.

L'objet de cet ouvrage est la *Statistique végétale de la France.*

L'auteur étudie, d'un côté, la distribution générale des végétaux sauvages, ou la *géographie botanique* de la France; et, de l'autre, la distribution des végétaux cultivés, ou ce qu'il appelle la *botanique agricole* de la France.

Sous le rapport de la *géographie botanique*, l'auteur partage la végétation de la France en quatre régions principales : celle du nord-est, celle des côtes de l'ouest, celle des oliviers, et celle des diverses chaînes de montagnes; vient enfin, et comme appendice, l'histoire des plantes marines et aquatiques.

Sous le rapport de la *botanique agricole*, M. de Candolle montre ce que, dans chacune de ces régions, la nature sauvage produit pour l'homme; ce que l'agriculture y ajoute; et ce que le commerce fournit comme supplément.

On sent assez de quelle utilité pratique aurait pu être un pareil ouvrage; et plus on s'occupera, parmi nous, de la distribution générale de la richesse publique, cette question vitale pour tout grand peuple, plus on regrettera que l'ouvrage de M. de Candolle n'ait pas été achevé.

Page xxv. *Tournefort ayant constitué la science....*

C'est la justice que lui rend Linné.

Classis, Ordo, Genus, Species, Varietas:
Tournefortio debet botanice hos familiarum limites (1).

Page xxv. *Il est le seul homme, depuis Linné, qui ait embrasse toutes les parties de la botanique avec un égal génie.*

On lit avec un vif intérêt, dans l'Éloge de M. de Candolle par M. Martius, Secrétaire de l'Académie royale des sciences de Munich, un parallèle très-étendu et très-ingénieux de Linné et de M. de Candolle. M. Martius appelle, avec raison, M. de Candolle *le Linné de nos jours.*

(1) *Philosophia botanica: Characteres.*

LISTE CHRONOLOGIQUE

DES OUVRAGES DE M. DE CANDOLLE.

Notice sur le Reticularia rosea. Bull. Soc. philom. de Paris (1798), p. 105.

Premier essai sur la nutrition des Lichens, Journ. de phys., vol. 47, p. 107 (1798).

Observations sur une espèce de gomme qui sort des bûches du hêtre. Journ. de phys., vol. 48, p. 447 (1799).

Observations sur les plantes marines, Bull. Soc. phil (1799), p. 171.

Notice sur quelques genres de Siliculeuses, *et en particulier sur le nouveau genre* Senebiera. Mém. Soc. d'hist. natur. de Paris, 1799, vol. I, p. 140, et Bull. Soc. phil. (1799), p. 172, ext.

Histoire des plantes grasses, avec des figures peintes par Redouté, en latin et en français; in-folio et in-4°, 28 livraisons. Paris, 1799 à 1803, avec 168 planches en couleur.

Note sur la monographie des Légumineuses biloculaires. Bull. Soc. philom., (1800), p. 123.

Expériences relatives à l'influence de la lumière sur quelques végetaux. Bull. Soc. philom. (1800), p. 138; Journ. de phys., vol. 52, p. 124, par ext., et en totalité dans les Mémoires des savants étrangers de l'Institut, vol. I, p. 329 (1805).

Mémoire sur les pores de l'écorce des feuilles. Bull. Soc. philom. (1800), p. 156, et Journ. de phys., vol. 52, p. 130 (1801); en totalité dans les Mémoires des savants étrangers de l'Institut, vol. I, p. 351 (1805).

Mémoire sur la végétation du Guy, par extrait, Bull. Soc. philom. (1801), p. 162, et en entier dans les Mémoires des savants étrangers de l'Institut, vol. I, p. 370 (1805).

Mémoire sur la famille des Joubarbes (*Semper vivæ*, Juss.), Bull. Soc. philom. (1801), p. 1.

Rapport sur les Conferves, fait à la Société philomatique, Bull. Soc. philom. (1801), p. 17, par ext., et en entier Journal de phys., vol. 54, p. 121 (1802).

Note sur le Réséda Gaude *et le* Carthame *des teinturiers*, dans les Ann. des arts (1801).

Note sur la graine des Nymphæa, Bull. Soc. philom. (1801), p. 68.

Description d'un nouveau genre de plantes nommé Strophanthus, Bull. Soc. philom. (1802), p. 122, et Ann. Mus. d'hist. nat., vol. I, p. 408, extrait par M. Desfontaines; imprimé en totalité dans les Mémoires des savants étrangers de l'Institut, vol. I, p. 406 (1805).

Les Liliacées, *peintes par Redouté*, *décrites par D. C.* (les quatre premiers volumes.) Paris, in-folio; I, 1802; II, 1805; III, 1807; IV, 1808, avec 240 planches en couleur.

Les vol. 5 à 8 ont été continués par MM. de la Roche et Delile (1809-1813).

*Recherches botaniques et médicales sur les diverses espèces d'*Ipécacuanha, Bull. Soc. philom. (1802), p. 124, par ext., et en entier Mém. de la Faculté de Médecine de Paris; vol. I, p. 78 (1812).

Mémoire sur les genres Astragalus, Phaca, Oxytropis, Colutea et Lessertia, Bull. Soc. philom. (1802), p. 130, travail développé ultérieurement dans l'ouvrage suivant :

Astragalogia, 1 vol. grand et petit in-folio. Paris, 1803, avec 50 planches.

Mémoire sur la fertilisation des dunes. Mém. Soc. d'agric. de Paris, vol. 5, p. 432, et Ann. de l'agric. française (1re série), vol. XIII (1803).

Note sur le genre Rhizomorpha. Bull. Soc. philom. (1803), p. 202.

Mémoire sur le Vieusseuxia, *genre de la famille des* Iridées; Bull. Soc. philom. (1803), p. 203, par extr., et en entier Ann. du Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. II, p. 136.

Note sur deux genres nouveaux de la famille des Iridées, *le* Diasia *et le* Montbretia; Bull. Soc. philom. (1803), p. 251.

Examen d'un sel recueilli sur le Reaumuria, avec M. Fréd. Cuvier. Ibid., p. 251.

Articles *Paquerette*, *Parisette*, *Parnassie*, *Paronyque*, *Parthène*, *Passerage*, *Pezize*, remis à M. de Lamarck en 1788, et imprimés sans la participation de l'auteur en 1804, au vol. V de la part. botan. de l'Encycl. méthodique.

Essai sur les propriétés médicales des plantes, comparées avec leurs formes extérieures et leur classification naturelle. Dissert. inaugur. pour le Doct., in-4°, soutenue à la Faculté de Méd. de Paris, le 8 juin 1804. — 1 vol. in-4°, Paris, première édit.; seconde édit., 1 vol. in-8°, 1816; trad. en allemand par K.-J. Perleb; Aarau, 1 vol. in-8°, 1818.

Flore française de J.-B. de Lamarck, troisième édition, publiée par A.-P. de Candolle, 6 vol. in-8°, Paris, 1805-1815.

Principes élémentaires de Botanique, in-8°, Paris, 1805. Extrait du premier vol. de l'ouv. précéd.

Note sur la mousse de Corse. Bull. Soc. philom. (1804), p. 363.

Synopsis plantarum in Flora Gallica descriptarum. 1 vol. in-8°, Parisiis, 1806; — edit. sec., Vide Duby, *Botanicum Gallicum.*

Mémoire sur les Champignons parasites. Ann. du Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. IX (1807), pag. 56.

Mémoire sur le Cuviera *et quelques autres genres de* Rubiacées. — Ann. du Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. IX (1807), pag. 216.

Icones plantarum Galliæ rariorum. 1 fasc. in-4°, Parisiis, 1808, cum tab. æn. 50.

Mémoire sur le Drusa, *nouveau genre de la famille des* Ombellifères; impr. par ext. Bull. Soc. philom., 1808, p. 84; et en entier, Ann. du Mus. d'hist. nat., vol. X, p. 466.

Note de quelques plantes nouvelles trouvées en France. Bull. Soc. philom., 1808, p. 117.

Rapports sur les voyages botaniques et agronomiques, faits dans les déparments de l'Empire français; Mém. Soc. d'agric. de Paris. — Savoir :

Ouest, vol. X, p. 228 — 1807.
Sud-ouest, vol. XI, p. 1 — 1808.
Sud-est, vol. XII, p. 210 — 1809.
Est, vol. XIII, p. 203 — 1810.
Nord-est, vol. XIV, p. 213 — 1811.
Centre, vol. XV, p. 200 — 1812.

Réunis en 1 vol. in-8°, 1813.

Géographie agricole et botanique. Article du Nouv. Cours complet d'Agric. théorique et pratique, ou Dictionnaire raisonné et universel d'Agricul-

ture, 1re éd., vol. VI, p. 355 — 1809; 2e édit., vol. VII, p. 303 — 1822.

Note sur la cause de la direction des tiges vers la lumière. Mém. de la Soc. d'Arcueil, vol. II, p. 104 — 1809.

Note sur les Georgina *ou* Dahlia. Bull. de la Soc. libre des sciences et belles-lettres de Montpellier, vol. 5, p. 185; et Ann. du Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. XV, p. 307 — 1810.

Observations sur les plantes Composées ou Syngenèses. Trois mémoires: (*Composées*, *Cynarocéphales*, *Labiatiflores*). Ann. Mus. d'hist. nat. Paris, vol. XVI, p. 135 — 1810; vol. XIX, p. 59 et 181 — 1812. Bull. Soc. philom. (1811), p. 223 et 240; (1812), p. 166.

Mémoire sur le genre Chailletia. Ann. Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. XVII (1811), p. 153, et Bull. Soc. philom., p. 205.

Mémoire sur les Ochnacées *et les* Simaroubées. Ann. Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. XVII (1811), p. 398. — Ext. Bull. Soc. philom. (1811), p. 206.

Monographie des Biscutelles *ou* Lunetières. Ann. Mus. d'hist. nat., vol. XVIII (1811), p. 292.

Recueil des Mémoires sur la botanique, contenant les cinq articles précédents. 1 vol. in-4°, Paris, 1813, avec 54 planches.

Catalogus plantarum horti botanici Monspeliensis, additò observationum circa species novas aut non satis notas fasciculo. 1 vol. in-8°, Monspel., 1813.

Théorie élémentaire de la Botanique. 1 vol. in-8°, première édition, Montpellier, 1813; seconde édition, Paris, 1819. — Trad. en allemand par J.-J. Rœmer, avec des additions, 2 vol. in-8°, Zurich, 1814 et 1815.

Mémoire sur les Rhizoctones, *nouveau genre de champignons qui attaquent les racines des plantes, et en particulier celles de la luzerne cultivée.* Mém. Mus. d'hist. nat., vol. II (1815), p. 209.

Mémoire sur le genre Sclerotium, *et en particulier sur l'*Ergot *des Céréales.* Mém. Mus. d'hist. nat., vol. II (1815), p. 401. — Ext. Bull. Soc. philom., 1815, p. 169.

Mémoire sur la géographie des plantes de France, considérée dans ses rapports avec la hauteur absolue. Mém. de la Soc. d'Arcueil, vol. III, p. 262; 1817.

Considérations générales sur les Fleurs doubles, *et en particulier sur celles de la famille des* Renonculacées. Ibid., p. 385.

Mémoire sur le genre de champignons parasites nommé Xyloma. Mém. Mus. d'hist. nat., vol. III, p. 328; 1817.

Mémoire sur les genres de champignons parasites Asteroma, Polystigma *et* Stilbospora. Mém. Mus. d'hist. nat., vol. III, p. 328. Id.

Conjectures sur le nombre total des végétaux du globe. Bibl. univ. de Genève, VI, p. 119; 1817.

Regni vegetabilis Systema naturale. — 2 vol. in-8°. Parisiis, I, 1818; II, 1821.

Remarcks on two genera of plants to be referred to the family of the Rosaceæ, Kerria *and* Purskia. Trans. Lin. Soc. Lond., vol. XII (1818), p. 152. (En français avec le tit. anglais.)

Catalogue des arbres fruitiers et des vignes du jardin de Genève. In-8°, Genève, 1820.

Essai élémentaire de Géographie botanique. — Art. *Géographie botanique* du Dictionnaire des sciences natur., vol. XVIII (1820), p. 359; et à part, in-8°. — Ext. analyt. Bibl. univ., de Genève, XVI, p. 220 (1821).

Mémoire sur les affinités naturelles de la famille des Nymphéacées. — Mém. Soc. de phys. et d'hist. nat. Genève, vol. I (1821), p. 209.

Projet d'une flore physico-géographique de la vallée du Léman. — In-8°, Genève, 1821. — Bull. sc. nat., II, p. 179 (1824). *Extr.*

Instruction sur les Collections botaniques, à l'usage des voyageurs. In-8°, Genève, 1821.

Sur le Ginko biloba. Bibl. univ. de Genève, VII, p. 130 (1818).

Mémoire sur la famille des Crucifères. Mém. Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. VII (1821), p. 169.

Notice abrégée sur l'histoire et l'administration des Jardins botaniques. Art. *Jardins botaniques* du Dict. des sciences nat., vol. XXIV (1822), p. 165; et à part, in-8°.

Mémoire sur la tribu des Cuspariées. Mém. Mus. d'hist. nat. de Paris, vol. IX (1822), p. 139.

Premier rapport sur les Pommes de terre; Étude comparative du produit des variétés, in-8°, Genève, 1822; Bibl. univ. agric., VII, p. 275.

Memoir on the different species races and varieties of the genus Brassica, and of the genera allied to it, which are cultivated in Europa. Trans. Hortic. Soc. of London, (1re série) vol. V (1822), p. 1. — En français, Ann. d'agric. fse, 1822; (2e série) vol. XIX, p. 273, et Bibl. univ. agric., VIII, p. 191.

Mémoire sur la famille des Ternstroemiacées, *et en particulier sur le genre* Saurauja. Mém. Soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève, vol. I (2e part.), p. 393. — Ext. Bull. des sc. nat. II, p. 55 (1824).

Rapports et notices sur les plantes rares ou nouvelles qui ont fleuri dans le jardin botanique de Genève. Mém. de la Soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève :

1er rapp. — vol. I (2e part.), p. 431 — 1822;
2e rapp. — vol. II (2e part.), p. 125 — 1824;
3e rapp. — vol. IV (4e part.), p. 487 — 1830;
4e rapp. — vol. V (1re part.), p. 139 — 1832;
5e rapp. — vol. VI (1re part.), p. 209 — 1833;
6e rapp. — vol. VI (2e part.), p. 583 — 1834;
7e rapp. — vol. VII (2e part.), p. 265 — 1836;
8e rapp. — vol. IX (1re part.), p. 75 — 1841.

— Plusieurs de ces rapports lui sont communs avec son fils.

Mémoire sur quelques genres nouveaux de la famille des Buttnériacées. Mém. Mus. d'hist. nat., vol. X (1823), p. 97.

Discours de clôture d'un cours de Botanique agricole. In-8°, Genève, 1823; Bull. Soc. de la class. d'agr., avril 1823; Bibl. univ. agr., vol. VIII, p. 119.

Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis. In-8°, Parisiis, I, 1824; II, 1825; III, 1828; IV, 1830; V, 1836; VI, 1837; VII, 1838 et 39.

Note sur le feuillage des Cliffortia. Ann. des sciences nat., vol. I (1824), p. 447. — Ext. Bull. sc. nat., p. 213.

Note sur la place de la famille des Cucurbitacées, *dans la série des familles naturelles.* Mém. Soc. hist. nat. de Genève, vol. III (1825), p. 33.

Notice sur quelques genres et espèces nouvelles de Légumineuses. Ann. sc. nat., vol. IV, 1825, p. 90.

Mémoire sur les familles des Légumineuses. 1 vol. in-4°; Paris, 1825 et 26, avec 70 planches.

Plantes rares du jardin de Genève. In-fol. et in-4°, ouv. publié en 4 fasc.; Genève, I et II, 1825; III et IV, 1826; réunis en 1 vol., 1829, avec planches en couleur. — Extrait Bull. sc. nat., VI, p. 364; VII, p. 220; IX, p. 50, 1825 et 26.

Extrait d'un Mémoire sur le nouveau genre nommé Pictetia, *et sur ceux qui, comme celui-ci, avaient été confondus dans le* Robinia. — Bibl. univ. de Genève, vol. XXIX, p. 40, 1825. — Ext. Bull. des sc. nat., VI, p. 60.

Note sur le Trifolium Magellanicum. Ann. des sc. nat., vol. IV, p. 61; 1825. — Ext. Bull. sc. nat., VI, p. 379.

Notice sur la culture de l'Olivier. Bibl. univ. agric., vol. X, p. 3, 1825.

Premier Mémoire sur les Lenticelles *des arbres et le développement des racines qui en sortent.* Ann. des sc. nat., vol. VII, p. 5 (1826), p. 1.

Mémoire sur les genres Connarus *et* Omphalobium, *ou sur les* Connaracées Sarcolobées. Mém. de la Soc. d'hist. nat. de Paris, vol. II, p. 379; 1826.

Examen de la matière organique qui a coloré en rouge les eaux du lac de Morat. Mém. de la Soc. de phys de Genève, vol. III, part. 2, p. 29; 1826.

Note sur les Myrtacées. Art. Myrtacées du Dict. class. d'hist. nat., vol. XI, p. 399, — et à part, in-8°; Paris, 1827.

Revue de la famille des Lythraires (ou Salicaricées). Mém. de la Soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève, vol. III (2e part.), p. 65; Genève, 1826.— Ext. Bull. sciences nat., XIV, 357; 1828.

Cours de botanique, première partie : *Organographie végétale.* 2 vol. in-8°, Paris, 1827, avec 60 planches. — Trad. en allemand par M. Meissner, 2 vol. in-8°, Tubingue.

Notice sur la Botanique du Brésil. — Bibl. univ., vol. XXXVI, p. 204; 1827.

Revue de la famille des Portulacées. Mém. Soc. d'hist. natur. de Paris, vol. IV (1828), p. 174. — Ext. Bull. sc. nat., XVI, p. 430; 1828.

Mémoire sur le Fatioa, *genre nouveau de la famille de* Lythraires. Mém. Soc. helv. des sc. nat., vol. I, p. 97; 1829. — Ext. Bull. sc. nat., XVIII, p. 254. Ib.

Programme et rapport sur les Pépinières du canton de Genève. Bull. de la class. d'agric. de Genève, in-8°, 1822 et 1828.

Considérations sur la Phytologie ou botanique générale. Art. *Phytologie* du Dict. class. d'hist. nat., vol. XIII, p. 478, et à part, in-8°; Paris, 1828.

Mémoire sur la famille des Combretacées. — Mém. de la Soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève, vol. IV, p. 1, et à part; Genève, in-4°, 1828. — Ext. Bull. sc. nat., XX, p. 438; 1829.

Notes sur quelques plantes observées en fleurs dans la serre de M. Saladin, à Prégny. — Mém. Soc. phys. et hist. nat. de Genève, vol. IV, p. 85. — Ext. Bull. sc. nat. XVIII, p. 265; 1828.

Collection des Mémoires pour servir à l'histoire du règne végétal, publiée en 10 liv. in-4°; Paris, 1828-38.

- Ier. Mélastomacées. 1828, 10 pl. — Ext. Bull. sc. nat., XIV, p. 431.
- II. Crassulacées. 1828, 13 pl. — Ext. Bull. sc. nat., XVI, p. 93; 1828.
- III. Onagraires. 1829, 3 pl. — Ext. Bull. sc. nat., XVII, p. 240.
- IV. Paronychiées. 1829, 6 pl. — Ext. Ibid., p. 242.
- V. Ombellifères. 1829, 19 pl. — Ext. Bull. sc. nat., XIX, p. 59; 1830.
- VI. Loranthacées. 1830, 12 pl. — Ext. Bibl. univ., vol. XXIV, p. 303.
- VII. Valérianées. 1832, 5 pl.
- VIII. Cactées (esp. nouv. et peu connues). 1834, 12 pl.
- IX et X. Composées. 1838, 19 pl. et 4 tabl. — Ext. Ann. sc. nat. (2e série). Botan. vol. XIII, p. 123; 1840.

De l'état actuel de la Botanique générale. Revue française, vol. VIII, p. 33, avril 1829, et à part, in-8°.

*Notice sur l'*Aracacha *et quelques autres racines légumineuses de la famille des* Ombellifères. Bibl. univ., vol. XL, p. 74, et XLIX, p. 27; 1829 et 32.

Notice sur les différents genres et espèces dont les écorces ont été confondues sous le nom de Quinquina. Bibl. univ., vol. XLI, p. 144; 1829. — Ext. Flora, 1829, p. 539, et Bull. sc. nat., vol. XXI, p. 437; 1830.

Notice sur la racine de Cainca, *nouveau médicament reçu du Brésil.* Bibl. univ., vol. XLII, p. 243; 1829.

Notice sur la botanique de l'Inde orientale, et les encouragements que la compagnie anglaise lui a accordés. Bibl. univ., vol. XLII, p. 312; 1829.

Revue de la famille des Cactées, *avec des observations sur leur végétation et leur culture, ainsi que sur celles des autres plantes grasses.* Mém. Mus. d'hist. nat., vol. XVII, p. 1, avec 21 pl., à part, in-4°; Paris, 1829. — Ext. Bull. sc. nat., XVIII, p. 391; et dans le Flora, 1829, p. 626.

Résumé de quelques travaux récents sur le Maïs. — Bibl. univ., vol. XLIII, p. 80; 1830.

De quelques ouvrages récemment publiés sur la Botanique de la Lorraine. Bibl. univ., vol. XLIV, p. 260; 1830.

Notice nécrologique sur Jos. Balbis. — Bibl. univ., vol. XLVI, p. 214; 1831.

De quelques arbres très-anciens mesurés au *Mexique.* — Bibl. univ., vol. XLVI, p. 387; 1831.

Notice sur la *longévité des arbres* et les moyens de la constater. Bibl. univ., vol. XLVII, p. 49. Ib.

De l'influence atmosphérique sur le développement des arbres au printemps, Bibl. univ., vol. XLVIII, p. 382. Ib.

Revue de quelques ouvrages récemment publiés sur le genre *Saule* (salix). Bibl. univ., vol. XLIX, p. 15; 1832.

Notice sur la vie et les écrits de François Huber. Bibl. univ., vol. XLIX, p. 187. Ib.

Notice nécrologique sur G. Cuvier, sous le titre de : Mort de Cuvier. Bibl. univ., vol. XLIX, p. 442. Ib.

Notice sur les *progrès de la Botanique* en 1832. — Bibl. univ., vol. LII, p. 162, et Archiv. de Botaniq., vol. II, p. 22; 1833.

Note sur la *Division du règne végétal* en quatre grandes classes ou embranchements.

Végétaux ou vasculaires.	1° Dicotylédones ou exogènes. 2° Monocotylédones ou semi-vasculaires.
Cryptogames ou celluleux.	3° Æthéogames ou semi-vasculaires. 4° Amphigames ou cellulaires.

— Bibl. univ., vol. LIV, p. 259; 1833.

Notice historique sur la vie et les écrits de M. Desfontaines. Bibl. univ., vol. LV, p. 130; 1834, et Ann. sc. natur., 2e sér. Botan., vol. I, p. 129. Ib.

Instruction pratique sur les *Collections botaniques.* Bibl. univ., vol. LVI, p. 169. Ib.

Lettre à M. Stephens sur les maladies du *Mélèze* dans la Grande-Bretagne. Bibl. univ., vol. LVIII, p. 119; 1835.

Notice sur la *Géographie botanique de l'Italie.* Bibl. univ., vol. LIX, p. 193.

(Revue des ouvrages particuliers ou *Flores partielles* des différentes parties de l'*Italie.*)

Revue sommaire de la famille des Bignoniacées. — Bibl. univ. de Genève. (2e série) — vol. XVII, p. 117—1838; et Ann. sc. natur. (2e série). Bot. vol. XI, p. 279—1839.

Mémoire sur la famille des Myrtacées. — (Ouvrage posthume publié par son fils.) Mém. Soc. de phys. et d'hist. natur. de Genève. — vol. IX, p. 301 — 1842.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE

SUR LES

LUNETTES ACHROMATIQUES

A OCULAIRES MULTIPLES;

PAR M. BIOT.

Présenté à l'Académie des sciences, le 6 décembre 1841.

AVANT-PROPOS.

La question physico-mathématique qui fait l'objet de ce mémoire a beaucoup occupé les géomètres. Euler surtout y est revenu un grand nombre de fois, à mesure que la confection des instruments se perfectionnait; et il a fini par établir, dans son Traité de Dioptrique, des formules d'une élégance remarquable, où les conditions des systèmes optiques quelconques sont généralement exprimées, pour le cas d'un point rayonnant situé sur le prolongement de leur axe central. Néanmoins ces formules n'ont, je crois, jamais servi à devancer l'expérience pratique, ni même à compléter

les améliorations qu'elle atteignait, en fournissant des règles sûres et applicables pour les diriger. Car, à la vérité, on en a tiré assez facilement les conditions essentielles de l'oculaire achromatique à deux verres, pour le cas où l'image réelle doit se former entre eux, comme dans la construction due à Campani et à Huyghens. Mais lorsque cette image doit leur être antérieure, comme cela est nécessaire dans les instruments astronomiques destinés à contenir des fils micrométriques, la construction indiquée par Ramsden est restée, je crois, jusqu'ici un résultat d'expérience ; ou, du moins, les conditions de cette construction n'ont pas été déduites des formules assez généralement, comme avec assez d'évidence, pour servir à guider les artistes. Car la plupart d'entre eux, et jusqu'à Frauenhoffer lui-même, ont établi ce genre d'oculaire sur des proportions que la théorie montre être fautives, et incompatibles avec l'achromatisme qu'on en attend. Quant à l'oculaire triple, son action n'a pu être calculée ainsi que pour des suppositions particulières que l'expérience pratique réprouve. Enfin, lorsque le nombre des verres devient égal ou supérieur à quatre, le problème, envisagé comme le fait Euler, présente une indétermination que l'on ne voit aucun moyen de fixer. Aussi, personne, à ma connaissance, n'a jusqu'à présent réussi à déduire de ses formules les conditions théoriques des oculaires achromatiques pour ces cas complexes ; et les artistes les plus habiles ne sont parvenus à les construire, avec les qualités qu'ils possèdent dans les lunettes actuelles, qu'en se guidant sur des essais multipliés, qu'aucune expression théorique ne dirigeait.

Ce défaut d'applicabilité des formules d'Euler tient à deux

circonstances. La première, c'est qu'elles ne sont pas explicites, mais symboliques; c'est-à-dire, que les quantités littérales qui les composent n'expriment pas des éléments constitutifs de l'appareil que l'on puisse emprunter à la pratique et réduire en nombres immédiatement, pour en apprécier les effets directs. Elles représentent des résultats complexes, qui dérivent, à la vérité, de ces éléments primitifs, mais qu'il faut en conclure progressivement par des éliminations successives, dont l'effectuation algébrique devient bientôt impraticable par la complication qu'elle acquiert, pour peu que les verres assemblés se multiplient. De sorte qu'il devient alors impossible d'apprécier, ou même de conjecturer, l'influence des éléments primitifs sur le résultat final. La seconde circonstance défavorable, qui dérive en partie de celle-là, mais qui a aussi une autre cause plus cachée que j'indiquerai tout à l'heure, c'est que, dans ces cas complexes, les quantités qui restent analytiquement arbitraires dans les formules d'Euler, ne sont pas celles qui ont une influence déterminante sur les effets de l'instrument; de sorte qu'on ne peut pas se guider sur les résultats de l'expérience pour leur assigner les valeurs les plus convenables, ni pour assujettir immédiatement l'appareil complexe aux conditions essentielles qui assurent sa perfection.

La nouvelle forme d'analyse sous laquelle j'ai présenté la théorie des instruments d'optique, dans le premier volume de mon *Astronomie* récemment publié, se distingue de celle d'Euler par plusieurs caractères qui la rendent exempte des inconvénients que je viens de signaler. D'abord, elle est plus générale, en ce qu'elle s'applique aux points lumineux angulairement peu distants de l'axe central, comme à ceux qui

sont situés sur cet axe même. En second lieu, les résultats y sont explicites. Enfin, ce qui est le principe essentiel de son efficacité, tous les appareils, quels qu'ils soient, s'y trouvent uniquement définis par trois coefficients principaux, qui seuls déterminent leur action sur les rayons lumineux. On découvre ainsi avec évidence la cause fondamentale de l'imperfection dans laquelle cette théorie était jusqu'à présent restée. C'est que les distances focales des lentilles et leurs intervalles, dont on faisait dépendre les effets des appareils, ne les caractérisent pas individuellement, mais en se rassemblant par groupes dans ces trois coefficients principaux, qui seuls déterminent finalement les résultats. En sorte qu'il faut uniquement s'attacher à régler leurs valeurs, en les assujettissant à remplir les conditions de continuité et d'achromatisme, pour les réaliser ensuite par quelqu'une des combinaisons équivalentes qui sont aptes à les reproduire, et dont le choix plus ou moins favorable est indiqué par l'analyse même, ainsi que par les bons effets des instruments analogues déjà construits antérieurement.

La facilité avec laquelle ces nouvelles formules résolvaient les questions générales d'optique regardées jusqu'alors comme les plus complexes, m'avait fait espérer que la question des oculaires multiples deviendrait ainsi généralement accessible avec leur secours. Je n'avais rencontré, en effet, nul obstacle en les employant pour des oculaires à deux verres, considérés dans les circonstances les plus variées de leur application. Mais lorsque je voulus les étendre aux oculaires multiples, composés d'un nombre quelconque de lentilles, les termes qui paraissaient inévitablement devoir les composer, se multiplièrent dans une progression si rapide, que

je fus bien près de désespérer de cette tentative, à cause de l'excessive complication où elle conduisait.

Les inventeurs des méthodes nouvelles ont été souvent arrêtés dans leurs applications pour ne les avoir pas suivies avec assez d'assurance, préoccupés qu'ils étaient des formes anciennes auxquelles ils s'étaient habitués antérieurement. Malgré les avantages décisifs que j'avais trouvés, à définir les appareils optiques par les seuls coefficients principaux qui les caractérisent, je m'étais obstiné d'abord à introduire dans cette dernière recherche les distances focales principales des lentilles et leurs intervalles, comme on l'avait fait jusqu'alors, supposant que les expressions explicites dont je faisais usage rendraient les résultats assez évidents pour les pouvoir interpréter. Mais l'impossibilité de réussir par cette voie embarrassée, me ramena enfin à la véritable, qui était celle que je m'étais moi-même ouverte. Dès que j'y fus rentré, je reconnus dans les éléments du calcul même la sûreté de la marche que je suivais. Car toutes les quantités qui se présentaient analytiquement comme arbitraires, étaient précisément celles que l'expérience pratique emploie avec succès, sous des formes infiniment variées dans ces constructions : et l'on pouvait bien voir aussi, dans les formules, que c'étaient celles-là qui devaient influer le plus efficacement sur les résultats. Je fus ainsi conduit à reconnaître, non sans surprise, que toutes les conditions de continuité, de grossissement angulaire et d'achromatisme, dans un oculaire composé d'un nombre de lentilles quelconque, dépendent seulement, en définitive, de la résolution d'une simple équation du second degré, facile à former, à interpréter, et à traduire numériquement. Cette équation se réduit même au

premier degré, si l'on fait coïncider la première lentille oculaire avec le foyer de l'objectif.

Voici maintenant la marche qui m'a conduit à ce résultat si simple. Quel que soit le nombre des lentilles qui doivent composer l'oculaire total, je le décompose idéalement en deux systèmes partiels, séparés par un intervalle indéterminé, qui sera, par exemple, celui que l'on fait varier dans les lunettes polyaldes. En adoptant ce mode de partage, que je choisis pour sa simplicité, le système antérieur se composera seulement de deux lentilles, pouvant si l'on veut se réduire analytiquement à une seule; et le système postérieur contiendra toutes les autres en nombre quelconque que l'on voudra ajouter théoriquement à celles-là. Cette décomposition s'opère par mes formules, de même qu'un artiste démonte une lunette en séparant ses tuyaux, et avec la même facilité. Chacun des systèmes partiels ainsi spécifiés est défini complètement et uniquement par ses trois coefficients principaux; et il y a encore une autre indéterminée qui est la distance du premier verre de l'oculaire total à l'objectif, que je suppose achromatique, et dont la longueur focale est censée connue pour la distance actuelle des objets observés. Voilà donc, en tout, huit indéterminées dont on peut disposer; savoir, les six coefficients principaux, et les deux intervalles. On établit d'abord, entre ces éléments, les relations analytiques nécessaires pour exprimer que l'objectif, et les deux systèmes constitutifs de l'oculaire, agissent en succession, et avec continuité sur les mêmes pinceaux lumineux. Ces relations sont au nombre de trois; mais elles introduisent dans le calcul deux coefficients principaux de l'oculaire complexe, et le grossissement angulaire total, qui

n'y entraient pas jusqu'alors explicitement; de sorte que le nombre des indéterminées disponibles n'en est pas diminué. On écrit ensuite que les images finales produites par les pinceaux incidents de moyenne réfrangibilité, se forment en avant de la dernière lentille, à la distance convenable pour que l'observateur les perçoive nettement du point de l'axe central où l'on place le centre de la pupille; se réservant de constater que les foyers des autres couleurs ne s'éloigneront pas de ceux-là dans des proportions de distance trop exagérées. Cette condition de perception distincte devient plus simple à exprimer quand on suppose l'observateur infiniment presbyte, ce que je fais d'abord, comme on le pratique ordinairement. Enfin, on assujettit tout l'appareil à disperser les foyers de diverses couleurs sur des droites parallèles entre elles, dirigées aux points oculaires respectifs qui répondent à leurs réfrangibilités propres, en s'imposant l'obligation ultérieure que tous ces points soient répartis sur une très-petite portion de l'axe central postérieure à la dernière lentille. En effet, ceci ayant lieu, lorsque le centre de la pupille est placé au point oculaire moyen, l'étendue de cet organe lui permet de recevoir, dans une amplitude angulaire sensiblement égale, les axes des pinceaux qui se croisent dans tous les autres. Alors l'intervalle de ces points entre eux, étant fort petit, comparativement à la distance de l'œil où les pinceaux émergents se concentrent, ceux des foyers qui dérivent d'un même pinceau incident composé, paraissent se projeter les uns sur les autres, comme s'ils étaient dispersés sur une même droite visuelle, à des distances de l'œil peu inégales, ce qui recompose la sensation de la couleur primitive du point de l'objet d'où ils sont partis. Cette *dispersion rectiligne des*

foyers, comme je l'appelle, est le seul caractère d'achromatisme que l'on puisse assurer analytiquement aux oculaires multiples confectionnés avec une même espèce de verre, sans tomber dans des calculs inextricables. Et lorsqu'on parvient à l'opérer, en resserrant dans d'étroites limites l'inégalité de distance des foyers à l'œil, ainsi que la dispersion longitudinale des points oculaires, les effets obtenus se rapprochent de l'achromatisme parfait, autant qu'il est nécessaire pour l'observation.

La condition précédente étant établie, conjointement avec celle de la vision distincte, le nombre des indéterminées complétement disponibles dans le système total se réduit à six. L'équation du second degré d'où l'achromatisme dépend, peut alors être amenée à contenir seulement les six coefficients principaux des systèmes partiels, plus, une de ces indéterminées entièrement libre. Je choisis, pour cette association, celle d'entre elles qui règle la distance de l'image objective à la première lentille de l'oculaire. L'équation ainsi obtenue peut être simplifiée par des considérations d'approximation toujours admissibles, à la suite desquelles on revient, si l'on veut, aux déterminations rigoureuses. Je lui donne cette forme; et après l'avoir ainsi restreinte, je l'emploie immédiatement à constater l'état achromatique, plus ou moins exact, des oculaires déjà confectionnés par les procédés de la pratique habituelle.

Pour cela je prends un tel oculaire, dans les conditions d'application auxquelles il est destiné; c'est-à-dire, comme devant être approché à une certaine distance assignée de l'image, que projette le système objectif auquel l'artiste l'a adapté. Puis, mettant dans l'équation de l'achro-

matisme les six coefficients de ses systèmes partiels, je cherche si l'indéterminée indépendante qui règle cette distance doit avoir, dans l'état achromatique, la valeur qu'on lui attribue dans la construction. Si cet accord a lieu, l'instrument est bien réglé. S'il n'a pas lieu, la condition d'achromatisme n'est pas remplie dans la disposition d'intervalle que l'artiste a établie entre les deux systèmes partiels de son oculaire, non plus que pour le grossissement qu'il lui avait attribué. Je cherche alors quels auraient dû être ces deux éléments, et je les déduis de la valeur assignée par l'équation à l'indéterminée qui règle la distance de l'image objective à la première lentille oculaire. S'ils sont admissibles, ils indiquent l'augmentation ou la diminution que l'intervalle des deux systèmes partiels exige pour que l'oculaire soit rectifié. S'ils offrent une impossibilité physique, ou même quelque inconvénient d'emploi pratique, l'oculaire n'est pas rectifiable, ou ne l'est pas avantageusement.

J'ai appliqué cette épreuve à plusieurs oculaires quadruples, fabriqués par de très-habiles artistes, Ramsden, Dollond, Frauenhoffer, et reconnus pour être d'un excellent effet. Je n'en ai trouvé aucun qui fût complétement achromatique dans les dispositions d'intervalle et de grossissement que le constructeur avait fixées. Mais tous l'étaient pour des circonstances très-peu différentes ; de sorte que les effets observables d'après lesquels on les avait sans doute réglés, devaient être à peu près aussi satisfaisants dans les unes que dans les autres. J'ai, entre autres, éprouvé ainsi un excellent oculaire polyalde de Dollond, que possède un de nos plus habiles opticiens, M. Rossin, neveu et successeur de M. Cauchoix. Cet appareil avait été primitivement construit pour

être associé à un objectif achromatique, dont la distance focale principale était seulement un pied de Paris, ancienne mesure, ou 324mm,84. Ainsi employé, il produisait des grossissements variables depuis 20 unités jusqu'à 60, en modifiant l'intervalle des deux systèmes qui le composaient, ce qui est une étendue de course très-peu ordinaire. Les effets produits dans toute cette amplitude étaient sans doute satisfaisants, puisque un artiste aussi habile les avait admis; et M. Rossin s'est assuré qu'ils étaient encore tels, quand ce même oculaire était appliqué à un objectif ayant 965mm de longueur focale, conséquemment bien différent de celui auquel il avait été destiné. A la vérité, ces avantages n'y sont obtenus qu'avec l'admission de deux particularités qui en diminuent beaucoup le mérite. La première est une amplitude de champ rendue excessivement restreinte, afin que les effets soient encore tolérables à la plus forte limite du grossissement. La seconde consiste en ce que, pour atteindre cette limite, il faut, après avoir écarté convenablement l'un de l'autre, les deux systèmes partiels de l'oculaire, amener la première lentille de cet appareil en avant du foyer de l'objectif; de manière que l'image que celui-ci aurait dû former, devient virtuelle, de réelle qu'elle était auparavant. Cette disposition implique donc, qu'entre le plus faible et le plus fort grossissement, il y en ait un, pour lequel l'image objective vienne coïncider avec la première lentille oculaire, ce que l'on sait être un inconvénient grave; parce que les plus petites imperfections de la surface de cette lentille, ou les moindres poussières qui peuvent la couvrir, interceptent alors tout le pinceau qui forme son foyer au point où elles existent, de sorte qu'elles cachent complétement les points de l'objet

qui y correspondent. En éprouvant d'abord analytiquement l'état de l'appareil pour cette position, j'ai reconnu qu'il n'y était pas achromatique; résultat très-justifiable, puisqu'il était proche d'un des termes de sa course. Mais en cherchant ensuite le point précis où l'achromatisme avait lieu, je l'ai trouvé presque exactement intermédiaire entre ces deux termes, ce qui était en effet la combinaison la plus favorable pour que les résultats fussent aussi peu défectueux que possible sur toute l'étendue de course que l'appareil devait parcourir. Ainsi, dans cet exemple, comme dans ceux des oculaires à grossissement fixe que j'ai mentionnés d'abord, la pratique seule, aidée sans doute par les rectifications expérimentales qu'elle emploie toujours, avait conduit les artistes à rendre leurs appareils suffisamment achromatiques dans l'application moyenne, ou spéciale, pour laquelle ils les avaient préparés.

Mais cette vérification analytique, effectuée *à posteriori*, serait aussi insuffisante pour diriger la bonne exécution des oculaires multiples, que le sont les épreuves expérimentales qu'elle remplace. Le but réellement utile qu'on doit se proposer dans une question pareille, c'est de fixer *à priori* les circonstances qui assurent la bonté des constructions, et de les rassembler dans un type analytique général, que les artistes n'aient plus qu'à exécuter. Je suis parvenu à ce résultat inverse, pour les oculaires quadruples, en m'appuyant sur l'équation de l'achromatisme que je viens d'indiquer. Mais il a fallu préalablement en éclairer l'emploi par la discussion détaillée de toutes les circonstances physiques qui peuvent avoir une influence favorable ou défavorable sur les effets produits, et y introduire ensuite explicitement les cons-

tantes fondamentales desquelles dépend cette alternative.

Pour cela, je choisis un quelconque des pinceaux lumineux naturels, que l'objectif supposé achromatique concentre à son foyer ; et afin de profiter des indications que la pratique peut fournir, j'admets que l'image produite en ce foyer devra être antérieure à tout l'oculaire, comme cela a lieu dans l'application la plus générale des oculaires quadruples jusqu'à présent réalisés avec succès. Isolant alors, par la pensée, un des éléments homogènes de ce pinceau complexe, je le conduis successivement à travers toutes les lentilles, en discutant pour chacune d'elles, les conséquences favorables ou défavorables qui doivent résulter, tant de l'inclinaison de l'axe géométrique du pinceau, sur l'axe central du système, que de la position antérieure ou postérieure, distante ou proche, que la lentille considérée donnera au nouveau foyer, soit réel, soit virtuel, dans lequel elle le concentrera. Ici les indications fournies par la physique ou par l'analyse sont éprouvées, confirmées, étendues, par les exemples tirés des applications pratiques. On arrive ainsi à distinguer certaines quantités, dont la grandeur et le signe propre ont une influence déterminante sur les effets produits ; et en les recherchant dans les appareils reconnus pour les plus parfaits, on trouve que leurs valeurs y oscillent toujours dans des limites très-restreintes, autour de certaines moyennes que l'on peut déterminer numériquement. Ces quantités spécialement déterminatrices des résultats sont ce que j'appelle les *constantes fondamentales de l'oculaire*. J'en distingue quatre que je vais caractériser, en les désignant par les lettres que j'ai employées pour les exprimer. La première, m, règle la distance de l'image objective à la première lentille oculaire. Deux autres, μ, $\mu_{,}$,

déterminent les proportions dans lesquelles les deux premières lentilles de l'oculaire contribuent au grossissement total et positif N, la première négativement, la seconde positivement, comme les suivantes. Enfin, une quatrième quantité ω, en s'associant aux trois autres, assure la position du point oculaire moyen de tout le système, au delà de la dernière lentille, par conséquent hors de l'instrument; et elle détermine aussi la grandeur absolue de la distance à laquelle on juge convenable de l'en éloigner. Ces nouvelles constantes remplacent donc déjà quatre des six indéterminées primitives que le problème comporte. Je profite des deux qui restent encore libres, pour astreindre les deux dernières lentilles à contribuer dans une proportion égale au grossissement N qu'elles doivent compléter; et pour faire aussi que le second système partiel qui en résulte, étant associé au premier déjà préparé, opère l'achromatisme du système total, en satisfaisant à l'équation établie plus haut pour exprimer cette condition. Ce dernier effet ne peut être exprimé analytiquement qu'en substituant les nouvelles constantes dans l'équation, à la place des coefficients principaux qu'elle renfermait, et en y introduisant aussi une certaine fonction des éléments propres au second système partiel, laquelle je désigne par u''. Or, ces deux opérations qui sembleraient être très-complexes, s'exécutent avec beaucoup de facilité, en profitant d'une circonstance qui les simplifie par une approximation toujours applicable; et il en résulte aussi que l'indéterminée u'', seule inconnue dans le calcul, n'y entre plus qu'à la première puissance, parce que le terme en u''^2 qui devrait s'y montrer, est affecté d'un coefficient toujours négligeable dans le même ordre d'approximation. L'équation

finale en u'', ainsi restreinte est donc linéaire; et, en outre, tous les termes qui la composent, sont explicitement fonctions des seules constantes fondamentales qu'on a adoptées. Sa résolution, toujours très-simple, donne donc la valeur de u'' qui, associée à ces constantes, détermine l'achromatisme du système total; et cette valeur introduite dans les expressions des coefficients principaux du second système partiel, achève de les déterminer. Alors l'oculaire quadruple est entièrement connu, et il possède toutes les conditions de perfection qu'on a voulu lui communiquer.

Les diverses opérations de calcul que je viens d'indiquer, peuvent être effectuées analytiquement, en conservant aux quatre constantes fondamentales la généralité de leurs expressions littérales, et employant aussi u'' sous cette forme, avec la condition que ses valeurs particulières devront être déduites de l'équation qui la lie à ces constantes, quand celles-ci seront spécialisées. J'obtiens ainsi un type analytique général qui comprend toutes les constitutions possibles d'oculaires quadruples achromatiques, ayant leur point oculaire extérieur, donnant des images droites des objets par une seule inversion, et produisant le grossissement angulaire N, pour la distance focale donnée Δ' du système objectif, suivant le mode de répartition le plus avantageux que cette nature d'appareils puisse admettre. Tous les éléments, tant algébriques que physiques, qui constituent ce type, deviennent facilement expressibles en fonction des quatre constantes fondamentales, de u'', de Δ' et de N. Mais dès que N s'élève seulement à 20 ou 30 unités, ces deux dernières quantités n'y entrent plus sensiblement que par leur rapport $\frac{\Delta'}{N}$. Je forme ces

expressions, et je les rassemble dans un tableau qui présente explicitement, avec toute la généralité algébrique, les six coefficients principaux des systèmes partiels, les distances focales principales des lentilles, leurs intervalles, le lieu ainsi que l'ouverture des diaphragmes qu'on doit insérer entre elles; enfin, la distance de la première lentille postérieurement à l'image objective, et la distance où il faut placer le centre de la pupille au delà de la dernière. De sorte que, pour réaliser une application quelconque de ce type général, il ne faut que mettre dans ses symboles les valeurs particulières que l'on veut attribuer aux quatre constantes fondamentales, et leur associer la valeur de u'' qui en dérive. C'est ce que j'ai fait pour trois cas que j'ai choisis comme exemples. Les constitutions d'oculaires qui en ont résulté, quoique sorties du même type analytique, se sont trouvées différer notablement dans leurs détails; les unes se rapprochant des formes adoptées par Frauenhoffer, d'autres étant plus analogues à celles que Ramsden a employées dans une excellente lunette terrestre appartenant à l'observatoire de Padoue, et qui a été décrite par M. Santini. Aussi avais-je à dessein donné aux quatre constantes fondamentales des valeurs peu différentes de celles que je leur avais reconnues dans ces constructions, les plus parfaites que l'art des opticiens ait jusqu'à présent réalisées. De sorte que si les appareils qui en dérivaient devaient avoir avec ceux-là quelque dissemblance, elle ne pouvait résulter que d'une disposition plus favorable du second système partiel, soit comme complétant mieux l'achromatisme du système entier, soit comme faisant concourir les deux dernières lentilles dans une proportion plus égale à la production du grossissement total N. Ainsi, dans ces exemples,

la seule réalisation numérique des formules découvre et donne directement, avec des additions de détail qui les améliorent, ces combinaisons éminemment favorables que la pratique n'avait jusqu'à présent obtenues que par de nombreux essais habilement dirigés. Elles pourront, sans doute, en fournir une infinité d'autres non moins avantageuses, en variant convenablement les valeurs des constantes qu'elles renferment, selon les circonstances spéciales auxquelles on voudra approprier les instruments; et la nature de ces variations se présentera aisément d'après les effets mêmes qu'on veut leur faire produire.

J'ai profité de ces applications pour constater, en quelque sorte matériellement, l'exactitude du principe d'approximation, par lequel j'avais réussi à simplifier l'équation d'achromatisme mise sous la nouvelle forme qui en permet l'emploi direct. Dans cette vue, j'ai donné au grossissement angulaire N les plus faibles valeurs auxquelles on puisse avoir l'occasion de le réduire dans des oculaires quadruples, cette circonstance étant la moins favorable à l'emploi du principe dont il s'agit. Les combinaisons qui en sont résultées se sont trouvées satisfaire à l'équation primitive dont cette seconde dérive, pour ces mêmes valeurs assignées de N, à une petite fraction d'unité près, ce qui n'a aucun inconvénient pratique. Car le grossissement qu'un instrument doit produire, n'a jamais besoin d'être prescrit avec une telle rigueur, qu'on n'y puisse admettre de si petites différences; et d'ailleurs les erreurs de l'exécution, ainsi que les dernières rectifications expérimentales auxquelles il faut toujours définitivement recourir, devront en produire de cet ordre, ou même de plus grandes. Ceci achève donc de légitimer l'emploi qu'on

pourra faire de l'équation d'achromatisme, réduite à cette forme simple, pour compléter la détermination du second système partiel.

Enfin, il restait à effectuer une dernière vérification très-importante. C'était de savoir si le type général, réalisé avec les valeurs des quatre constantes qui peuvent être physiquement admises, donnerait toujours des combinaisons dans lesquelles la dispersion longitudinale des foyers de diverses couleurs se trouverait contenue entre des limites suffisamment restreintes, et dans lesquelles aussi les points oculaires propres aux diverses réfrangibilités seraient concentrés sur une étendue très-petite de l'axe central. Il aurait été difficile de réaliser cette épreuve sur les expressions complétement littérales du type analytique; mais il suffisait de la faire sur les cas moyens et extrêmes qu'on en déduit, en donnant aux constantes fondamentales les amplitudes de variations très-restreintes qu'elles peuvent recevoir. J'ai donc employé pour cela les trois types particuliers que j'en avais déduits, et qui correspondent précisément à ces circonstances. Or, les deux sortes de dispersion que je viens de spécifier s'y sont trouvées non-seulement négligeables, mais si petites, qu'elles pouvaient à peine s'apprécier; d'où l'on doit conclure qu'elles seront toujours insensibles dans les applications, tant qu'on ne fera pas sortir les constantes fondamentales des limites de valeurs entre lesquelles le raisonnement et l'expérience prescrivent de les renfermer.

Je m'étais proposé dans ce travail de composer des formules qui donnassent des directions générales, certaines, immédiatement réalisables, pour construire directement des oculaires quadruples doués de toutes les perfections qu'on

peut exiger à ces appareils, quand on considère seulement les rayons qui les traversent sous de très-petites inclinaisons à leur axe central. Je viens d'exposer la marche générale qui m'a conduit à ce but. Je vais maintenant développer les calculs analytiques et numériques qui m'ont été nécessaires pour l'atteindre.

PARTIE ANALYTIQUE.

§ I. — PRÉLIMINAIRES.

1. Je me fonde sur les formules que j'ai établies dans le premier volume de mon Astronomie, pour calculer le mouvement des rayons lumineux qui rencontrent successivement un nombre quelconque de surfaces sphériques, réfringentes ou réfléchissantes, disposées sur un même axe central, autour duquel ils n'éprouvent que de très-petites inflexions. Dans le second volume du même ouvrage, j'ai restreint ces formules aux instruments purement dioptriques, agissant dans l'air. Alors le mouvement de transport des éléments lumineux s'opère à travers toutes les surfaces dans un même sens, suivant leur rang ordinal de succession, en commençant par la première qui appartient au système objectif, et finissant par la dernière du système oculaire. En outre, la vitesse d'incidence u de chaque rayon homogène devient égale à sa

vitesse d'émergence finale u_m, à cause de l'identité des milieux extrêmes; et, par un motif pareil, le rayon reprend ces mêmes vitesses de deux en deux surfaces, lorsqu'il se trouve entre les intervalles de deux lentilles consécutives. Ce retour périodique aux mêmes vitesses permet de simplifier les formules relatives aux milieux quelconques, en contractant de moitié le nombre de leurs termes, et j'ai donné les expressions explicites de leurs coefficients généraux ainsi réduits; alors la vitesse, qui devient périodiquement constante pour chaque rayon, est prise pour unité, et les vitesses intérieures aux lentilles se trouvent exprimées par l'indice de réfraction propre au même rayon lorsqu'il passe de l'air dans le verre dont chaque lentille est faite.

2. Pour définir les inflexions successives que les rayons éprouvent en traversant les lentilles assemblées, je rapporte généralement les points de l'espace à trois axes de coordonnées rectangulaires xyz, dont le premier, celui des x, coïncide avec l'axe central du système. Afin de fixer les idées, je supposerai que ce système est situé tout entier du côté des x positifs, la première surface de l'objectif se trouvant la plus voisine de l'origine, et la dernière de l'oculaire en étant la plus distante. Alors le mouvement des éléments lumineux les portera toujours vers l'extrémité positive de l'axe des x. La direction actuelle de chaque rayon, dans les différentes phases de sa route, se caractérisera par les angles qu'il forme alors avec les axes des y et des z, angles que je compterai constamment à partir des extrémités positives de ces axes, en allant vers l'extrémité positive des x. Puisque les inflexions des rayons autour de l'axe central seront toujours maintenues très-petites, les angles ainsi comptés devront toujours être

très-peu différents de 90°. Dans la limite d'approximation à laquelle nos formules s'appliquent, les ouvertures efficaces de toutes les surfaces offertes au trajet des rayons, doivent être assez restreintes pour que les sinus verses des ordonnées d'incidence successives puissent être supposés négligeables comparativement à ces mêmes ordonnées. Alors, si l'on forme une coupe diamétrale du système par le plan des xz, les traces des diverses surfaces, sur ce plan, devront s'exprimer par de simples lignes droites, dans l'amplitude d'ouverture où leur action s'exerce. C'est ce que l'on a fait dans les figures 1 et 2, où les traces des surfaces extrêmes sont seules indiquées, la première ayant pour ouverture efficace L_1L_1 et son centre de figure en A_1; la dernière ayant pour ouverture efficace L_mL_m et son centre de figure en A_m. L'indice m signifie que m est leur nombre total. On a été obligé d'exagérer considérablement les ouvertures dans le dessin, pour pouvoir rendre sensibles les diverses situations des points et des lignes que nous aurons besoin d'y décrire; mais il faut toujours les supposer restreintes dans le calcul aux conditions de limites qui viennent d'être assignées. Il en sera de même des inflexions angulaires des rayons autour de l'axe central, que nous serons obligés de figurer beaucoup plus grandes que le calcul ne les admet.

3. J'attache aux coordonnées d'incidence et d'émergence sur chaque surface, les mêmes indices numériques qui marquent son rang ordinal dans la série entière. Ainsi, y_1 et z_1 désigneront les coordonnées latérales d'incidence sur la surface antérieure L_1L_1 de l'objectif; et y_mz_m seront les coordonnées analogues sur la dernière surface L_mL_m de l'oculaire, pour le rayon auquel appartiennent y_1 et z_1. Quant aux élé-

ments angulaires, je désignerai d'abord par Y, Z les angles primitifs formés avec les axes des y et des z, par chaque rayon incident; et j'attacherai ensuite aux angles analogues qui en dérivent l'indice ordinal de la surface qui les a produits. Ainsi, dans cette notation, Y_m, Z_m désigneront les angles d'émergence finale dérivés de Y et de Z pour chaque rayon incident homogène que l'on aura considéré. Si l'on veut avoir le troisième angle X_i formé par le même rayon avec l'axe des x, en un point quelconque de sa route, on l'obtiendra aisément par la relation générale

$$\sin^2 X_i = \cos^2 Y_i + \cos^2 Z_i,$$

où l'on voit que $\cos Y_i$ et $\cos Z_i$ étant toujours maintenus très-petits dans l'ordre de l'approximation à laquelle on se borne, $\sin X_i$ sera du même ordre qu'eux, et pourra ainsi, au besoin, être remplacé par l'angle X_i lui-même, ou par sa tangente, lorsqu'il ne se trouvera pas affecté de diviseurs du même ordre de petitesse que lui.

4. Ceci convenu, les conditions d'incidence d'un rayon quelconque seront définies par ses coordonnées latérales d'incidence antérieure y_1, z_1, jointes aux angles Y, Z, qu'il forme alors avec les deux axes latéraux correspondants à ces coordonnées. Et ses conditions d'émergence finale le seront par ses coordonnées latérales y_m, z_m, prises sur la dernière surface du système, jointes aux angles Y_m, Z_m, qu'il forme avec les mêmes axes, en rentrant dans l'air après avoir subi son action. Or, les relations des éléments définitifs avec les éléments primitifs, se concluent des formules établies p. 417 du tome premier de mon Astronomie, en y faisant $u = u_m = 1$, pour exprimer que les vitesses d'incidence, ainsi que d'émer-

gence de chaque rayon considéré, sont égales entre elles, et prises ici pour unité. On a alors, par ces formules :

$$\cos Y_m = N \cos Y + P y_1, \qquad \cos Z_m = N \cos Z + P z_1,$$
$$y_m = Q \cos Y + R y_1, \qquad z_m = Q \cos Z + R z_1,$$

les quatre coefficients N, P, Q, R, étant toujours assujettis à la relation

$$NR - PQ = 1.$$

Dans chaque système donné de surfaces et de milieux interposés entre elles, ces coefficients sont uniquement fonctions des pouvoirs réfringents qu'elles exercent, et des intervalles qui les séparent. Les éléments primitifs d'incidence n'y entrent pour rien. Ces quatre coefficients sont ainsi communs, dans chaque système, à tous les rayons de même nature, sur lesquels ces pouvoirs sont égaux. J'ai donné, dans le passage cité, leurs expressions explicites en fonction des éléments constitutifs du système, expressions que j'ai ensuite contractées en restreignant leur application aux systèmes purement dioptriques, où elles ne contiennent plus alors que les rayons de courbure des lentilles, leurs épaisseurs, leurs intervalles et leurs indices de réfraction pour chaque réfrangibilité considérée. Mais ici, nous n'avons pas encore besoin de ces développements, et il nous sera plus commode de conserver idéalement au système sa constitution générale, sauf l'identité de valeur ainsi que de sens des vitesses extrêmes que nous y introduisons pour spécifier les circonstances extérieures dans lesquelles il agit.

5. Considérons maintenant un pinceau de rayons homogènes, tous émanés d'un même point lumineux antérieur au système, et traversant ensemble les surfaces successives, puis

faisant leur émergence simultanée par la dernière. La position de ce point sera définie, si l'on donne ses coordonnées latérales b, c, analogues à y, z; et, en outre, sa distance $+\Delta$, mesurée parallèlement à l'axe des x, *au devant* de la surface antérieure d'incidence considérée comme plane. Dans les conditions d'approximation que nous avons admises, tous les rayons émergents de ce pinceau se dirigeront finalement vers un point focal unique, dont la position se trouvera également définie, si l'on assigne ses coordonnées latérales y_f, z_f, ainsi que sa distance à la dernière surface, mesurée aussi parallèlement à l'axe central; distance que j'exprimerai par $+\Delta_f$, en la considérant comme positive, si elle est antérieure à cette surface, et comme négative si elle lui est postérieure. Or, d'après ce qui est démontré pages 452 et 454 du volume cité, ces éléments déterminatifs du point focal sont donnés par les expressions suivantes, où je fais seulement $u = u_m = 1$ pour les approprier à l'identité des milieux extrêmes :

$$\frac{1}{\Delta_f - H} = NP + \frac{N^2}{\Delta}, \qquad y_f = \frac{b}{N + P\Delta}, \qquad z_f = \frac{c}{N + P\Delta},$$

H est une quantité auxiliaire dont la valeur est

$$H = \frac{Q}{N};$$

H est le Δ_f des points rayonnants qui seraient situés dans la surface antérieure de l'objectif considérée comme plane. Cela se voit par les expressions générales des coordonnées focales en y supposant Δ nul. Ainsi les rayons incidents homogènes qui traversent la première surface de l'objectif à son centre de figure, ont leur foyer final sur l'axe central même à la distance H de la surface d'émergence finale, en avant d'elle si H est positif, au delà s'il est négatif. Dans ce dernier

cas, le centre de la pupille peut se placer à ce foyer, puisqu'il est extérieur à l'appareil; et alors elle reçoit tous les axes géométriques des pinceaux incidents, quand même on supposerait son ouverture réduite à un point unique. Ceci n'a plus lieu quand le foyer des rayons à incidence centrale est antérieur à l'instrument. Mais, s'il n'y est que très-peu enfoncé, le résultat physique est à peu près le même, parce que l'ouverture sensible de la pupille lui permet encore de recevoir presque tous les axes admissibles qui s'y sont croisés. C'est pourquoi, dans la préparation théorique des instruments, on doit toujours exiger que H soit, ou négatif, ou très-petit s'il est positif. L'importance de ce point focal des axes des pinceaux m'a fait lui donner un nom tiré de son usage physique, et je l'ai appelé le *point oculaire* des instruments. J'ai dû rappeler ici ses propriétés, ainsi que l'expression qui le détermine, parce que nous serons obligés de régler ses valeurs dans les applications, de manière qu'elles satisfassent aux conditions que je viens d'exposer; et ce sera un des résultats dont il nous sera le plus essentiel d'assurer analytiquement la réalisation.

6. Lorsque le point lumineux s'éloigne à l'infini au-devant de la surface d'incidence, en restant compris dans l'amplitude conique qui permet aux rayons qui en émanent de pénétrer dans l'appareil sous les conditions de notre approximation, Δ devient infini, et les coordonnées latérales b, c le deviennent également, du moins en général; car il n'y aurait d'exception que si le point considéré restait mathématiquement sur l'axe central lui-même. Cette circonstance s'introduit sans difficulté dans l'expression de Δ_f, où elle fait seulement évanouir le terme du second membre qui est divisé par Δ, de

sorte que cette valeur particulière de Δ_f représente *la distance focale principale* du système que je désignerai spécialement par F. En la déduisant de cette expression, réduite par l'équation de condition établie plus haut entre les quatre coefficients, on trouve

$$F = \frac{R}{P}.$$

Mais les expressions générales de y_f et z_f ont besoin d'être modifiées pour s'appliquer à ce même cas, à cause des termes infinis qui s'introduisent alors dans leur numérateur et leur dénominateur. On les évite en y remplaçant les coordonnées latérales b, c par leurs valeurs en fonction des éléments angulaires qui fixent la direction primitive des rayons considérés. En effet, on a évidemment dans notre notation

$$\frac{y_1 - b}{\Delta} = \cos Y, \qquad \frac{z_1 - c}{\Delta} = \cos Z.$$

Si l'on prend les valeurs générales de b et c, dans ces équations, et qu'on les substitue dans y_f et z_f, on peut ensuite y faire Δ infini sans difficulté. Les désignant donc alors par y_F, z_F pour ce cas spécial, et les réunissant à F que nous venons d'obtenir, on a

$$F = \frac{R}{P}, \qquad y_F = -\frac{\cos Y}{P}, \qquad z_F = -\frac{\cos Z}{P}.$$

Ce sont là les coordonnées focales d'un faisceau de rayons homogènes qui s'introduisent dans le système en faisant primitivement les angles Y, Z, avec les deux axes latéraux.

7. Le cas où N serait nul semble introduire aussi une difficulté analytique dans l'expression générale de Δ_f; mais elle disparaît en y introduisant R, au moyen de l'équation de condition entre les quatre coefficients généraux. Pour cela, il faut d'abord dégager explicitement Δ_f de cette expression;

puis, en profitant de l'équation citée, après avoir réduit tous ses termes à un même dénominateur, on la débarrasse d'un facteur commun N, et il reste généralement

$$\Delta_f = \frac{Q + R\Delta}{N + P\Delta}.$$

Alors on peut y faire impunément N nul, sans que l'expression cesse d'être applicable. Elle reproduit d'ailleurs les valeurs trouvées précédemment pour les cas de Δ nul et infini.

Lorsque le système considéré se réduit à une seule lentille infiniment mince, dont la distance focale principale est f_1, les quatre coefficients principaux ont les valeurs suivantes :

$$N = +1, \qquad Q = 0, \qquad P = \frac{1}{f_1}, \qquad R = +1;$$

il en résulte donc

$$\Delta_f = \frac{f_1\Delta}{f_1 + \Delta};$$

ou, inversement,

$$\frac{1}{\Delta_f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{\Delta}.$$

C'est la formule connue pour le cas dont il s'agit.

8. Les expressions générales de y_f et de z_f, montrent que les foyers homogènes de chaque point rayonnant se forment tous dans le plan diamétral mené par ce point et par l'axe central du système. Lorsque $N + P\Delta$ est positif, y_f est de même signe que b; z_f de même signe que c; et le foyer se trouve situé du même côté de l'axe central que le point rayonnant. Si, au contraire, $N + P\Delta$ est négatif, les résultats sont inverses, et le foyer se forme du côté de l'axe opposé à celui où existe le point rayonnant dont il dérive. Or, dans l'usage pratique de l'instrument, les images finales devant être amenées au-devant de l'observateur, chaque foyer est vu par lui dans ces mêmes situations relatives que leur donne le signe de la

fonction $N + P\Delta$. Donc, lorsque l'instrument est employé pour l'observation, si $N + P\Delta$ est positif, il donne des images droites des objets; et si $N + P\Delta$ est négatif, il les donne renversées.

9. Maintenant, l'équation qui donne Δ_{f} peut être mise sous cette forme

$$\frac{\Delta}{\Delta_{f} - H} = N(N + P\Delta).$$

Avec les instruments *purement dioptriques*, Δ est toujours positif dans l'observation, parce que les objets observés sont toujours placés en avant de l'œil et de la surface d'incidence. En outre, le point oculaire devant être en coïncidence avec le centre de la pupille s'il est extérieur, ou très-peu au-devant d'elle s'il est intérieur, l'image, amenée à la distance qui est nécessaire pour la vision distincte, se trouve toujours en avant de ce point; de sorte que $\Delta_{f} - H$ est positif alors, comme l'est Δ. Ainsi le premier membre de notre équation transformée se trouve entièrement positif. Il faut donc, pour qu'elle puisse être satisfaite, que les deux facteurs qui composent le second membre soient de même signe entre eux. Appliquant alors au facteur N les mêmes alternatives de signe que nous avons reconnues tout à l'heure pour $N + P\Delta$, il en résulte que si l'instrument, *supposé purement dioptrique,* donne des images droites, le coefficient N y est positif, et, s'il donne des images renversées, N est négatif. Il faudra donc lui attribuer l'un ou l'autre de ces signes dans les calculs, selon le sens d'effets que l'on voudra produire; et si sa valeur résulte de combinaisons analytiques, elle devra se présenter ainsi affectée pour que l'instrument se conforme à la destination qu'on aura voulu lui assigner. Il était indispensable que je rappelasse ces conditions,

parce que nous devrons en faire une application continuelle.

10. En général, les quatre coefficients N, P, Q, R, déterminant à eux seuls la marche des rayons dans les instruments que nous aurons à considérer, leur influence se manifestera sans cesse sur les effets que nous en attendons. C'est pourquoi je vais en donner ici l'interprétation géométrique, qui nous deviendra dans la suite très-utile pour concevoir précisément l'influence spéciale que chacun d'eux exerce, et pour nous éclairer sur le choix des valeurs qu'il conviendra de leur faire prendre, tant dans chaque instrument selon son but, que dans les systèmes partiels dont nous voudrons les composer.

Je reprends donc, sous ce point de vue, les formules générales

$$\cos Y_m = N \cos Y + P y_1, \qquad \cos Z_m = N \cos Z + P z_1,$$
$$y_m = Q \cos Y + R y_1, \qquad z_m = Q \cos Z + R z_1,$$

en y joignant l'équation de condition qui les accompagne

$$NR - PQ = 1.$$

Les opérations que nous aurons ici à faire s'appliqueront toutes à des rayons dont l'incidence primitive se sera opérée dans un plan diamétral du système, ce qui les maintiendra dans le même plan pendant tout leur trajet à travers l'appareil. Choisissons-le donc pour plan des x, z. Les éléments primitifs y_1, $\cos Y$, seront alors tous deux nuls pour de tels rayons, ce qui rendra en effet y_m et $\cos Y_m$ constamment nuls l'un et l'autre, comme nous venons de le prévoir. Ainsi nous n'aurons plus à employer que le couple d'équations relatif au plan des x, z, où se meuvent les rayons lumineux que nous allons considérer.

Mais alors ces dernières équations peuvent encore se modifier de manière à rendre leur interprétation plus facile. En effet, puisque cos Y et cos Y_m sont constamment nuls, cos Z devient égal à sin X, et cos Z_i à sin X_i, X_i désignant en général l'angle que le rayon lumineux considéré forme successivement avec l'axe central dans ses diverses inflexions. On a donc alors :

$$\sin X_m = N \sin X + Pz_1,$$
$$z_m = Q \sin X + Rz_1,$$

avec la relation toujours subsistante,

$$NR - PQ = 1.$$

Comme les quatre coefficients N, P, Q, R, ne dépendent pas des éléments d'incidence z_1 et X, leur signification et leur construction générales pourront s'obtenir en considérant des circonstances particulières qui seront les plus propres à manifester leurs effets. Je commence, en conséquence, par supposer z_1 nul, ce qui limite l'application aux seuls rayons lumineux qui percent la première surface du système à son centre de figure A, comme on le voit fig. 1. Alors, en désignant par l'indice antérieur c les éléments tant d'incidence que d'émergence qui sont relatifs à un tel cas, les deux équations qui les lient ensemble seront :

$$\sin {}_cX_m = N \sin {}_cX,$$
$${}_cz_m = Q \sin {}_cX;$$

de sorte qu'elles ne nous présenteront plus que les deux coefficients N et Q, à interpréter isolément.

11. Soit SA_1 fig. 1, un rayon incident homogène mené sous ces conditions. Je le place autour de l'axe, de manière que son angle ${}_cX$ ait une valeur positive, prenant ce cas comme type des raisonnements. Soit ${}_cI_m R_m$ le rayon finale-

ment émergent qui en dérive, lequel formera avec l'axe l'angle ${}_{\epsilon}X_m$. Cet angle pourra se trouver placé du même côté de l'axe que l'angle ${}_{\epsilon}X$, ou en sens contraire; il pourra aussi être plus grand ou moindre. Ces deux circonstances dépendront de la constitution du système considéré. Mais, dans chaque système, elles seront marquées par le signe et par la valeur du coefficient N, puisqu'il exprime généralement le rapport de sin ${}_{\epsilon}X_m$ à sin ${}_{\epsilon}X$. Il définit ainsi complétement le premier de ces angles, tant pour sa position que pour sa grandeur, lorsque ${}_{\epsilon}X$ dont il dérive est donné avec ces deux spécifications. C'est pourquoi j'ai appelé ce coefficient N le *grossissement angulaire.*

Il ne faut pas toutefois attacher à cette expression un sens absolu, entraînant l'idée d'une amplification physique qui serait toujours opérée dans l'angle ${}_{\epsilon}X$. Il y a en effet amplification, lorsque le nombre N positif ou négatif surpasse l'unité, comme cela a généralement lieu dans tous les instruments employés aux usages optiques, si l'on considère chacun d'eux dans son ensemble; car l'amplification effective est toujours un des résultats qu'on en exige. Mais il y aura diminution si le coefficient N devient une fraction positive ou négative moindre que l'unité. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans les deux systèmes binaires qui composent les oculaires quadruples des lunettes polyaldes, et aussi ceux des lunettes terrestres ordinaires, où les mêmes systèmes binaires existent, mais fixes relativement l'un à l'autre. Le passage de l'amplification à la diminution se présente lorsque $N = 1$, auquel cas tout rayon homogène à incidence centrale produit un rayon émergent qui lui est parallèle. Cela aurait lieu ainsi, par exemple, dans un système composé de lentilles in-

finiment minces, agissant dans l'air et toutes rassemblées en contact, de manière que l'épaisseur totale du système pût être censée insensible. Car alors, tout rayon incident central SA_{I} faisant son incidence et son émergence dans des points infiniment rapprochés, où les plans tangents aux surfaces réfringentes seraient parallèles entre eux, il n'en éprouverait aucune déviation finale; de sorte que ${}_cX_m$ serait toujours égal à ${}_cX$. Mais ce parallélisme d'émergence et d'incidence peut encore être opéré par beaucoup d'autres combinaisons.

Enfin, on peut concevoir des combinaisons où N serait nul, et alors l'angle ${}_cX_m$ serait toujours nul, quel que fût ${}_cX$; c'est-à-dire, que tous les rayons incidents qui auraient percé l'objectif à son centre de figure, sortiraient du système suivant des directions parallèles à son axe central, comme le représente la figure 2. Ce cas se réalise quelquefois dans l'amplitude de course que parcourent les oculaires des lunettes polyaldes, comme je le montrerai plus loin. Mais on verra qu'il convient de l'éviter, et je ne le cite que comme exemple.

12. Reprenons maintenant la fig. 1, et considérons l'ordonnée d'émergence $A_m\,{}_cI_m$ ou ${}_cz_m$. Je l'ai placée du côté de l'axe central où les z sont positifs, parce que je prends ce cas comme type des raisonnements. Mais son signe propre, ainsi que sa grandeur, pour un angle donné ${}_cX$, dépendent de la constitution du système que l'on considère; et elles sont fixées dans chacun d'eux par le coefficient Q qui exprime le rapport de ${}_cz_m$ à sin ${}_cX$. On voit par là que sin ${}_cX$ étant un nombre abstrait, et z_m une ligne, Q doit aussi représenter une longueur linéaire. C'est ce qui a lieu en effet, et il est facile de la construire. Pour cela, du point d'émergence ${}_cI_m$ menez une parallèle au rayon incident central SA_{I}, d'où l'ordonnée dé-

rive, et prolongez-la jusqu'au point Q où elle va couper l'axe central. Puis, considérez la distance $A_{m}Q$ comme positive quand elle est antérieure à la surface d'émergence, et comme négative quand elle lui devient postérieure. Cette distance, ainsi interprétée, représentera le coefficient Q, tant pour sa grandeur que pour son signe. Car, dans le triangle $_{,}I_{"}QA_{m}$, elle a, comme lui, pour valeur $\frac{_{c}z_{m}}{\tan g\,_{c}X}$, qui équivaut à $\frac{_{c}z_{m}}{\sin\,_{c}X}$ dans les limites de petitesse attribuées ici à l'angle $_{c}X$.

Supposons que le système considéré soit seulement composé de deux lentilles réfringentes, infiniment minces, agissant dans l'air, et séparées l'une de l'autre par l'intervalle $A_{,}A_{m}$. Alors le rayon incident $SA_{,}$, après avoir traversé la première, se retrouverait encore sensiblement sur le prolongement de sa direction primitive, à cause du parallélisme des plans tangents à ses points d'incidence et d'émergence, dont la distance mutuelle est supposée négligeable. Ce serait alors ce même rayon incident qui, prolongé jusqu'à la seconde lentille, y déterminerait les points d'incidence, ainsi que d'émergence $_{,}I_{m}$, lesquels coïncideraient encore l'un avec l'autre. Conséquemment, notre parallèle $_{,}I_{"}Q$ coïnciderait aussi avec lui, et le point Q tomberait en $A_{,}$. Le coefficient Q se trouverait donc égal à l'intervalle même des deux lentilles infiniment minces, ou à l'épaisseur totale du système; et il deviendrait tout à fait nul si les deux lentilles infiniment minces se rapprochaient l'une de l'autre jusqu'au contact. C'est en effet ce que l'expression générale et explicite de Q donne quand on l'applique à des cas pareils. Mais notre construction montre la raison géométrique de ce résultat.

La position du point Q qu'elle détermine, varie ainsi avec la constitution du système considéré. Mais, dans chaque système, elle est constante comme le coefficient Q qu'elle supplée; et elle s'applique comme lui à tous les rayons émergents qui dérivent d'un rayon de même nature à incidence centrale, quel que soit leur angle primitif $_cX$. Un quelconque de ces rayons étant donné, on lui mènera d'abord par le point Q une parallèle qui, prolongée jusqu'à la dernière surface du système, y marquera le point d'émergence du rayon dérivé. De là on mènera une droite formant avec l'axe central l'angle N_cX; et ce sera ce rayon émergent lui-même. L'ayant ainsi tracé, prolongez-le jusqu'à ce qu'il vienne couper l'axe en un certain point H, et considérez la distance A_mH comme positive si elle est antérieure à la surface d'émergence; elle représentera pour la grandeur comme pour le signe la quantité auxiliaire que j'ai nommée H, et dont l'expression est

$$H = \frac{Q}{N},$$

du moins lorsque les milieux extrêmes sont de même nature réfringente, comme nous l'avons supposé. Le point d'intersection H ainsi obtenu sera celui que j'ai appelé le *point oculaire*. Cela est évident par la construction même : car, dans le triangle $_cI_mA_mH$, le côté HA_m a pour valeur $\frac{_cz_m}{\text{tang}\ _cX_m}$, ce qui équivaut à $\frac{_cz_m}{\sin\ _cX_m}$ dans notre approximation. Remettant pour $_cz_m$ sa valeur $Q \sin\ _cX$, et pour $\sin\ _cX_m$ sa valeur $N \sin\ _cX$, l'angle $_cX$ disparaît et le rapport se réduit à $\frac{Q}{N}$, qui est ainsi l'expression de la ligne A_mH.

Cette expression étant indépendante de $_cX$, le point ocu-

laire H qu'elle détermine est constant dans chaque système, pour tous les rayons à incidence centrale d'une même nature. Mais sa position varie dans les divers systèmes selon leur constitution, et peut être tantôt antérieure, d'autres fois postérieure à la surface d'émergence A_m. Lorsque les deux points Q et H sont donnés dans un système, relativement à une certaine réfrangibilité, ils suffisent pour déterminer complétement la direction de tous les rayons émergents de cette nature-là qui dérivent d'un rayon à incidence centrale donné. Car ce rayon SA, étant assigné, on lui mènera par le point Q une parallèle qui, prolongée jusqu'à la dernière surface du système, y marquera le point d'émergence finale du rayon dérivé. Alors, joignant ce point avec le point H, on aura ce rayon lui-même.

13. Maintenant, pour interpréter les deux autres coefficients P et R, je considère des rayons incidents primitivement parallèles à l'axe central. De tels rayons se trouvent toujours individuellement compris dans un plan diamétral du système, où ils continuent de se propager. Je le prends, comme tout à l'heure, pour plan des x, z, ce qui ne laisse plus subsister que le couple d'équations qui s'y rapporte; mais ici c'est cos Z ou sin X qui devient nul et non pas z_1. J'indique cette circonstance en appliquant aux éléments tant d'incidence que d'émergence l'indice zéro placé antérieurement. Alors leurs relations entre eux sont telles qu'il suit :

$$\sin {}_0X_m = Pz_1,$$
$${}_0z_m = Rz_1.$$

Construisons la fig. 3 dans le plan des xz. Soit SI_1 un rayon incident parallèle à l'axe central pénétrant la première surface en I_1. Désignons par ${}_0I_mR_m$ le rayon émergent dérivé de celui-là, et prolongeons-le en tous sens jusqu'à ce qu'il

coupe l'axe central en un point que je nomme F. Ce point sera le *foyer principal* du système considéré; et la ligne $A_m F$ est sa *distance focale principale* pour l'espèce de réfrangibilité propre au rayon incident SI_1. Dans notre notation cette distance se compte comme positive quand elle se trouve antérieure à la surface d'émergence A_m, et comme négative quand elle lui est postérieure. Nous allons tout à l'heure reconnaître sa dépendance des coefficients P et R.

Pour construire P, je mène par le point d'incidence I_1 une parallèle au rayon émergent, et je la prolonge en tous sens jusqu'à ce qu'elle aille couper l'axe central en un certain point G. Alors je nomme G la distance $A_1 G$, en la considérant comme positive si elle est antérieure à la surface d'incidence, et comme négative si elle lui est postérieure. Cette ligne G, ainsi interprétée, représentera $\frac{1}{P}$, tant pour le signe que pour la grandeur; ou, inversement, P sera égal à $\frac{1}{G}$. Cela est évident par le triangle $A_1 G I_1$, où la ligne G, formant le côté $A_1 G$, a pour valeur $\frac{{}_0 z_m}{\tang {}_0 X_m}$, qui équivaut à $\frac{{}_0 z_m}{\sin {}_0 X_m}$, à cause de la petitesse supposée des angles X; ce qui reproduit $\frac{1}{P}$.

14. Maintenant, pour construire le coefficient R, je joins le point d'émergence au point d'incidence par une droite que je prolonge indéfiniment jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe central en un certain point K. Je désigne par la la lettre K la distance $A_1 K$, considérée comme positive si elle est antérieure à la surface d'incidence, et comme négative si elle lui est postérieure. Je nomme aussi E l'intervalle $A_1 A_m$ des surfaces d'incidence et d'émergence du système

considéré. On aura alors

$$R = \frac{K + E}{K}.$$

Ce résultat est évident de lui-même, puisque dans le triangle $A_m K_o I_m$, $\frac{K+E}{K}$ est égal à $\frac{{}_oz_m}{z_1}$, comme le coefficient R.

Pour tirer de là la distance focale principale $A_m F$ ou F en fonction des coefficients principaux, il suffit de la comparer à la ligne $A_1 G$ ou $\frac{1}{p}$ qui lui est homologue dans le triangle $A_1 G I_1$, semblable à $A_m F_o I_m$. Alors $\frac{A_m F}{A_1 G}$ ou FP est égal à $\frac{A_{m\,o} I_m}{A_1 I_1}$ qui est R. On a donc

$$F = \frac{R}{p}.$$

C'est en effet l'expression donnée par l'analyse pour la distance focale principale des systèmes qui agissent entre des milieux extrêmes de même nature, comme on l'a vu page 27.

15. La position des points F, G, K, varie dans les divers systèmes selon leur constitution ; mais elle est constante dans chaque système pour les rayons de même nature qui font leur incidence parallèlement à l'axe central. De ces trois points, deux étant connus, suffisent pour déterminer le rayon émergent qui dérive d'un de ces rayons supposé donné. Prenons, par exemple, G et K ; puis, soit SI_1 le rayon incident assigné. Du point K menez la droite KI_1 au point d'incidence, et prolongez-la jusqu'à la dernière surface du système. Elle y marquera le point d'émergence ${}_oI_m$ du rayon cherché. Joignez alors le point G avec I_1, vous aurez sa direction. Ainsi, menant de ${}_oI_m$ une parallèle à $I_1 G$, vous aurez ce rayon émergent lui-même.

La distance $A_1 G$, ou $\frac{1}{p}$, qui se compte à partir de la surface

d'incidence, ne diffère de la distance focale principale $A_{m}F$, ou F, qui se compte à partir de la surface d'émergence, qu'en conséquence de l'épaisseur du système. Car ces deux distances deviendraient égales entre elles si la surface d'émergence venait coïncider avec la surface d'incidence, c'est-à-dire, si le système total se trouvait réduit à une extrême minceur. Dans ce cas R se réduirait à $+1$, puisque E étant nul, les deux termes du rapport qui l'exprime auraient la même valeur. On a déjà vu que N se réduit aussi alors à $+1$, et Q devient nul ; de sorte que le système infiniment mince se trouve entièrement spécialisé par la valeur de son coefficient P, ou du rapport $\frac{1}{P}$, qui exprime sa distance focale principale.

Si le système considéré se composait de deux lentilles infiniment minces, séparées par un intervalle quelconque h_{1}, comme celui que nous avons pris pour exemple dans la page 34, § 12, la droite $I_{1\,0}I_{m}$ serait la direction même du rayon incident SI, après qu'il aurait traversé la première lentille. Alors le point K serait évidemment le foyer principal de cette lentille, et la ligne $A_{1}K$ serait sa distance focale principale. En la désignant donc par f_{1}, on aurait pour ce cas spécial

$$R = 1 + \frac{h_{1}}{f_{1}}.$$

C'est en effet la valeur que l'expression générale et explicite de R donne pour un système linéaire ainsi constitué, et notre construction actuelle en montre la cause.

Généralement, la valeur et le signe propre du coefficient R ont une influence très-considérable sur les effets des systèmes optiques, et il est très-essentiel de la bien connaître pour la diriger convenablement. Ici, en ne considérant que des rayons

incidents parallèles à l'axe central du système, on voit que c'est ce coefficient qui rend l'ordonnée d'émergence de ces rayons plus grande que leur ordonnée d'incidence, ou égale ou moindre, et qui la maintient du même côté de l'axe si on le rend positif, ou la fait passer du côté contraire si on le rend négatif. Il conserve encore une influence analogue sur les rayons incidents quelconques, pour les plier finalement vers l'axe central, ou les en écarter, tant dans le système total que dans les systèmes partiels dont on le compose; seulement, l'effet qu'il produit sur eux se combine alors avec l'influence des autres coefficients. C'est pourquoi il était nécessaire de faire bien connaître son action propre, ainsi que la leur, dans les résultats.

16. Ces interprétations étant données, je reprends, dans les pages 25 et 28, les expressions générales des coordonnées focales en fonction des coordonnées du point rayonnant dont elles dérivent; ce sont

$$\Delta_f = \frac{Q + R\Delta}{N + P\Delta}, \quad y_f = \frac{b}{N + P\Delta}, \quad z_f = \frac{c}{N + P\Delta};$$

je prends dans la première Δ en Δ_f, et substituant sa valeur dans les deux autres, j'en tire b en c. La relation générale $NR - PQ = 1$ simplifie ces résultats, et l'on trouve

$$\Delta = \frac{N\Delta_f - Q}{R - P\Delta_f}, \quad b = \frac{y_f}{R - P\Delta_f}, \quad c = \frac{z_f}{R - P\Delta_f}.$$

Sous cette forme Δ, b, c peuvent s'appeler les *coordonnées focales réciproques* du point rayonnant qui serait déterminé en position par les coordonnées $\Delta_f\, y_f\, z_f$. Ce sont en effet celles qu'on obtiendrait pour foyer si l'on faisait rayonner le point focal direct à travers l'appareil, en intervertissant le sens de vitesse de la lumière transmise et celui de son introduction; c'est-à-dire, en la faisant entrer dans l'appareil par la

dernière surface de l'oculaire, et sortir par la première de l'objectif. Aussi arriverait-on aux mêmes expressions de Δ, b, c, si l'on cherchait à les déduire immédiatement de cette condition d'inversion, en appliquant au mouvement interverti les mêmes formes de calcul, et les mêmes notations que nous avons employées pour le mouvement direct. Seulement, en vertu de l'identité de la marche suivie, on devrait alors placer la nouvelle origine des x au delà de l'oculaire, les considérer comme positifs en allant vers l'objectif, conséquemment vers l'ancienne origine des x, et compter aussi les angles Y, Z, à partir de l'extrémité positive de leurs axes, en allant vers cette origine ancienne. Il en résulterait que les distances Δ_f, Δ se trouveraient considérées comme positives quand elles seraient dirigées vers l'origine nouvelle des x, au lieu que dans nos formules, on leur attribue le caractère positif, quand elles sont dirigées vers l'origine ancienne qui a servi pour le calcul direct. Le signe de ces deux quantités se trouverait donc seulement opposé à celui qui les affecte dans les expériences que nous venons d'obtenir; mais comme il devrait être interprété en sens inverse, les résultats ne changeraient point.

17. On peut aussi avoir besoin de déterminer les éléments d'incidence d'un rayon en fonction de ses éléments d'émergence. Pour les obtenir, je reprends les équations directes

$$\cos Y_m = N \cos Y + P y_1, \qquad \cos Z_m = N \cos Z + P z_1,$$
$$y_m = Q \cos Y + R y_1, \qquad z_m = Q \cos Z + R z_1.$$

Considérant d'abord le premier couple, j'en tire y_1 et $\cos Y$, en y_m et $\cos Y_m$ par l'élimination, en faisant usage de l'équation de condition qui lie les quatre coefficients N, P, Q, R

entre eux ; il vient alors

$$\cos Y = \quad R\cos Y_m - Py_m, \qquad \cos Z = \quad R\cos Z_m - Pz_m.$$
$$y_1 = -Q\cos Y_m + Ny_m, \qquad z_1 = -Q\cos Z_m + Nz_m.$$

On pourait effectuer la même recherche par un calcul immédiat, en intervertissant les vitesses, et le sens d'introduction des éléments lumineux, comme je l'ai indiqué tout à l'heure. Alors les signes de $\cos Y_m$, $\cos Y$, $\cos Z_m$, $\cos Z$ se trouveraient opposés à ceux que nous leur trouvons ici. Mais comme ils devraient s'interpréter en sens inverse autour de leurs axes propres, les résultats demeureraient réellement tels que nous les trouvons.

18. Si Δ_f devenait infinie en même temps que y_f et z_f dans les formules du § 16, page 40, l'expression de Δ en Δ_f se réduirait sans difficulté; mais celles de b et de c auraient besoin d'être modifiées avant d'y introduire la condition de l'infini, comme nous l'avons fait pour leurs analogues dans le calcul direct, page 27, § 6.

Ici, la distance $+\Delta_f$ étant considérée comme antérieure à la surface d'émergence, on aurait

$$\frac{y_m - y_f}{\Delta_f} = \cos Y_m, \qquad \frac{z_m - z_f}{\Delta_f} = \cos Z_m;$$

tirant de là y_f, z_f, pour les substituer dans b et c, on peut ensuite y faire Δ_f infini sans difficulté; car les ordonnées latérales d'émergence y_m, z_m, ne peuvent jamais devenir infinies, puisqu'elles doivent au contraire rester toujours très-petites. Si l'on désigne spécialement les quantités résultantes par l'indice inférieur r, on aura

$$F_r = -\frac{N}{P}; \quad b_r = +\frac{\cos Y_m}{P}; \quad c_r = +\frac{\cos Z_m}{P}.$$

Ce sont *les coordonnées focales principales réciproques de*

l'instrument, pour un faisceau homogène, composé de rayons parallèles, qui s'introduirait par la dernière surface de l'oculaire, en formant les angles Y_m, Z_m, avec les axes latéraux, et qui, se propageant vers l'objectif, ressortirait par sa première surface dans l'air ambiant, sous la forme générale d'un pinceau conique.

§ II. DÉCOMPOSITION GÉNÉRALE DES SYSTÈMES MULTIPLES EN SYSTÈMES PARTIELS.

19. Je décompose d'abord l'instrument dioptrique total en deux systèmes partiels dont l'un comprendra toutes les lentilles qui composent l'objectif, et l'autre toutes celles qui composent l'oculaire complexe. Je représente les quatre coefficients du premier système par N', P', Q', R', ceux du second par N'', P'', Q'', R''; et je nomme h_1 l'intervalle qui les sépare sur l'axe central, intervalle qui sera un des éléments que nous aurons à déterminer. Ces systèmes partiels ainsi assemblés constitueront donc l'instrument total dont je désigne les coefficients généraux par N, P, Q, R. Ceux-ci seront évidemment des fonctions de leurs analogues dans les systèmes constituants, et de l'intervalle h_1. Or, la forme de ces fonctions est établie à la page 506 du tome premier de mon Astronomie, pour le cas général où le milieu interposé entre les deux systèmes imprimerait une vitesse quelconque u_1 aux éléments lumineux que l'on considère comme passant du premier au second. Ici, cette vitesse intermédiaire devient égale à celle d'incidence et d'émergence en direction ainsi qu'en grandeur, puisque nous supposons tout l'instrument purement dioptrique, et composé de lentilles réfringentes

agissant dans l'air. Il faut donc lui attribuer pour valeur $+1$, comme à celles-là. En faisant cette modification dans les formules de la page citée, et y écrivant aussi h_1 au lieu de h, pour désigner l'intervalle des deux systèmes, on aura généralement

$$(1)\left\{\begin{array}{ll} N = N'N'' + Q'P'' + N'P''h_1, & P = P'N'' + R'P'' + P'P''h_1, \\ Q = N'Q'' + Q'R'' + N'R''h_1, & R = P'Q'' + R'R'' + P'R''h_1; \end{array}\right.$$

les quatre coefficients appartenant à chaque système partiel, et leurs analogues propres au système total, sont d'ailleurs assujettis aux conditions communes

$$NR - PQ = 1, \quad N'R' - P'Q' = 1, \quad N''R'' - P''Q'' = 1.$$

Et l'on peut en effet vérifier que la première de ces équations est satisfaite par les expressions explicites de N, P, Q, R, quel que soit h_1, en admettant les deux autres.

Lorsque l'on élimine h_1 entre les diverses équations (1), on en tire les suivantes qui peuvent se démontrer immédiatement par leur vérification même, en profitant des équations de condition existantes entre les quatre coefficients de chaque système, partiel ou total,

$$P'' = N'P - P'N, \quad P' = R''P - P''R, \quad N' = R''N - P''Q;$$

celles-ci nous seront très-utiles par les relations qu'elles offrent tout éliminées.

20. Le système objectif est toujours constitué avec certaines modifications qui permettent de simplifier ses coefficients propres. Je les leur appliquerai plus tard; mais en ce moment il sera aussi facile, et même plus commode pour la symétrie des calculs, de laisser à ces expressions leur généralité.

21. Je décompose maintenant l'oculaire lui-même en deux systèmes partiels assemblés consécutivement, et séparés l'un

de l'autre par un certain intervalle h qui sera encore un des éléments que nous aurons à déterminer. Je spécifierai plus tard le mode de partage que je veux ainsi établir. Mais pour le moment je lui laisse toute la liberté de choix qu'il peut admettre. Je me borne à désigner généralement par $n' p' q' r'$ les quatre coefficients du premier système qui sera l'antérieur, par n'', p'', q'', r'' ceux du second qui sera le plus voisin de l'œil ; et j'admets en outre qu'ils sont séparés l'un de l'autre par un intervalle d'air. Il existera alors entre eux et les coefficients de leur système total, des relations exactement pareilles à celles dont je viens d'écrire les expressions pour l'instrument entier ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$(2)\quad \begin{cases} N'' = n'n'' + q'p'' + n'p''h, & P'' = p'n'' + r'p'' + p'p''h, \\ Q'' = n'q'' + q'r'' + n'r''h, & R'' = p'q'' + r'r'' + p'r''h, \end{cases}$$

les quatre coefficients des nouveaux systèmes partiels étant assujettis de même aux conditions générales

$$n'r' - p'q' = 1, \qquad n''r'' - p''q'' = 1.$$

Enfin, l'élimination de h entre les équations (2) donnera pareillement

$$p'' = n'P'' - p'N'', \quad p' = r''P'' - p''R'', \quad n' = r''N'' - p''Q''.$$

Ces résultats de l'analogie sont si évidents, qu'ils n'ont besoin que d'être transcrits.

§ III. CONDITIONS DÉTERMINATRICES DE L'INSTRUMENT DANS SON APPLICATION A UN OBSERVATEUR INFINIMENT PRESBYTE.

22. J'admets, suivant l'usage ordinaire, que l'instrument doit être préparé pour un observateur infiniment presbyte. Cette supposition simplifie notablement les calculs sans res-

treindre leurs conséquences générales, puisque l'appareil ainsi construit peut ensuite s'adapter expérimentalement à la portée de chaque vue par un petit mouvement de transport imprimé à l'oculaire tout entier; ce qui ne fait varier que l'intervalle h_1 qui le sépare du système objectif, sans altérer d'ailleurs les éléments qui le constituent. Dans cette application à l'état de presbytisme illimité, un instrument dioptrique parfait devra satisfaire aux deux conditions suivantes : d'abord, tout pinceau incident homogène émané de chaque point de l'objet observé, devra sortir de l'appareil sous forme de faisceau, composé de rayons parallèles entre eux; en outre, tous les pinceaux de réfrangibilité diverse, émanés d'un même point, devront produire des faisceaux dont les rayons élémentaires coïncident dans leur émergence finale comme ils coïncidaient dans leur incidence, afin de recomposer, par leur superposition, la couleur primitive du point dont ils sont partis.

Pour exprimer analytiquement la première condition, je considère un pinceau incident d'une certaine réfrangibilité définie, qui sera, par exemple, la réfrangibilité moyenne. Il faudra que sa distance focale Δ_f, qui se compte à partir de la surface d'émergence, devienne infinie. Je reprends donc, dans le § 5, page 25, l'équation qui détermine généralement Δ_f; elle est

$$\frac{1}{\Delta_f - \mathrm{H}} = \mathrm{N}\left(\mathrm{P} + \frac{\mathrm{N}}{\Delta}\right).$$

Dans nos instruments, la quantité linéaire représentée ici par H est toujours restreinte à un petit nombre de millimètres. Ainsi, pour que Δ_f devienne infinie, il faut que le second membre de l'équation soit rendu nul. Ceci ne peut s'effectuer

que de deux manières : d'abord, en faisant $N = 0$, solution qu'on ne doit pas admettre puisqu'elle anéantirait le grossissement angulaire total que l'on veut au contraire rendre effectif; puis en faisant

$$P + \frac{N}{\Delta} = 0,$$

ce qui est, par conséquent, la seule solution réalisable.

Ainsi exprimée, cette solution dépend explicitement de la distance Δ des objets sur lesquels l'instrument est ajusté. Mais on peut en chasser cet élément et l'éliminer aussi de l'équation primitive elle-même, de manière à ne plus laisser en évidence que les seules parties constituantes de l'appareil employé. Pour cela, je prends la première des relations indépendantes de l'intervalle h_1, qui existent entre les coefficients principaux des systèmes objectif et oculaire, relations que nous venons d'établir § 19, page 44. J'en tire

$$N'P = P'' + P'N;$$

j'ajoute alors $\frac{N'N}{\Delta}$ à chacun des membres de cette équation, ce qui donne

$$N'\left(P + \frac{N}{\Delta}\right) = P'' + N\left(P' + \frac{N'}{\Delta}\right).$$

Or, si l'on désigne par Δ' la distance focale *actuelle* du système objectif, pour la distance donnée Δ des objets observés, et que l'on nomme H' la valeur de la quantité H propre à ce système, c'est-à-dire $\frac{Q'}{N'}$, l'expression générale des coordonnées focales du § 5 étant appliquée à ce cas, donnera

$$\frac{1}{\Delta' - H'} = N'\left(P' + \frac{N'}{\Delta}\right).$$

Tirant donc de là le facteur $P' + \frac{N'}{\Delta}$ et le substituant dans l'é-

quation précédente, elle deviendra

$$N'\left(P + \frac{N}{\Delta}\right) = P'' + \frac{N}{N'(\Delta' - H')}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre ici l'expression de $P + \frac{N}{\Delta}$ transformée, et en l'introduisant dans l'équation primitive en $\Delta_{,}$, on aura généralement

$$\frac{1}{\Delta_{,} - H} = \frac{N}{N'}\left[P'' + \frac{N}{N'(\Delta' - H')}\right].$$

Alors, si l'on veut que $\Delta_{,}$ devienne infinie, pour les rayons de moyenne réfrangibilité, afin d'adapter l'instrument à un observateur infiniment presbyte, la condition de ce résultat sera

$$0 = P'' + \frac{N}{N'(\Delta' - H')}.$$

L'intervention explicite de Δ a donc maintenant disparu; et la valeur générale de $\Delta_{,}$, ainsi que la condition particulière de son application à un presbytisme illimité, se trouvent exprimées en fonction des seuls éléments propres au système objectif et au système oculaire, sauf N et H qui appartiennent encore à l'instrument total. Mais N est une des indéterminées que nous conserverons, et H est une quantité qu'il faut laisser aussi en évidence, parce que nous aurons à régler sa grandeur.

23. Ces expressions peuvent encore être simplifiées par diverses considérations tirées de l'usage spécial que nous en allons faire. D'abord, dans tous les instruments que l'on fabrique aujourd'hui, le système objectif est rendu individuellement achromatique. Je le supposerai donc tel. Alors, ses éléments N', H' devront être censés constants pour les rayons de toute réfrangibilité, et sa distance focale actuelle Δ' devra

être commune à tous ces rayons pour la distance Δ, en vertu de l'achromatisme complet qu'on lui attribue. En outre, ce système est toujours composé de deux, ou au plus de trois lentilles, dont l'épaisseur centrale est très-petite comparativement à leurs autres éléments linéaires; et elles sont placées en contact, ou presque en contact les unes avec les autres. Or, les formules que nous allons établir n'ont pas pour but d'exprimer, avec une exactitude abstraite, les conditions analytiques de la construction des instruments, en tenant compte avec une égale rigueur de toutes leurs particularités. Outre la complication excessive et probablement inextricable que l'accomplissement d'une pareille tâche introduirait dans les calculs, le résultat en serait complétement inutile; car les artistes ne pourraient jamais en réaliser les indications avec la rigueur qu'on y aurait attachée. Après l'exécution la plus soignée, et toutefois nécessairement imparfaite, des lentilles qui sont les éléments fixes des constructions, il faudrait encore, comme aujourd'hui, qu'ils se réservassent la possibilité de suppléer aux erreurs de l'exécution par des rectifications expérimentales appliquées aux éléments *variables* qui sont les intervalles des lentilles entre elles; de sorte que les déterminations rigoureuses, qu'on aurait obtenues avec tant de peine, ne leur serviraient que d'indications approchées. Puisque cette issue est inévitable, il y aura un avantage certain à considérer immédiatement le problème analytique sous le point de vue d'une simple préparation approximative qui suffise pour guider sûrement l'exécution. Car, outre la plus grande facilité qui en résultera pour les calculs, dont l'utilité pratique restera la même, on pourra espérer d'y discerner plus aisément les conditions ou les re-

lations qu'il est le plus essentiel d'établir pour assurer la bonté des effets physiques produits. Telle est la marche que nous allons suivre.

24. La première simplification qu'elle nous permettra, ce sera de considérer les lentilles qui composent le système oculaire comme infiniment minces, en négligeant le rapport, toujours assez petit, de leurs épaisseurs centrales à leur rayon de courbure postérieur. Je supposerai, de plus, que toutes ces lentilles sont construites, dans chaque appareil, avec une même espèce de verre, comme on le pratique généralement. J'appliquerai aussi le premier genre de simplification au système objectif, dont je considérerai les lentilles d'inégale nature comme n'ayant que des épaisseurs négligeables et étant en contact exact entre elles, ce qui l'assimilera aussi à une lentille unique infiniment mince, mais individuellement achromatique. Ses coefficients principaux, limités par cette supposition, prendront conséquemment la forme qui convient à une pareille lentille, c'est-à-dire qu'en désignant par F_1 sa distance focale principale pour des rayons lumineux d'une certaine réfrangibilité définie, on aura, comme dans la page 28, § 7.

$$N' = 1, \quad P' = \frac{1}{F_1}, \quad Q' = 0, \quad R' = 1, \quad \text{et par suite} \quad H' = \frac{Q'}{N'} = 0.$$

On devra donc introduire ces spécifications, dans l'expression générale de Δ_f et dans la condition de presbytisme, en les supposant l'une et l'autre appliquées à la réfrangibilité considérée ; et elles deviendront ainsi :

$$\frac{1}{\Delta_f - H} = N\left(P'' + \frac{N}{\Delta'}\right), \qquad 0 = P'' + \frac{N}{\Delta'}.$$

Dans cette application spéciale, les deux équations ont lieu

simultanément, et alors la seconde rend Δ_f infinie dans la première. Mais celle-ci existe encore, avec sa même forme, pour toute autre réfrangibilité quelconque, en donnant aux lettres H, N, P″ les valeurs propres qui y correspondent, et conservant le même Δ' que l'achromatisme de l'objectif empêche de varier. Or, pour ces autres réfrangibilités, la seconde équation, qui rend Δ_f infinie, n'existera plus généralement, à moins qu'on ne lui ait donné cette généralité par une préparation analytique spéciale. Si on ne l'a pas fait, on aura, pour ces cas, des valeurs finies de Δ_f qui pourront être, soit positives, soit négatives, et occasionnellement de signes opposés. Alors les pinceaux incidents, pour lesquels on a établi l'équation du presbytisme illimité, sortiront seuls de l'instrument sous forme de faisceaux; et tous ceux de réfrangibilités différentes qui émanent des mêmes points des objets, sortiront, en général, sous forme de pinceaux coniques, dont les sommets seront distribués sur des droites individuellement dirigées au point oculaire du système total qui correspond à leur réfrangibilité propre. Mais ils pourront s'y trouver placés à d'inégales distances de ces points, et même les uns en avant, d'autres en arrière.

25. On préviendrait une telle dispersion si l'on rendait généralement nulles les variations chromatiques du facteur $P'' + \frac{N}{\Delta'}$; du moins, en admettant que les valeurs de la quantité H restent finies pour toutes les espèces de rayons simples, ce que nous aurons soin d'assurer. Pour exprimer la condition de cette nullité, désignons, par la caractéristique δ, les changements quelconques que les variations dont il s'agit opèrent dans les diverses fonctions analytiques qui con-

tiennent les indices de réfraction, lorsqu'on passe de la réfrangibilité moyenne à une réfrangibilité différente comprise entre les limites visibles du spectre. Δ' sera insensible à ce δ, puisque le système objectif est supposé individuellement achromatique pour cette distance focale actuelle. Alors, en l'appliquant aux seuls termes variables P'' et N de la fonction considérée, l'émergence de tous les pinceaux hétérogènes sous forme de faisceaux sera établie par la simultanéité des deux conditions

$$o = \delta P'' + \frac{\delta N}{\Delta'}, \qquad o = P'' + \frac{N}{\Delta'}.$$

En effet, si elles sont remplies, le second membre de l'équation en Δ_f sera toujours nul; et puisque H est supposé toujours restreint à des valeurs finies, il faudra que Δ_f soit constamment infini pour satisfaire à l'égalité.

Mais la dispersion longitudinale des Δ_f n'est pas le seul inconvénient que l'on ait à craindre. Les pinceaux émergents composés, provenant d'un même point des objets, ont aussi leurs foyers définitifs dispersés latéralement, à moins que l'on ne prévienne cet effet final par une disposition spéciale des appareils. Même, dans la pratique, pourvu que la dispersion longitudinale ne soit pas excessive, la latérale est de beaucoup la plus essentielle à détruire. Car, produisant, pour l'image de chaque point des objets, un spectre coloré transversal, et, pour tous les points, autant de ces spectres qui empiètent mutuellement les uns sur les autres, les contours des objets, ainsi que leurs détails, en deviennent indiscernables si l'on ne se borne à des grossissements très-faibles; et, dans ce cas même, ils sont encore désagréablement altérés. Supposez, au contraire, que tous les foyers définitifs

dérivés d'un même pinceau incident composé, se trouvent ramenés sur une même ligne droite dirigée au point oculaire correspondant à la réfrangibilité moyenne, et qu'ils se forment du même côté de lui à des distances qui ne soient pas excessivement différentes. Ajoutez-y que ce point oculaire soit extérieur à l'instrument, de sorte que le centre de la pupille puisse s'y fixer; ou bien, s'il est intérieur, qu'il soit assez peu enfoncé pour qu'en appliquant l'œil contre la surface d'émergence, l'ouverture sensible de la pupille lui permette encore d'embrasser une suffisante amplitude des axes qui s'y croisent. Alors les foyers de diverses couleurs, dérivés d'un même pinceau incident composé, seront vus en projection les uns sur les autres; et ils reproduiront la couleur primitive, par leur superposition optique sur la droite qui les contient. A la vérité, ils pourront encore se trouver ainsi portés sur cette droite à d'inégales distances de l'organe, si l'on n'a pas mis obstacle à cette inégalité. Mais l'expérience prouve que l'œil y est peu sensible quand elle n'est pas très-considérable, surtout lorsque la vision s'opère par des pinceaux émergents très-déliés, comme sont ceux que l'on fait toujours produire aux instruments préparés pour les observations les plus délicates. Or, ces limites de tolérance des résultats étant admises, il devient facile de réaliser, sinon rigoureusement, du moins avec une approximation pratiquement suffisante, les circonstances qu'elles supposent. Car, en considérant d'abord la seule dispersion latérale des foyers, on verra, dans le tome Ier de mon Astronomie, page 585, que si la portée de la vue de l'observateur est, je ne dirai pas infinie, mais seulement très-longue comparativement à la quantité H relative aux réfrangibilités diverses, et que le

centre de sa pupille soit placé au point oculaire moyen, cette dispersion sera très-approximativement anéantie en rendant le coefficient N constant pour toutes les réfrangibilités, c'est-à-dire, dans notre notation, en rendant nulle la variation δN. A la vérité, cette condition seule ne suffira pas pour détruire ou prévenir aussi la dispersion longitudinale. Car si l'on considère, par exemple, les deux équations de condition que nous avons établies tout à l'heure pour éloigner tous les foyers à une même distance infinie, il est évident que si δN est rendu constamment nul, la première d'entre elles ne pourra pas être satisfaite pour les autres réfrangibilités, à moins que $\delta P''$ n'ait été assujetti à la même restriction. Et, en général, les mêmes coordonnées focales, finies ou infinies, ne pourront pas être communes à tous les éléments chromatiques d'un même pinceau incident, si les trois quantités δN, $\delta P''$, δH ne sont nulles à la fois. Mais comme il serait fort difficile de remplir analytiquement ces trois conditions, on se borne habituellement à celle qui anéantit δN, comme étant la plus importante; et l'on tâche seulement de faire en sorte que les variations chromatiques des deux autres éléments P'' et H soient toujours assez faibles pour que leur effet propre, ainsi que leur influence sur Δ_f, puissent être négligés sans inconvénient. Cela est aisé à vérifier, d'après leurs expressions, quand toutes les parties constituantes de l'instrument sont déterminées. J'admettrai donc aussi ces simplifications du problème, en m'astreignant aux vérifications qui les justifient.

26. Néanmoins, avec ces simplifications mêmes, les approximations auxquelles nous venons de nous restreindre seraient presque impossibles à établir sous une forme analytique générale, sans une circonstance physique qui en faci-

lite singulièrement l'expression. Lorsqu'un faisceau infiniment délié de lumière blanche est brisé et dispersé par un prisme formé d'une substance réfringente quelconque, les indices de réfraction propres aux différents rayons simples se montrent, à la vérité, différents les uns des autres; mais leurs variations dans l'amplitude totale du spectre visible sont toujours très-petites comparativement à la valeur absolue de l'indice de réfraction moyen. Ce fait a lieu même quand le trait dispersé est formé par la lumière solaire directe; à plus forte raison peut-on l'admettre dans la théorie des instruments destinés à observer des objets terrestres, des planètes, ou des étoiles, dont la lumière est incomparablement moins vive que celle du soleil, ce qui donne au spectre visible une amplitude beaucoup plus restreinte, pour une force réfringente d'égale énergie. Pour exprimer ceci analytiquement, nommons n l'indice de réfraction propre aux rayons de moyenne réfrangibilité, et $n + \delta n$ la valeur de ce même indice pour une réfrangibilité plus grande ou moindre dans une même substance. Le rapport $\frac{\delta n}{n}$ sera toujours une petite fraction, dont on peut se permettre de négliger les puissances supérieures à la première, en conservant celle-ci seule dans les résultats. Alors la caractéristique δ devient réellement un signe de variations infiniment petites, et s'emploie comme telle dans tous les calculs, ce qui les simplifie considérablement. J'adopterai en conséquence ce principe d'approximation, et je m'y bornerai dans ce qui va suivre.

C'est par une application de ce principe, et dans les limites d'exactitude qu'il comporte, que la constance chromatique imprimée au coefficient N, prévient la dispersion latérale des

foyers, dans les circonstances spécifiées plus haut. Pour faire bien comprendre ce résultat, je choisis un pinceau incident de lumière naturelle dont l'axe géométrique forme l'angle X avec l'axe de l'instrument. Ce pinceau, considéré dans ses composants chromatiques, en contiendra une infinité d'autres de réfrangibilités diverses, ayant le même axe géométrique, et leurs rayons élémentaires coïncidents sur les mêmes droites d'incidence. Mais, dans l'émergence finale, cette coïncidence n'aura plus lieu généralement; et les axes géométriques émergents devront se séparer, tant à cause de la diversité des points oculaires vers lesquels ils se dirigent, en vertu des variations chromatiques de H, qu'à cause de l'inégale valeur des angles ${}_{c}X_{m}$ qu'ils formeront alors avec l'axe central du système. En effet, ces angles sont liés aux ${}_{c}X$ dont ils dérivent, par l'équation générale

$$\sin {}_{c}X_{m} = N \sin {}_{c}X.$$

Or, N étant une fonction des indices de réfraction, sa valeur variera généralement avec les réfrangibilités considérées; alors les angles ${}_{c}X_{m}$ en résulteront différents pour le même ${}_{c}X$. Mais ces inégalités n'auront plus lieu si l'on combine les termes de N de manière que ses variations chromatiques soient toujours nulles, c'est-à-dire, dans notre notation, si l'on pose l'équation

$$\delta N = 0;$$

car si l'on parvient à y satisfaire, tous les ${}_{c}X_{m}$ correspondants au même ${}_{c}X$ seront égaux; et ainsi les axes géométriques de tous les pinceaux élémentaires qui composent un même pinceau incident, sortiront de l'appareil suivant des directions parallèles entre elles.

Or, pour cela ils ne seront pas encore coïncidents. Car chacun d'eux coupe l'axe central au point oculaire qui appartient à sa réfrangibilité propre; et ces points seront généralement dispersés sur une certaine étendue de l'axe en vertu des variations chromatiques de H. Pour les réunir, il faudrait rendre δH constamment nul, ce qui, joint à la constance de N, amènerait tous les axes émergents en complète coïncidence. Mais on obtiendra des effets optiques très-approximativement pareils, si les valeurs de δH sont seulement maintenues très-petites comparativement aux distances Δ_f où les foyers se forment, quand l'instrument est ajusté pour une portée de vue ordinaire, le centre de la pupille étant placé au point oculaire moyen; car alors les droites visuelles menées de ce point aux différents foyers auront des directions sensiblement coïncidentes.

27. C'est avec ces restrictions approximatives que l'on emploie l'équation $\delta N = 0$ dans les instruments d'optique, et qu'on la considère comme y assurant avec une exactitude suffisante la dispersion rectiligne des foyers. Pour en faire l'application, je prends dans les équations (1), page 44, l'expression générale de N en fonction des coefficients principaux qui constituent le système objectif et le système oculaire. Mais je la simplifie, quant au premier d'entre eux, par la considération de sa minceur, qui permet de supposer $N' = 1$ et $Q' = 0$. Il reste alors

$$(a) \qquad N = N'' + P''h_1.$$

J'applique maintenant aux deux membres de cette équation la caractéristique δ, en faisant attention que la lettre h_1 y est insensible, parce qu'elle exprime l'intervalle compris entre l'objectif et la première lentille oculaire, lequel reste

le même pour les rayons de toute réfrangibilité. Traitant donc h_1 comme constant, on a

$$\delta N = \delta N'' + h_1 \delta P''.$$

Le second membre exprime généralement les variations que N éprouve autour de sa valeur propre à la réfrangibilité moyenne, à partir de laquelle s'exerce la caractéristique δ. On voit qu'elles résultent uniquement de celles qu'éprouvent les coefficients N'', P'' appartenant au système oculaire; et en effet, lui seul pouvait les faire naître, puisque nous avons supposé l'objectif achromatique individuellement. Comme elles sont censées infiniment petites, quand on aura effectué les opérations que la caractéristique δ indique, on devra donner à toutes les quantités littérales qui multiplieront les δn les valeurs spéciales qui conviennent aux rayons de moyenne réfrangibilité.

Pour détruire la dispersion latérale des foyers, il faut faire δN nul : la condition analytique de ce résultat sera donc

$$(c) \qquad 0 = \delta N'' + h_1 \delta P''.$$

28. Nous avons besoin de connaître aussi l'expression complète de leur variation longitudinale, sinon pour l'anéantir entièrement, du moins pour constater qu'elle peut être négligée. Dans ce dessein je reprends l'équation générale qui donne Δ_f en fonction de Δ', et qui, après les simplifications que nous y avons faites tout à l'heure, page 50, est :

$$\frac{1}{\Delta_f - H} = N\left(P'' + \frac{N}{\Delta'}\right).$$

Pour la considérer dans la réalité de ses applications, il ne faut plus supposer l'observateur infiniment presbyte, mais lui attribuer une portée de vue ordinaire qui lui fasse per-

cevoir nettement les images des objets lorsqu'elles sont amenées au-devant de son œil à une distance finie $+\Omega$. Ceci convenu, je place le centre de sa pupille au point oculaire moyen, pour lequel je désigne la valeur spéciale de H par (H); et je suppose l'instrument ajusté de manière que les images de réfrangibilité moyenne, ayant pour distance focale $(\Delta)_f$, se trouvent à la juste distance Ω au-devant de ce point, auquel cas $(\Delta)_f-(H)$ sera égal à $+\Omega$. Alors, l'observateur verra parfaitement ces images; et l'indistinction des autres dépendra des différences que présenteront les Δ_f avec le $(\Delta)_f$ moyen. Or, ces différences, étant considérées comme très-petites, se concluront de l'équation précédente en appliquant à ses deux membres notre caractéristique δ. Mais, dans cette application, il faudra traiter Δ' comme constant, ainsi que N; le premier parce que l'objectif est supposé achromatique individuellement; le second, parce que les variations chromatiques qu'il pourrait subir, seront individuellement détruites par l'équation $\delta N=0$ ou (*c*) que nous avons posée à la fin du § 27. Effectuant donc ce calcul, qui est une différentiation véritable, il en résultera d'abord généralement

$$-\frac{(\delta\Delta_f-\delta H)}{(\Delta_f-H)^2}=N\delta P'';$$

conséquemment

$$\delta\Delta_f=\delta H-N(\Delta_f-H)^2\delta P''.$$

Maintenant, la caractéristique δ indiquant des variations infiniment petites comptées à partir de la réfrangibilité moyenne, il faut, après l'avoir appliquée, donner aux quantités littérales les valeurs propres à cette phase. Nous ne pouvons pas encore le faire pour $\delta P''$, ni pour δH, relativement auxquels la différentiation n'est ici qu'indiquée. Mais cette substitution

peut être opérée dans le coefficient $(\Delta_f - H)^2$ qui devient ainsi $[(\Delta)_f - (H)]^2$ ou Ω^2. Admettant donc qu'on l'effectuera aussi sur les autres termes quand ils seront développés, on aura

$$\delta\Delta_f = \delta H - N\Omega^2\delta P''.$$

Ainsi, lorsque l'instrument sera ajusté de manière que les images de moyenne réfrangibilité se forment à la distance Ω, au-devant du point oculaire moyen où l'on place le centre de la pupille, les images de réfrangibilité différentes se formeront aux distances respectives

$$\Omega + \delta\Delta_f \quad \text{ou} \quad \Omega\left(1 + \frac{\delta H}{\Omega} - N\Omega . \delta P''\right);$$

expression qui devra se calculer, pour chacune d'elles, en donnant aux petites variations δH, $\delta P''$, les valeurs propres à l'espèce de rayon simple auquel on voudra l'appliquer.

Je conserverai δH sous cette forme simplement indicatrice, jusqu'à ce que nous ayons eu l'occasion de former l'expression explicite de H en fonction des éléments constitutifs de l'instrument. Quant aux variations des coefficients N'' et P'', appartenant à l'oculaire seul, variations qui entrent aussi dans δN, on les déduira des équations formées dans le § 21, page 45, lesquelles expriment ces coefficients en fonction de ceux qui appartiennent aux systèmes partiels dont l'oculaire total est composé. On a en effet ainsi

$$(2)\quad N'' = n'n'' + q'p'' + n'p''h, \qquad P'' = p'n'' + r'p'' + p'p''h.$$

Il suffira donc d'appliquer notre caractéristique chromatique δ aux deux membres de ces équations, en remarquant que la lettre h y est insensible, parce qu'elle exprime l'intervalle des deux systèmes partiels constituants de l'oculaire, intervalle qui est constant pour les rayons de toutes réfrangibilités.

29. Ici les effets de la caractéristique δ commencent à devenir explicites, parce que les coefficients principaux des systèmes partiels contiennent explicitement les indices de réfraction, qui sont seuls affectés par les changements de la réfrangibilité. Il devient donc nécessaire de développer complétement cette application, et de fixer la forme générale des expressions analytiques qui doivent en résulter.

D'après ce qui est démontré au tome second de mon Astronomie, page 23, lorsqu'un système dioptrique est composé de lentilles réfringentes dont l'épaisseur centrale est négligeable, et qui agissent toutes dans un même milieu ambiant comme nous l'admettons, chacun des quatre coefficients principaux de ce système consiste en une somme de termes, ayant pour forme individuelle l'expression générale

$$\frac{A}{f_p f_q f_r \ldots f_u}.$$

Le numérateur A est uniquement fonction des intervalles des lentilles entre elles, ce qui le rend constant pour la caractéristique δ. Le dénominateur, au contraire, est le produit d'un certain nombre de distances focales principales, propres à ces lentilles, dont le rang ordinal se trouve indiqué dans chaque terme, par les indices inférieurs qui leur sont annexés. Or, si l'on prend d'abord un seul de ces facteurs, par exemple celui dont le rang est p, et que l'indice de réfraction propre à la lentille correspondante soit n pour une certaine réfrangibilité spécialement considérée, on a généralement, dans nos restrictions actuelles,

$$\frac{1}{f_p} = (n-1)\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r'_p}\right),$$

r_p désignant le rayon de courbure antérieur de la lentille in-

finiment mince, et r'_p son rayon de courbure postérieur. D'après cela, si l'on fait agir la caractéristique δ, comme indice de variations infiniment petites, comptées à partir de la réfrangibilité moyenne, en l'appliquant aux deux membres de l'équation précédente, où les rayons de courbure r_p, r'_p sont constants pour elle, on aura

$$\delta\left(\frac{1}{f_p}\right) = \frac{1}{f_p}\frac{\delta n}{(n-1)}.$$

L'indice n du dénominateur, ainsi que la distance focale f, doivent être évalués dans ce résultat, pour la réfrangibilité moyenne, puisque nous la prenons pour origine des variations que nous supposons infiniment petites. Maintenant, toutes les lentilles de l'oculaire étant supposées faites d'une même matière, le coefficient $\frac{\delta n}{n-1}$ sera commun à tous les facteurs qui en dépendent. Donc, si M est le nombre total des distances focales assemblées au dénominateur du terme que nous considérons, sa variation totale sera

$$\frac{\mathrm{MA}}{f_p f_q f_r \ldots f_u} \cdot \frac{\delta n}{n-1},$$

ou, par abréviation,

$$\frac{\mathrm{MA}}{f_p f_q f_r \ldots f_u} \cdot \delta i,$$

en représentant par δi le facteur $\frac{\delta n}{n-1}$, qui affectera toujours ces variations comme multiplicateur, quel que soit le terme considéré, puisque nous supposons toutes les lentilles de l'oculaire faites avec une même espèce de verre.

3o. Quand des sommes quelconques de termes ainsi constitués, seront substituées dans l'équation (c), page 58, qui assure la constance chromatique de N, le facteur δi de-

viendra évidemment commun à toutes ses parties; et en le supprimant, elle prendra cette forme

$$o = \frac{\delta N''}{\delta i} + h_1 \frac{\delta P''}{\delta i}.$$

J'ai donné, dans le second volume de mon Astronomie, les expressions explicites de tous les termes de ce genre qui composent les coefficients N_m, P_m, Q_m, R_m, dans un système composé d'un nombre quelconque m de lentilles, dont on néglige, ou dont on ne néglige pas les épaisseurs. En les restreignant au premier de ces cas, qui est le nôtre, on reconnaîtra aisément que les coefficients différentiels relatifs à la réfrangibilité, ont toujours, pour N, P, R, les expressions suivantes :

$$\frac{\delta N_m}{\delta i} = N_m - 1 + \nu_m, \qquad \frac{\delta P_m}{\delta i} = P_m + \varpi_m, \qquad \frac{\delta R_m}{\delta i} = R_m - 1 + \rho_m.$$

Les quantités N_m, P_m, R_m, sont les valeurs mêmes des coefficients prises relativement à la réfrangibilité moyenne; et ν_m, ϖ_m, ρ_m, sont des fonctions explicitement déterminées, provenant des termes de chacun d'eux, qui ont pour dénominateur des produits composés de deux distances focales ou d'un plus grand nombre. Elles doivent donc être calculées aussi pour la réfrangibilité moyenne dans ces équations. Je n'y joins pas le coefficient différentiel relatif à Q_m, parce qu'il ne deviendra pas nécessaire dans nos opérations ultérieures, et qu'il a une forme moins abrégée que les précédents.

31. Pour appliquer explicitement ces résultats, il faut spécifier le mode de partage que nous voulons établir dans l'oculaire total. Je composerai le système antérieur uniquement des deux premières lentilles, les plus rapprochées de l'objectif, lesquelles pourront être réduites analytiquement à une seule, comme cas particulier d'application. Ce sera donc

à ce système antérieur, et généralement binaire, que j'appliquerai les coefficients n', p', q', r'. Alors n'', p'', q'', r'', appartiendront au système ultérieur composé de toutes les autres lentilles en nombre quelconque, que l'oculaire considéré contiendra.

Selon l'esprit de ma notation générale, je désigne les distances focales principales des deux premières lentilles et leur intervalle, par des indices qui expriment leur rang ordinal après l'objectif. Considérant ici ces deux lentilles comme infiniment minces, les quatre coefficients du système qu'elles constituent auront les expressions explicites suivantes :

$$n' = 1 + \frac{h_2}{f_3}, \quad p' = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{h_2}{f_2 f_3}, \quad q' = h_2, \quad r' = 1 + \frac{h_2}{f_2}.$$

Ce sont les formes assignées par les expressions générales quand on les réduit à un système binaire où les épaisseurs centrales sont négligées. Et l'on peut voir qu'elles vérifient l'équation de condition toujours subsistante

$$n'r' - p'q' = 1.$$

Si l'on applique à chacune de ces équations la caractéristique δ, elles donnent

$$\frac{\delta n'}{\delta i} = n' - 1, \qquad \frac{\delta p'}{\delta i} = p' + \frac{h_2}{f_2 f_3}, \qquad \frac{\delta q'}{\delta i} = 0, \qquad \frac{\delta r'}{\delta i} = r' - 1.$$

On voit ici l'application des expressions générales que nous avons formées tout à l'heure pour ces divers coefficients différentiels. Les fonctions ν_m et ρ_m se trouvent nulles pour le système linéaire que nous considérons, parce que n' et r' n'y contiennent pas de termes à dénominateur multiple ; et ϖ_m se trouve composé d'un seul terme de ce genre, provenant du terme unique à dénominateur multiple qui entre dans p'.

J'exprimerai aussi ce terme de $\frac{\delta p'}{\delta i}$ en fonction des coefficients généraux du système auquel il appartient, afin de n'employer que ces seuls coefficients dans les calculs ultérieurs. Cette transformation est bien facile, car on a évidemment

$$\frac{(n'-1)(r'-1)}{q'} = \frac{h_2}{f_2 f_3}.$$

Ainsi, en résumé, nous aurons, pour le système des deux premières lentilles oculaires,

$$\frac{\delta n'}{\delta i} = n' - 1, \quad \frac{\delta p'}{\delta i} = p' + \frac{(n'-1)(r'-1)}{q'}, \quad \frac{\delta q'}{\delta i} = 0, \quad \frac{\delta r'}{\delta i} = r' - 1,$$

ou, en faisant par abréviation,

$$\varpi' = \frac{(n'-1)(r'-1)}{q'}, \qquad \frac{\delta p'}{\delta i} = p' + \varpi'.$$

Si nous voulions, par la suite, réduire ce premier système à une lentille unique, il faudrait y faire h_2 nul et f_3 infini. Cela rendrait d'abord q' nul, puis n' et r' chacun égaux à $+1$; et enfin, p' égal à $\frac{1}{f_1}$. Alors les coefficiens différentiels relatifs à la réfrangibilité, deviendraient respectivement

$$\frac{\delta n'}{\delta i} = 0, \qquad \frac{\delta p'}{\delta i} = p', \qquad \frac{\delta q'}{\delta i} = 0, \qquad \frac{\delta r'}{\delta i} = 0.$$

L'indétermination du système antérieur se trouverait ainsi considérablement restreinte, puisqu'elle se réduirait à la seule valeur de sa distance focale principale. Nous pourrons, au besoin, introduire ultérieurement cette limitation dans nos calculs; mais, à moins que je ne l'annonce expressément, je continuerai de considérer le système antérieur comme effectivement binaire, ce qui le rendra propre à toutes les applications que nous voudrons lui donner.

32. Quant au reste de l'oculaire, je ne veux d'abord rien spécifier ici sur sa constitution, si ce n'est que les lentilles qui le composent sont fabriquées avec des verres de même nature que les précédentes. Je continuerai donc d'employer ses coefficients principaux et leurs variations, sous les formes générales applicables à un système quelconque, en les affectant seulement de deux primes, pour rappeler la situation ultérieure de ce second système, relativement au premier. Nous aurons ainsi, pour lui en général,

$$\frac{\delta n''}{\delta i} = n'' - 1 + \nu'', \qquad \frac{\delta p''}{\delta i} = p'' + \varpi'', \qquad \frac{\delta r''}{\delta i} = r'' - 1 + \rho'',$$

les fonctions ν'', ϖ'', ρ'' devant être déterminées, dans chaque cas d'application, conformément à la constitution particulière qu'on lui attribuera.

Par exemple, si ce second système devait se réduire aussi à deux lentilles, comme cela a lieu dans les lunettes terrestres polyaldes, et non polyaldes, où l'oculaire ne contient jamais que quatre verres, les expressions explicites qui s'y rapporteraient deviendraient toutes pareilles à celles du premier système, si ce n'est qu'il faudrait affecter chacun de leurs éléments constitutifs d'indices indicateurs de leur rang. Ainsi, dans ce cas, l'intervalle h des deux systèmes devrait s'écrire h_3, et l'intervalle des deux lentilles du second devrait s'écrire h_4; on aurait alors

$$n'' = 1 + \frac{h_4}{f_5}, \quad p'' = \frac{1}{f_4} + \frac{1}{f_5} + \frac{h_4}{f_4 f_5}, \quad q'' = h_4, \quad r'' = 1 + \frac{h_4}{f_4},$$

et en appliquant à chacune de ces équations la caractéristique δ, elles donneraient

$$\frac{\delta n''}{\delta i} = n'' - 1, \qquad \frac{\delta p''}{\delta i} = p'' + \frac{h_4}{f_4 f_5}, \qquad \frac{\delta q''}{\delta i} = 0, \qquad \frac{\delta r''}{\delta i} = r'' - 1,$$

puis, en chassant les distances focales de $\frac{\delta p''}{\delta i}$ qui les contient encore, il viendrait pareillement

$$\frac{\delta p''}{\delta i} = p'' + \frac{(n''-1)(r''-1)}{q''}.$$

Ainsi, lorsque nous aurons établi nos formules, en laissant le système postérieur quelconque, si nous voulons les appliquer au cas où ce second système sera pareillement binaire, comme dans les lunettes terrestres à oculaire quadruple, il suffira de faire, dans les résultats généraux,

$$\nu'' = 0, \qquad \varpi'' = \frac{(n''-1)(r''-1)}{q''}, \qquad \rho'' = 0.$$

33. Si nous voulions conserver invariablement, au système antérieur, l'état binaire, l'intervalle h qui le sépare du second devrait s'écrire h_3, comme je l'ai tout à l'heure remarqué. Mais si nous réduisons occasionnellement ce premier système à une lentille unique, h devrait s'écrire h_2. En conséquence, je continuerai à employer cette lettre, comme exprimant seulement l'intervalle des deux systèmes, quels qu'ils soient, sans spécialiser leur nature, nous réservant de le modifier ensuite selon les conditions d'applications que nous aurons adoptées.

§ IV. DÉVELOPPEMENT DES CONDITIONS ANALYTIQUES AUXQUELLES L'INSTRUMENT EST ASSUJETTI, TANT DANS SON ENSEMBLE QUE DANS LES SYSTÈMES PARTIELS QUI LE CONSTITUENT.

34. En résumant la discussion précédente, tout instrument dioptrique, ayant un objectif achromatique individuellement,

et un oculaire multiple composé d'un nombre quelconque de lentilles de même nature, devra être préparé de manière à satisfaire à trois conditions représentées par les trois équations suivantes, qui s'appliquent aux coefficients principaux de son oculaire.

$$(a) \qquad N = N'' + P''h_1,$$

$$(b) \qquad P'' = -\frac{N}{\Delta'},$$

$$(c) \qquad 0 = \left(\frac{\delta N''}{\delta i}\right) + h_1\left(\frac{\delta P''}{\delta i}\right).$$

La première (a) signifie que, dans la continuité d'action donnée à l'instrument, il produit un grossissement angulaire N sur les rayons de moyenne réfrangibilité. La seconde (b) exprime que les pinceaux incidents de cette réfrangibilité moyenne sortent de l'instrument sous forme de faisceaux composés de rayons parallèles entre eux, ce qui les prépare à être perçus par un observateur infiniment presbyte. La troisième (c), enfin, établit que les foyers de diverses couleurs, dérivés d'un même pinceau incident composé, se trouveront finalement amenés sur autant de droites parallèles entre elles, respectivement dirigées au point oculaire qui appartient à leur réfrangibilité propre. Donc, si la fonction H ou $\frac{Q}{N}$, qui exprime généralement la distance de ces points oculaires à la surface d'émergence, est assez petite pour que l'amplitude totale de leur dispersion y soit négligeable, tous ces foyers paraîtront se projeter sensiblement sur une même droite dirigée au point oculaire moyen; de sorte que leur superposition optique reproduira la sensation de leur composition première, dans une rétine qui serait placée de ma-

nière à les recevoir simultanément suivant cette commune direction.

Les différentiations que l'équation (c) indique doivent être effectuées sur les divers coefficients partiels qui composent les expressions de N″ et de P″, lesquelles sont, comme on l'a vu plus haut,

(2) $N'' = n'n'' + q'p'' + n'p''h, \qquad P'' = p'n'' + r'p'' + p'p''h.$

D'après le mode de partage que nous avons adopté, il faudra, dans ces opérations, traiter les coefficients n' p' q' r', comme appartenant à un système binaire. Mais il faudra laisser à ceux du système postérieur, qui sont affectés de deux primes, la forme générale qui convient à un système constitué d'une manière absolument quelconque; sauf que les lentilles y sont de même matière que dans le système antérieur, et sont aussi considérées comme ayant des épaisseurs centrales négligeables, comparativement à leurs autres éléments linéaires.

Si l'on élimine l'intervalle h entre les deux équations précédentes, en faisant usage de l'équation de condition générale qui lie entre eux les quatre coefficients de chaque système partiel, et qu'ensuite, dans le résultat, on remplace P″ par sa valeur conditionnelle $-\frac{N}{\Delta'}$, tirée de l'équation (b), on trouve

(3) $$p'' = -p'N'' - n'\frac{N}{\Delta'}.$$

Ceci est précisément la première des relations indépendantes de h, que nous avons obtenues page 45, § 21. Seulement elle est ici particularisée pour le cas d'un observateur infiniment presbyte, au lieu que sa forme alors était générale. Je

la rappelle et la mets ainsi en évidence, parce que nous en ferons un très-fréquent usage dans la suite de ces recherches. Pour caractériser son origine et celle des équations (2), page 45, dont elle dérive, je les appellerai désormais *les équations de continuité,* parce qu'en effet elles expriment seulement que le système objectif et les deux systèmes partiels qui composent l'oculaire total, forment un assemblage à travers lequel la lumière est transmise continûment, dans l'ordre de succession défini par les indices qui affectent leurs coefficients principaux.

Les trois équations (a), (b), (c) suffisent pour assurer à l'instrument les propriétés générales de produire un grossissement angulaire assigné N, d'être préparé pour un observateur infiniment presbyte, et d'être exempt de dispersion latérale. Leur réalisation exige seulement des intervalles h_1 et h_2 qu'ils soient positifs, laissant d'ailleurs leurs grandeurs absolues complétement indéterminées. Nous avons encore à notre disposition trois des coefficients généraux appartenant à chaque système partiel dont nous composons l'oculaire total, le quatrième coefficient dépendant de ceux-là par une équation de condition toujours subsistante. Donc, sauf la restriction du signe de h_1 et de h_2 nous avons en tout huit quantités disponibles pour satisfaire à trois conditions. Ainsi, dans la multiplicité des combinaisons qui pourront les remplir analytiquement, il faudra tâcher de démêler celles qui donneraient à l'instrument d'autres qualités que nous n'y avons pas attachées encore; par exemple, les plus petites valeurs d'incidences pour une même amplitude de champ apparent, et surtout une stabilité de bons effets qui ne puisse pas être détruite ou compromise par les légères

inexactitudes que l'exécution pratique ne peut pas absolument éviter. On va voir combien l'état explicite de nos formules et leur interprétation facile nous offriront, pour cela, de secours.

35. Je prends d'abord, dans l'équation (b), la valeur de P''; et je la substitue dans (a). Il en résulte

$$(a) \qquad h_{\prime} = -\Delta' + \frac{N''}{N}\Delta'.$$

Dans les applications, l'objectif est toujours convergent; et $-\Delta'$ exprime sa distance focale *actuelle* pour la distance convenue Δ des objets, de sorte qu'elle lui est toujours postérieure. L'expression trouvée ici pour l'intervalle $h_{\prime}$ nous apprend donc que l'éloignement du premier verre de l'oculaire, *au delà* du foyer actuel de l'objectif, est représenté *analytiquement* par $+\frac{N''}{N}\Delta'$. Ainsi, dans chaque instrument où N et Δ' sont donnés, la position réellement antérieure ou postérieure de ce verre relativement au foyer de l'objectif, résulte uniquement du signe de N''. Par exemple, l'instrument dioptrique fait-il voir les objets droits? Alors N est positif. Or, Δ' est toujours négatif dans l'application. Donc, pour un tel cas, les valeurs négatives de N'' rendront le produit $+\frac{N''}{N}\Delta'$ positif, et elles éloigneront réellement la première lentille oculaire au delà du foyer actuel de l'objectif. Au contraire, les valeurs positives de N'' la ramèneront en deçà de ce point. L'influence du signe de N'' sera inverse si N est négatif, c'est-à-dire, si l'instrument dioptrique donne des images renversées des objets; auquel cas N sera négatif. Mais il est toujours facile d'interpréter ses effets, en plaçant

la quantité $+\frac{N''}{\Delta'}\Delta'$ au delà ou en deçà du foyer de l'objectif, selon le signe positif ou négatif qu'elle acquiert dans chaque instrument considéré. Le passage d'un de ces états à l'autre s'opère lorsque N'' est nul, ce qui rend h_1 égal à $-\Delta'$, et amène la première lentille oculaire dans le foyer de l'objectif même. Dans ce cas, le grossissement angulaire propre à l'oculaire total étant égal à zéro, tous les rayons qui percent sa première lentille à son centre de figure, sortent de la dernière parallèlement à l'axe central. C'est le cas que nous avions prévu dans la discussion générale, page 33, § 11.

Ceci nous conduit à faire de l'équation (3) une application qui est en elle-même très-simple, mais qu'il est bon d'effectuer ici, parce qu'elle nous deviendra ultérieurement nécessaire. Elle a pour but de résoudre la question suivante :

36. La constitution d'un oculaire étant donnée, ainsi que la distance focale actuelle de l'objectif à laquelle on l'applique, on amène le premier verre de l'oculaire à une distance du foyer de l'objectif exprimée analytiquement par + D, la distance D devant être considérée comme positive si l'on place le verre *au delà* du foyer, et comme négative si on le place en deçà. On demande d'assigner les valeurs qui en résulteront pour N'' et pour N, c'est-à-dire, quel sera alors le grossissement angulaire propre que produira l'oculaire, et quel sera celui que produira l'instrument.

La condition de distance, qui est assignée, donne immédiatement

$$\frac{N''\Delta'}{N} = D.$$

Tirez de là N, et mettez-le dans l'équation de continuité (3),

qui est

$$(3)\qquad p'' = -p'N'' - \frac{n'}{\Delta'}N,$$

vous aurez alors N″. Tirez-en, au contraire, N″, et mettez-le dans la même équation; vous aurez N. On trouve ainsi :

$$N'' = -\frac{p''D}{n' + p'D}, \qquad N = -\frac{p''\Delta'}{n' + p'D}.$$

Ces valeurs, résultantes de celles de D, ne seront évidemment admissibles qu'autant qu'elles conduiront à des valeurs positives de h_1 et de h, quand on les substituera dans les équations (a), page 68, et (2), page 69. Mais l'amplitude de course que ces deux intervalles pourraient ainsi *analytiquement* recevoir, est bien plus grande que celle qu'on peut leur laisser effectivement parcourir dans les instruments réels. Par exemple, à ne considérer que l'équation (a), sous la forme que nous lui avons donnée page 71, toute valeur positive quelconque de D serait admissible, puisqu'elle ne ferait qu'accroître la valeur positive de h_1; et toute valeur négative de D qui n'excéderait pas Δ', serait admissible aussi, puisqu'elle laisserait encore h positif ou tout au plus nul; c'est-à-dire, que la première lentille de l'oculaire pourrait s'éloigner indéfiniment de l'objectif, ou s'en rapprocher jusqu'au contact, sans que l'instrument cessât d'être possible *analytiquement*. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on puisse donner à l'oculaire une si grande liberté de mouvement dans les applications réelles. L'expérience et le raisonnement s'accordent à montrer que la quantité $\frac{N''}{N}\Delta'$, ou D, qui exprime la distance de la première lentille oculaire à la première image réelle ou virtuelle formée par l'objectif, doit toujours être maintenue très-petite comparativement à la distance focale actuelle Δ'. Cela est en

effet nécessaire pour que chaque pinceau émané de cette image, en arrivant à la première lentille oculaire, se trouve assez délié pour ne couvrir qu'une très-petite portion de sa surface, afin que tous les rayons élémentaires de ce pinceau éprouvent des aberrations de sphéricité presque égales entre elles. Cette condition physique exige donc que le rapport $\frac{N''}{N}$ soit toujours une très-petite fraction et puisse être traité comme tel dans toutes les variétés d'instruments que l'on peut vouloir réaliser; comme aussi dans toute l'amplitude de course que l'on peut donner à l'oculaire de chaque instrument, si l'on veut le faire polyalde. Géométriquement, cela veut dire que *le grossissement angulaire* N'', *propre à un oculaire multiple ou simple, doit toujours être très-petit comparativement au grossissement angulaire total que l'on veut faire produire à l'instrument auquel cet oculaire doit être appliqué.*

37. Or, l'équation (3), entre N'' et N, donne

$$(3) \qquad \frac{N''}{N} = -\left(\frac{p''}{p'N} + \frac{n'}{p'\Delta'}\right).$$

Donc, lorsqu'on voudra former un oculaire qui s'applique à une distance focale donnée Δ', il faudra choisir les coefficients principaux n', p', p'' des systèmes partiels, ainsi que le grossissement angulaire total N que l'on veut faire produire à l'instrument, de manière que la quantité exprimée ici, dans le second membre, soit toujours une très-petite fraction de l'unité. Il conviendra, en outre, pour la stabilité des effets, qu'elle se trouve encore telle dans toute l'amplitude de variation que l'on pourrait vouloir pratiquement donner à N'' et à N, soit pour rendre l'instrument polyalde, soit seulement pour compenser, par une petite modification expérimentale des intervalles, les inexactitudes presque inévitables

du travail pratique. Le moyen le plus sûr et le plus direct pour se conserver ces avantages, consiste dans deux précautions : d'abord, c'est de prendre les coefficients p', p'' tels, que leur rapport individuel s'écarte peu de l'égalité. Car le grossissement angulaire N étant toujours un multiple plus ou moins considérable de l'unité dans les instruments où l'on emploie un oculaire complexe, la condition exigée de petitesse se trouvera ainsi assurée pour le terme $\frac{p''}{p'N}$; et elle le sera d'autant mieux, que N sera plus fort. Afin de l'étendre à l'autre terme $-\frac{n'}{p'\Delta'}$, il n'y a qu'à considérer que, dans celui-ci, le facteur $-\frac{n'}{p'}$ exprime la distance focale principale réciproque du système antérieur de l'oculaire, comme le montre l'expression générale de F_r formée page 42. Il suffira donc de faire en sorte qu'elle soit très-petite comparativement à la distance focale actuelle Δ' de l'objectif. Cela pourra toujours s'obtenir, soit en choisissant convenablement les coefficients n', p', pour qu'il en soit ainsi quand on préparera l'oculaire pour un objectif donné; soit, lorsque l'oculaire sera fabriqué, en ne l'appliquant qu'à des objectifs pour lesquels cette prédominance relative de Δ' aura lieu dans les circonstances de l'observation.

Quand la petitesse totale du rapport $\frac{N''}{N}$ sera ainsi assurée par l'atténuation individuelle des deux termes qui le composent, il en résultera une autre conséquence très-importante : c'est qu'il restera encore très-petit pour toutes les autres valeurs de N et de Δ' qui seront du même ordre de grandeur que celles pour lesquelles on l'aura primitivement établi. Alors l'oculaire ainsi constitué ne sera pas seulement applicable à un certain objectif spécial, et à un grossissement an-

gulaire total N, spécialement déterminé. Son effet pourra encore être très-bon quand on l'appliquera à d'autres objectifs, également achromatiques, d'une longueur focale analogue, avec lesquels il produira des grossissements angulaires différents, mais pareillement analogues pour l'ordre de grandeur. Tous les oculaires construits par des opticiens habiles présentent cette généralité d'application dans des limites très-étendues ; et ils la doivent aux circonstances que je viens de décrire, comme on peut le constater par le calcul numérique des coefficients principaux propres à leurs systèmes partiels. Dans ceux que j'ai ainsi examinés, le rapport $\frac{p''}{p'}$ a varié seulement depuis $+1,1$ jusqu'à $+2$; atteignant une seule fois cette dernière limite dans un oculaire polyalde, sorti des ateliers où l'on continue le nom de Dollond; et la valeur de $-\frac{n'}{p'\Delta'}$ s'est trouvée une fois aussi seulement élevée jusqu'à 0,03 dans une lunette de Ramsden décrite par M. Santini. Le raisonnement et l'expérience concourent ainsi pour que nous devions désormais admettre dans nos calculs les relations analytiques desquelles ces circonstances résultent.

38. L'expression de N en D trouvée plus haut, § 36, page 73, peut encore nous servir pour donner aux effets de l'oculaire un autre caractère important de stabilité. Cette expression est

$$N = -\frac{p''\Delta'}{n' + p'D}.$$

Dans les applications judicieusement réglées, la distance positive ou négative D n'est jamais que de quelques millimètres; et on lui permet rarement de s'élever jusqu'à $\frac{1}{25}$ de la distance focale Δ'. On se réserve d'ailleurs, comme je l'ai dit, la liberté

de la faire tant soit peu varier, même dans les appareils à grossissement fixe, pour leur donner l'ajustement le plus favorable avant de fixer définitivement les intervalles des lentilles qui les composent; car, tout changement de ces intervalles fait varier D. Or, on se placerait dans des conditions très-mauvaises, si l'on construisait l'oculaire de manière que ces modifications indispensables des intervalles pussent changer le grossissement angulaire N, non pas quant à sa grandeur, ce qui ne peut s'éviter, mais dans son signe; de sorte qu'un instrument destiné, par exemple, à donner des images droites, en donnât tout à coup de renversées, ou réciproquement. Mais, puisque l'on s'oblige toujours à maintenir D très-petit, on préviendra la possibilité de ces inversions de N, ou du moins on l'éloignera, en assurant son signe pour le cas où D est nul; c'est-à-dire, en choisissant les coefficients propres p'', n' des deux systèmes partiels de l'oculaire, de manière que leur rapport $\frac{p''}{n'}$ ait le même signe que l'on veut donner à N; car le facteur $-\Delta'$ est toujours positif dans les applications. Toutefois, pour se permettre cette liberté de choix, sans se priver des autres conditions qu'il peut être utile ou nécessaire d'introduire ultérieurement, il faut que le signe d'un des termes de la fraction, ou celui de tous deux, ne soit pas déjà fixé d'avance par la constitution trop limitée de l'appareil. Cela arriverait, par exemple, si l'oculaire projeté ne devait se composer que de deux lentilles. Car, les considérant ici comme infiniment minces, n' deviendrait nécessairement $+1$, pour la première; et p'', qui serait réciproque à la distance focale principale de la seconde, serait nécessairement négatif, parce qu'on n'emploie jamais que des lentilles convergentes dans ces constructions, pour ne

pas trop rétrécir l'étendue du champ. On ne pourrait donc plus alors disposer du signe du rapport $\frac{p''}{n'}$, ni de sa valeur, comme nous nous l'étions proposé.

Mais si l'on suppose que l'oculaire contienne au moins quatre lentilles, et qu'il soit destiné à faire produire des images droites, comme c'est le cas réel que nous avons en vue, on pourra assurer le signe positif de N pour des phases de valeurs bien plus étendues que celles que j'indiquais tout à l'heure, en faisant aussi le coefficient p' de même signe que n' et n''; puis s'astreignant à construire l'appareil pour des valeurs positives de D, ce qui placera la première lentille de l'oculaire au delà du foyer actuel de l'objectif. Car d'abord, par cet arrangement, N conservera évidemment son signe positif, pour toutes les valeurs positives de D; et il demeurera encore tel pour toutes les valeurs négatives de D, qui, multipliées par le coefficient p', ne donneront pas un produit moindre que n'. Dans l'amplitude de course que les valeurs positives de N pourront ainsi parcourir, les moindres répondront aux plus grandes valeurs positives de D, et inversement. C'est-à-dire, que le grossissement N décroîtra à mesure que le premier verre de l'oculaire sera porté plus loin au delà de l'image focale de l'objectif, et croîtra, au contraire, à mesure qu'il se rapprochera de cette image, ou même qu'il la dépassera, de manière à la rendre virtuelle, de réelle qu'elle avait été jusqu'alors. Cette combinaison stable dans ses conséquences est précisément celle que les opticiens réalisent dans la confection habituelle des lunettes terrestres. Conformément à ces principes qu'ils ignorent, ils les préparent en réalité pour la valeur moyenne qu'ils veulent donner à la distance positive + D, ou au grossissement an-

gulaire positif qui y correspond. Puis, lorsque l'instrument total est confectionné, avec toutes les précautions que la pratique les instruit à prendre, pour qu'il produise de bons effets dans les circonstances qu'ils se sont prescrites, ils cherchent par une petite variation de l'intervalle h, compris entre les systèmes partiels binaires, à découvrir la valeur prochaine de N ou de D pour laquelle il donne les meilleurs résultats possibles. Quand ils l'ont reconnue, si l'instrument est à grossissement déterminé, ils fixent l'intervalle h dans cette position ; et s'il doit être polyalde, ils y marquent le milieu de la course qu'ils lui font parcourir ; puis ils l'étendent de part et d'autre de ce terme moyen autant qu'ils jugent les effets assez satisfaisants pour être admis.

39. Des considérations essentielles pour assurer la dispersion rectiligne des foyers dans l'instrument total, et pour agrandir l'amplitude du champ qu'il peut embrasser, nous montreront bientôt qu'il convient de faire les coefficients n' et r' tous deux négatifs. Ceci combiné avec la règle précédente exige donc que p' et p'' soient pareillement négatifs tous deux, comme n'. J'énonce par avance cette nouvelle condition, pour compléter les nécessités de correspondance entre les trois coefficients n', p' et p'' ; elles portent seulement sur l'identité de leur signe négatif, non sur leurs valeurs. Ce caractère existe dans tous les oculaires quadruples fabriqués en Angleterre, en France ou en Allemagne, par des opticiens habiles, et dont j'ai pu examiner les éléments.

Mais, pour admettre analytiquement ces conditions de signes, il devient essentiel de s'assurer qu'elles se concilieront avec des valeurs positives des intervalles h_1 et h. Car ceci est indispensable pour la possibilité réelle de l'instrument.

D'abord il n'y aura aucune difficulté relativement à h_1. Car, prenant, comme nous le supposons, D positif, conséquemment N'' négatif, dans la circonstance moyenne pour laquelle nous voulons préparer l'oculaire, lorsqu'on introduira cette quantité dans l'équation (a), page 71, elle ne fera qu'augmenter la partie déjà positive de h_1, qui est exprimée par $-\Delta'$; de sorte que h_1 en résultera positif comme il doit l'être. Lorsque l'instrument sera construit dans de telles conditions, si nous rapprochons l'oculaire de l'objectif jusqu'à rendre D nul ou même négatif, pour accroître le grossissement, nous n'étendrons jamais D, dans ce dernier sens, qu'à des valeurs de quelques millimètres, qui seront ainsi des fractions très-petites de $-\Delta'$. Le signe positif de h_1 se trouvera donc assuré dans tous ces cas.

Quant au signe analytique de h, il résultera des valeurs que cette lettre peut acquérir dans les deux équations de continuité (2) de la page 69, où elle se trouve associée aux divers éléments constitutifs de l'oculaire, ainsi qu'au grossissement angulaire total N, et à la distance focale $-\Delta'$ de l'objectif, dont le rapport constitue P''. Mais déjà l'équation entre D et N, à laquelle nous nous sommes assurés de satisfaire, est déduite de celles-là même, de sorte qu'elle équivaut à l'une d'entre elles. Il ne reste donc qu'à obtenir la même certitude pour l'autre. A cet effet, je prends celle dont le premier membre est égal à P''. J'y remplace ce coefficient par sa valeur qui doit être $-\frac{N}{\Delta'}$ d'après l'équation (b). Puis, divisant les deux membres par $p'p''$, elle prend cette forme

$$-\frac{N}{p'p''\Delta'}=\frac{r'}{p'}+\frac{n''}{p''}+h.$$

D'après nos conventions précédentes, le produit $p'p''$ sera

positif, ainsi que N. Le facteur $-\Delta'$ ou $-\frac{1}{\Delta'}$ sera également positif, à cause de la nature toujours convergente de l'objectif. Conséquemment le premier membre de l'équation est positif et exprime une ligne. Il faut donc que le second ait le même caractère. Or, il se compose en effet de trois lignes, dont la première $\frac{r'}{p'}$ est la distance focale principale directe du système partiel antérieur; la seconde $\frac{n''}{p''}$ est la distance focale réciproque du système postérieur prise négativement; et la troisième est l'intervalle h lui-même, dont la lettre représentative est seule astreinte à être positive, par la nature de l'élément physique qu'elle est destinée à exprimer.

Maintenant, lorsque l'on introduit dans la constitution de l'appareil les conditions les plus favorables pour assurer son achromatisme, et pour étendre le champ qu'il peut embrasser, ce dont nous allons nous occuper dans un moment, on est immédiatement conduit à des combinaisons telles, que la somme des deux quantités $\frac{r'}{p'}+\frac{n''}{p''}$ est à la vérité positive comme h doit l'être; mais sa valeur ne forme jamais qu'une fraction assez petite de la quantité positive totale $-\frac{N}{p'p''\Delta'}$, à laquelle le second membre doit être égal. Il s'ensuit donc que, pour compléter l'égalité, il faut donner à h, dans ce second membre, une valeur positive, ce qui assure la possibilité de l'instrument; et cette valeur complémentaire de h est d'autant plus grande que la somme $\frac{r'}{p'}+\frac{n''}{p''}$ est moindre, comparativement à la quantité totale $-\frac{N}{p'p''\Delta'}$. Cette con-

dition de prudence se trouve réalisée dans toutes les lunettes à oculaire quadruple de Dollond, de Ramsden, de Frauenhoffer, dont j'ai examiné les éléments; et elle résulte des petites valeurs qui y sont toujours attribuées aux coefficients numériques r' n''. Par exemple, dans un oculaire polyalde auquel Dollond voulait donner une grande étendue de course, la somme $\frac{r'}{p'}+\frac{n''}{p''}$ n'est que $\frac{1}{3}$ de la valeur du premier membre, pour le plus faible grossissement N qu'il voulait obtenir. De sorte, que l'instrument déjà amplement possible pour ce cas, l'est aussi à plus forte raison dans tous les grossissements plus considérables, où il ne faut qu'accroître l'intervalle primitif h, en même temps que N. Ramsden a élevé cette proportion jusqu'à $\frac{1}{2}$ dans une excellente lunette terrestre à grossissement fixe appartenant à l'observatoire de Padoue, et qui a été décrite par M. Santini. Dans les meilleures constructions de Frauenhoffer, cette proportion est intermédiaire, à peu près $\frac{4}{10}$. Il conviendra donc de s'astreindre à ce qu'elle oscille autour de ces valeurs.

41. En outre, dans tous ces instruments le coefficient n'' se trouve toujours négatif comme n'. On est encore conduit à lui donner ce signe par des considérations que j'indiquerai plus loin. Alors les deux termes $\frac{r'}{p'}+\frac{n''}{p''}$ qui s'ajoutent à h, sont l'un et l'autre positifs. Analytiquement, cela a pour effet d'équilibrer la même fraction de $-\frac{N}{p'p''\Delta'}$, par des valeurs de ces deux rapports individuellement moindres que si on les faisait de signe contraire entre eux. Géométriquement, cela exempte d'allonger les distances focales directes et réci-

proques qu'ils représentent, plus que ne l'exigerait la nécessité. J'adopterai donc provisoirement ce résultat de pratique dans la suite des raisonnements; et ainsi je supposerai désormais que les cinq coefficients n', p', r', n'', p'', sont tous négatifs, condition dont la convenance se manifestera encore bientôt plus évidemment. Comme nous faisons le premier système partiel binaire, q' y est essentiellement positif, puisqu'il exprime l'intervalle des deux lentilles qui le composent. Il en sera encore de même pour q'', si l'on veut que le second système partiel soit également binaire. Quant à r'', on va voir qu'il convient seulement de le faire très-petit, en lui donnant d'ailleurs le signe qu'on voudra. On le trouve en effet toujours employé avec ce caractère constant de petitesse, joint à des alternatives opposées de signes, dans les divers oculaires construits par Dollond, Ramsden et Frauenhoffer. Néanmoins je montrerai plus loin, par diverses considérations, que les valeurs positives de ce coefficient ont un avantage marqué sur les négatives.

42. Pour que les combinaisons auxquelles nous voulons arriver soient d'un bon usage pratique, il faut qu'elles amènent le point oculaire de l'instrument total au delà de la dernière surface réfringente; ou, s'il se trouve intérieur, par un cas de nécessité défavorable, du moins devra-t-il être très-peu enfoncé en deçà. C'est même sous ces restrictions expresses que la situation droite ou renversée des images coïncide avec le signe positif ou négatif de N. Il devient donc essentiel d'assurer l'accomplissement de cette condition, et de voir si l'on peut la concilier avec les relations de signes qui nous ont paru convenables à établir entre les divers coefficients partiels qui composent l'oculaire total.

Cela revient à discuter quel sera le signe de la quantité H qui représente la distance du point oculaire de l'instrument total au-devant de sa dernière surface, et dont l'expression explicite en fonction de ses coefficients généraux est, d'après la page 25,

$$H = \frac{Q}{N}.$$

Si H est négatif, le point oculaire de l'instrument lui sera extérieur; si H est positif, ce point sera intérieur; et, dans ce dernier cas surtout, il faudra que $\frac{Q}{N}$ soit une très-petite quantité.

Or, quand nous avons décomposé l'instrument total dans ses deux parties constituantes, l'objectif et l'oculaire, puis l'oculaire lui-même dans ses deux systèmes partiels, nous avons trouvé entre les coefficients principaux de ces subdivisions, les relations suivantes, qui ont été établies pages 44 et 45, § 19 et 21,

$$N' = R''N - P''Q, \qquad p' = r''P'' - p''R''.$$

Nous sommes convenus de considérer le système objectif tout entier comme n'ayant qu'une épaisseur centrale négligeable, ce qui rend N' égal à + 1, pour les rayons de toutes réfrangibilités. Admettant donc cette restriction, je prends dans la première équation la valeur de $\frac{Q}{N}$, ou H, et j'en tire

$$H = \frac{R''}{P''} - \frac{1}{NP''}.$$

Je prends maintenant la valeur de $\frac{R''}{P''}$ dans la deuxième équation; et en la substituant ici, j'ai :

$$H = \frac{r''}{p''} - \frac{p'}{p''P''} - \frac{1}{NP''}.$$

Cette expression de H est générale pour tous les instruments

dioptriques dont les systèmes constituants forment un ensemble continu, astreint aux conditions de minceur et d'achromatisme que nous avons admises. Elle s'applique à toutes les portées de vue pour lesquelles on peut vouloir les préparer, ainsi qu'à toutes les espèces de rayons lumineux qu'on peut y supposer transmis. Maintenant, pour la plier à notre application actuelle, il faut y attribuer à P'' la valeur, soit générale, soit particulière, qui convient à un observateur infiniment presbyte, c'est-à-dire $-\frac{N}{\Delta'}$. Alors, dans ce cas spécial, elle devient

$$H = \frac{r''}{p''} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N} + \frac{\Delta'}{N^2}.$$

Ainsi restreinte, elle s'applique à l'espèce de rayons qui ont été assujettis à faire leur émergence finale sous forme de faisceaux. Dans l'approximation à laquelle nos formules se bornent, ces rayons sont ceux de moyenne réfrangibilité. On devra donc calculer H avec les valeurs des coefficients qui leur sont propres.

Examinons maintenant les particularités d'application que cette expression ainsi limitée nous présente. Nous voulons construire un instrument où N soit positif, et comme nous employons un objectif convergent, Δ' est négatif. D'après cela le dernier terme $\frac{\Delta'}{N^2}$ aura toujours une valeur négative, mais généralement fort petite, Δ' y étant divisé par le carré de N. Quant au terme précédent, le facteur $\frac{\Delta'}{N}$ y sera négatif; et puisque nous sommes convenus de faire p' de même signe que p'', le produit qui constitue ce terme sera pareillement négatif. Reste donc le premier terme $\frac{r''}{p''}$ qui exprime la

distance focale principale du second système partiel. Nous étant astreint déjà à faire p'' négatif comme p', ce terme-là restera négatif, si nous faisons r'' positif; mais il s'intervertira et deviendra positif, si nous faisons r'' négatif. Pour rendre ces alternatives incapables d'intervertir le signe de H, et lui assurer le caractère négatif, de la manière la plus simple, nous n'avons qu'à faire r'' fort petit, ce qui rendra $\frac{r''}{p''}$ d'autant moins sensible, et son signe propre indifférent par le peu d'effet qu'il exercera.

Cette disposition se remarque, comme je l'ai dit, dans tous les oculaires quadruples que j'ai déjà mentionnés. Géométriquement elle signifie que la distance focale principale propre au système binaire le plus rapproché de l'œil est extrêmement courte. Or, en désignant les quatre lentilles et leurs intervalles par les indices qui marquent leur rang dans l'instrument total, l'expression explicite de r'' propre au second système est, d'après la page 66 :

$$r'' = 1 + \frac{h_4}{f_4}.$$

Comme les oculaires que nous considérons sont toujours composés de lentilles convergentes, la distance focale f_4 sera négative. Au contraire h_4 est essentiellement positif, puisqu'il exprime l'intervalle des deux lentilles du système considéré. Ainsi, pour rendre r'' très-petit, il faudra, dans ce système, faire l'intervalle h_4 presque égal à la distance focale principale f_4 de la première lentille; et, à volonté, plus grand ou moindre, ou même tout à fait égal, selon ce qui s'accordera le mieux avec les autres dispositions particulières à chaque appareil. Si l'on examine les valeurs simultanées de h_4 et de f_4 dans les divers oculaires que j'ai mentionnés, on verra aussitôt

que cette condition de presque égalité y est toujours remplie.

Dans les applications, la valeur absolue de H ne doit jamais être que de quelques millimètres. Cette circonstance exige que le coefficient p'' ne soit pas très-petit par lui-même comparativement à p', ce qui agrandirait démesurément les termes qui l'ont pour dénominateur. Ceci se concilie très-bien avec la limitation du rapport $\frac{p'}{p''}$, qui sert pour assurer la permanence du sens de N, comme nous l'avons remarqué, page 75. Mais afin de connaître les combinaisons qui pourraient donner à p'' cet excès de petitesse relative, considérons ce coefficient dans un système purement binaire. Alors, en conservant la notation ordinale que nous venons d'appliquer à r'', l'expression explicite de p'' sera, d'après la page 66 :

$$p'' = \frac{1}{f_4} + \frac{1}{f_5} + \frac{h_4}{f_4 f_5};$$

conséquemment

$$\frac{1}{p''} = \frac{f_4 f_5}{f_4 + f_5 + h_4}.$$

On voit donc que le terme de H qui est divisé par p'' deviendra très-grand, si la quantité $f_4 + f_5 + h_4$ était très-petite, et qu'il deviendrait même infini si elle était nulle ; auquel cas l'intervalle des deux lentilles qui composent le second système partiel binaire, serait égal à la somme de leurs distances focales prises négativement. Alors H résulterait aussi très-grand ou même infini dans un cas pareil, au lieu de rester égal à quelques millimètres, comme la commodité de l'instrument l'exige, pour que l'œil placé au point oculaire moyen embrasse un champ de vision suffisamment étendu autour de l'axe, sans être obligé de donner à la dernière lentille des dimensions exagérées. Mais cet incon-

vénient sera prévenu de la manière la plus sûre et la plus simple en faisant r'' très-petit, ou h_4 très-peu différent de $-f_4$, comme nous l'avons prescrit tout à l'heure; puisqu'il en résultera évidemment $\frac{1}{p''}$, peu différent de f_4, dans le même ordre de quantités. Lorsque r'' devient tout à fait nul, la distance focale principale $\frac{r''}{p''}$ du système binaire ainsi constitué, s'anéantit complétement, parce que les faisceaux de rayons parallèles qui feraient leur incidence sur la première lentille de ce système, ont alors leurs foyers dans le plan de la seconde, d'où se compte la distance focale principale du système entier.

43. Les aberrations de sphéricité et d'achromatisme mettent des bornes à la force des grossissements angulaires que l'on peut employer avec avantage pour chaque longueur de la distance focale du système objectif. En examinant sous ce point de vue les valeurs du rapport $\frac{\Delta'}{N}$, admises dans les fabrications les plus parfaites, la longueur négative qu'il exprime se trouve égaler, ou même quelquefois surpasser celle que l'on veut d'ordinaire donner à H. Or, H se compose non-seulement de ce rapport multiplié par $\frac{p'}{p''}$, mais encore du terme $\frac{\Delta'}{N}$, qui est pareillement négatif, et du terme $\frac{r''}{p''}$ qui prend ce même signe quand on fait r'' positif. Il est donc généralement désirable que le rapport $\frac{p'}{p''}$ supposé positif, soit fait moindre que 1, pour affaiblir son produit par $\frac{\Delta'}{N}$ qui est le terme principal de H; et cela devient surtout nécessaire

lorsque r'' étant positif, le terme $\frac{r''}{p''}$ devient négatif comme les deux autres. En effet, cette condition fractionnaire du rapport $\frac{p'}{p''}$ existe dans tous les oculaires que j'ai mentionnés comme modèles ; et la fraction est plus faible dans ceux où $\frac{r'}{p''}$ est positif.

44. Dans toute la discussion précédente, nous avons supposé l'instrument ajusté de manière que les images finales de moyenne réfrangibilité fussent adaptées au mode de vision d'un observateur infiniment presbyte, ce qui exige que leur distance focale Δ_f soit infinie ; et l'expression de H que nous avons discutée, était spécialement calculée pour cette circonstance. Mais, dans les applications usuelles, où l'instrument devra être ajusté pour une portée de vue restreinte, on peut se demander si la valeur de H, propre à cette même réfrangibilité moyenne, ne deviendrait pas fort différente, de sorte que les mêmes considérations ne s'y appliqueraient pas. Ceci est une question évidemment essentielle à éclairer.

Pour cela je reprends, dans le § 24, page 50, l'équation qui détermine généralement les Δ_f, sous les conditions de constitution et d'approximation que nous avons admises, c'est-à-dire, lorsque l'instrument employé est pourvu d'un objectif achromatique n'ayant qu'une épaisseur centrale négligeable, et dont la distance focale actuelle est Δ' dans l'application aux objets observés. Cette équation est :

$$\frac{1}{\Delta_f - \mathrm{H}} = \mathrm{N}\left(\mathrm{P}'' + \frac{\mathrm{N}}{\Delta'}\right).$$

Soit $+\Omega$ la distance de la vision distincte pour l'observateur que nous considérons. Je place le centre de sa pupille au

point oculaire propre aux rayons de moyenne réfrangibilité, et je suppose qu'il ait ajusté l'instrument de manière à percevoir le plus nettement possible les images qui y correspondent. Alors, pour ces images, Δ_{f} — H sera égal à $+\Omega$, et le grossissement angulaire N, ainsi que le coefficient P″, auront les valeurs relatives à la réfrangibilité moyenne. Tirant donc P″ de l'équation ainsi spécialisée, elle donne

$$P'' = -\frac{N}{\Delta'} + \frac{1}{N\Omega},$$

ou encore

$$P'' = -\frac{N}{\Delta'}\left(1 - \frac{\Delta'}{N^2\Omega}\right).$$

Or, le P″ déduit de ces expressions, différera toujours extrêmement peu de $-\frac{N}{\Delta'}$, que nous avons vu être sa valeur dans le cas d'un presbytisme illimité. Car, en le considérant sous sa seconde forme, le terme qui est associé à l'unité sous la parenthèse sera toujours une très-petite fraction. En effet, en vertu des restrictions imposées par les aberrations de sphéricité, le rapport $\frac{\Delta'}{N}$, employé dans l'exécution pratique, s'écarte peu de 21 millimètres et s'élève rarement jusqu'à 22; tandis que la distance Ω peut être évaluée en moyenne à 220. Ainsi $\frac{\Delta'}{N\Omega}$ sera, pour l'ordinaire, environ $\frac{1}{10}$. Or, devant être divisé une fois de plus par N pour former $\frac{\Delta'}{N^2\Omega}$, ce second quotient sera encore bien plus faible, devenant par exemple $\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{200}$ si N est seulement égal à 10 ou à 20. Il exercera donc bien peu d'influence sur H, quand on substituera la valeur de P″ dans son expression générale, pag. 84, laquelle est :

$$H = \frac{r''}{p''} - \frac{p'}{p''P''} - \frac{1}{NP''}.$$

En effet, cette substitution donne

$$H = \frac{r''}{p''} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta'}{N^2\Omega}\right)} + \frac{\Delta'}{N^2}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta'}{N^2\Omega}\right)}.$$

D'après l'appréciation numérique que nous venons de faire du terme divisé par Ω, on voit que, si la valeur de H a été restreinte à des limites convenables de grandeur pour le cas d'un presbytisme illimité, ce qui la borne à un petit nombre de millimètres, elle sera excessivement peu différente, pour les mêmes espèces de rayons, quand l'instrument sera ajusté pour une vue ordinaire. C'est un résultat qu'il importait d'établir, afin de constater la suffisance de ce premier mode de préparation.

45. Lorsque nous serons parvenus à assurer la dispersion rectiligne des foyers dans l'instrument total, comme nous le ferons tout à l'heure, en anéantissant les variations chromatiques de N, les différents foyers colorés, dérivés d'un même pinceau incident de lumière naturelle, se trouveront, ici où l'observateur est infiniment presbyte, placés sur autant de lignes droites parallèles entre elles, dont chacune se dirigera au point oculaire correspondant à sa réfrangibilité propre. Il est donc très-essentiel que ces divers points oculaires se trouvent aussi rapprochés que possible les uns des autres; et la perfection consisterait à ce qu'ils fussent tout à fait coïncidents. Dans l'analyse, cela revient à rendre les variations chromatiques de H nulles ou insensibles, en vertu de la composition de cette quantité. Pour y parvenir, il faut appliquer la caractéristique chromatique δ, aux divers termes dont l'expression générale de H se compose, en y traitant le coefficient N comme constant, puisque nous anéantirons

tout à l'heure sa variation individuelle. Or, cette expression générale est :

$$H = \frac{r''}{p''} - \frac{p'}{p''P''} - \frac{1}{NP''}.$$

Employant donc la caractéristique δ, comme signe de variations infiniment petites, on aura

$$\delta H = \delta\left(\frac{r''}{p''}\right) - \frac{1}{P''}\,\delta\left(\frac{p'}{p''}\right) + \left(\frac{p'}{p''} + \frac{1}{N}\right)\frac{\delta P''}{P''^2}.$$

Maintenant que les différentiations relatives à P'' sont effectuées, nous devons remplacer ce coefficient par sa valeur spéciale $-\frac{N}{\Delta'}$, qui fait sortir sous forme de faisceaux les rayons appartenant à la réfrangibilité moyenne, autour de laquelle s'exerce notre caractéristique δ. On aura ainsi pour ce cas particulier de notre application,

$$\delta H = \delta\left(\frac{r''}{p''}\right) + \frac{\Delta'}{N}\,\delta\left(\frac{p'}{p''}\right) + \frac{\Delta'^2}{N^2}\left(\frac{p'}{p''} + \frac{1}{N}\right)\delta P''.$$

Je laisse $\delta P''$ simplement indiqué, parce que son expression finale ne pourra être obtenue sous une forme explicite et applicable qu'après que nous aurons ramené toute la constitution de l'instrument à dépendre d'un petit nombre de constantes fondamentales, dont nous fixerons les limites de valeurs admissibles. Mais je vais de suite effectuer les opérations sur les autres termes, en m'appuyant sur les formes des variations assignées dans la section précédente aux divers coefficients principaux des systèmes optiques quelconques.

Considérant donc d'abord le premier terme de δH, j'y remplace p'' par sa valeur explicite tirée de l'équation générale

$$n''r'' - p''q'' = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{r''}{p''}=\frac{q''r''}{n''r''-1}.$$

Pour rester dans les applications réelles, je suppose le second système partiel binaire comme le premier. Alors q'' représente l'intervalle des lentilles qui le composent, ce qui rend cette lettre constante pour la caractéristique δ. En outre, dans cette même limitation, si n est l'indice de réfraction moyen pour l'espèce de verre dont toutes les lentilles de l'oculaire sont faites, et que l'on désigne le rapport $\frac{\delta n}{n-1}$ par δi, $\frac{\delta n''}{\delta i}$ sera $n''-1$; et $\frac{\delta r''}{\delta i}$ sera $r''-1$, comme nous l'avons reconnu page 66, § 32. Cela posé, en appliquant la caractéristique δ comme signe de variations infiniment petites, ainsi que nous sommes convenus de le faire, on aura, après quelques réductions faciles,

$$\delta\left(\frac{r''}{p''}\right)=q''\frac{[1-r''+(1-n'')r''^2]}{(n''r''-1)^2}\,\delta i.$$

Je passe au terme suivant où la variation s'applique au rapport $\frac{p'}{p''}$. Pour celui-ci je fais, par abréviation :

$$\psi'=\frac{(n'-1)(r'-1)}{p'q'}, \qquad \psi''=\frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''}.$$

Alors, en supposant le second système binaire, comme dans l'opération précédente, on aura, d'après les §§ 31 et 32, pages 65 et 66 :

$$\frac{\delta p'}{\delta i}=p'(1+\psi'), \qquad \frac{\delta p''}{\delta i}=p''(1+\psi''),$$

conséquemment

$$\delta\left(\frac{p'}{p''}\right)=\frac{p'}{p''}(\psi'-\psi'')\delta i,$$

et par suite

$$\frac{\Delta'}{N}\delta\left(\frac{p'}{p''}\right)=\frac{\Delta'p'}{Np''}(\psi'-\psi'')\delta i.$$

Tel est donc le second terme de δH. Je le réunis au premier que nous avons formé, et au dernier qui sera développé plus tard. J'obtiens ainsi l'expression complète de δH, dans tous les oculaires quadruples, astreints aux conditions de construction, d'achromatisme et d'émergence finale que nous avons admises. Elle est alors

$$\delta H = \left[q''\frac{[1-r''+(1-n'')r''^2]}{(n''r''-1)^2} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}(\psi'-\psi'') + \frac{\Delta'^2}{N^2}\left(\frac{p'}{p''}+\frac{1}{N}\right)\frac{\delta P''}{\delta i}\right]\delta i.$$

Si, en plaçant toujours la pupille au point oculaire moyen, on ne voulait pas supposer l'observateur infiniment presbyte, mais lui attribuer une portée de vue finie, pour laquelle la distance de la perception la plus distincte fût Ω, il faudrait reprendre l'expression générale de δH, où P″ n'est pas encore particularisée; puis, en développant, comme tout à l'heure, les variations de $\frac{r''}{p''}$ et $\frac{p'}{p''}$ qui y sont indiquées, on aurait

$$\delta H = \left[q''\frac{[1-r''+(1-n'')r''^2]}{(n''r''-1)^2} - \frac{p'}{p''P''}(\psi'-\psi'') + \frac{1}{P''^2}\left(\frac{p'}{p''}+\frac{1}{N}\right)\frac{\delta P''}{\delta i}\right]\delta i.$$

Alors, quand on aurait réalisé explicitement le coefficient différentiel $\frac{\delta P''}{\delta i}$, il ne faudrait pas donner à P″ la valeur particulière $-\frac{N}{\Delta'}$, mais celle plus générale qui convient à la distance Ω de la vision distincte, et qui est :

$$P'' = -\frac{N}{\Delta'}\left(1-\frac{\Delta'}{N^2\Omega}\right),$$

comme nous l'avons trouvé tout à l'heure, page 90. Toutefois, comme nous l'avons reconnu aussi alors, cette nouvelle valeur de P″ ne différera jamais de la première que dans une proportion très-faible; de sorte qu'on pourra, presque sans erreur, substituer indifféremment l'une ou

l'autre dans l'expression de δH; et cela sera d'autant moins inexact que les termes de δH, où cette substitution devra s'opérer, n'auront jamais par eux-mêmes que des valeurs très-restreintes dans les instruments que nous construirons, comme on en verra plus loin la preuve quand nous les réaliserons numériquement

Pour apprécier l'étendue des valeurs que pourra prendre l'expression totale de δH, il faut d'abord examiner celles que devra recevoir le facteur commun δi. En supposant toutes les lentilles des deux systèmes partiels, faites avec un même crown-glass ordinaire, où la valeur moyenne de l'indice de réfraction n soit 1,536, la valeur de δi, calculée depuis la moyenne réfrangibilité jusqu'aux extrémités perceptibles du spectre, est moindre que 0,020, suivant les mesures de Frauenhoffer. Encore ne s'élèverait-elle jusque-là que dans le spectre formé par un trait direct et très-vif de lumière solaire; de sorte que dans les observations d'objets terrestres, δi doit rester toujours bien au-dessous de cette évaluation.

Passant aux termes renfermés dans la parenthèse, je considère d'abord le premier d'entre eux. Si r'' était tout à fait nul, ce terme se réduirait à q''; et lorsque r'' sera fort petit, comme nous avons projeté de le faire, il s'écartera très-peu de cette valeur. Or, le coefficient q'' exprime l'intervalle des deux lentilles qui composent le second système binaire. Il conviendra donc de borner cet intervalle à des longueurs médiocres pour restreindre son influence individuelle sur δH.

Le terme suivant se compose du terme correspondant de H, multiplié par $\psi' - \psi''$. Il faudra donc tâcher d'affaiblir ce facteur numérique autant que cela pourra se concilier avec

les autres conditions auxquelles les indéterminées de l'appareil doivent satisfaire. Je le trouve presque nul dans l'oculaire de Padoue; et il est toujours fractionnaire dans ceux de Frauenhoffer.

Ces derniers présentent généralement une particularité qui contribue à ce résultat. Pour la développer, je remplace, dans ψ' et ψ'', les coefficients principaux des systèmes partiels par leurs valeurs explicites, relatives aux deux systèmes binaires disposés consécutivement, lesquelles ont été déjà formées, pages 64 et 66, §§ 31 et 32. J'obtiens ainsi

$$\psi' - \psi'' = \frac{h_2}{h_2 + f_2 + f_3} - \frac{h_4}{h_4 + f_4 + f_5} = \frac{h_2(f_4 + f_5) - h_4(f_2 + f_3)}{(h_2 + f_2 + f_3)(h_4 + f_4 + f_5)}.$$

Dans les oculaires de Frauenhoffer, $f_4 + f_5$ est toujours très-peu différent de $f_2 + f_3$, et ces deux sommes y sont, en moyenne, egales entre elles. $\psi' - \psi''$ devient donc alors proportionnel à $h_2 - h_4$, c'est-à-dire à la différence des intervalles propres à chacun des systèmes partiels combinés. Comme ces intervalles sont toujours peu étendus, et peu inégaux, la petitesse de leur différence assure celle de $\psi' - \psi''$.

J'arrive enfin au dernier terme qui, dans le cas du presbytisme illimité, peut se mettre sous la forme $\left(\mathrm{H} - \frac{r''}{p''}\right)\frac{\Delta'}{\mathrm{N}} \cdot \frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta i}$. Le second facteur est numérique, et sa valeur, qui sera généralement positive dans les oculaires que nous formerons, s'y élèvera rarement jusqu'au nombre 2. Étant multipliée par $\mathrm{H} - \frac{r''}{p''}$ qui sera toujours une quantité négative, le produit résultera négatif. Il contribuera ainsi quelque peu à affaiblir les deux termes précédents, qui se trouveront toujours tous deux négatifs.

46. Les précautions déjà prises pour atténuer individuel-

lement ces termes, étant jointes à la petitesse propre du facteur δi, renfermeront ainsi les valeurs de δH dans d'étroites limites; de sorte que les points oculaires correspondants aux réfrangibilités diverses, se trouveront répartis à très-peu de distance les uns des autres sur une petite étendue de l'axe de l'instrument. Quand ils seront ainsi disposés, l'étendue de la pupille achèvera de rendre leur dispersion insensible, parce que, en supposant le centre de cet organe placé au point oculaire moyen, les axes des pinceaux émergents, qui se croiseront dans les autres, seront reçus et embrassés par la pupille à peu près aussi complétement que s'ils étaient en exacte coïncidence. Pour obliger l'œil à prendre cette place, on adapte au tuyau des oculaires, postérieurement à la dernière lentille, un bouchon métallique percé d'une petite ouverture oculaire appelée *œilleton,* que l'on fait répondre à une distance de cette lentille à peu près égale à la moitié de la valeur de H, calculée pour les rayons de moyenne réfrangibilité; et le globe de l'œil est censé devoir s'appliquer contre cette ouverture. Mais l'interposition des cils l'en tient réellement un peu éloigné, ce qui amène le centre de la pupille sur la portion de l'axe où les points oculaires se trouvent répartis. Si toutefois leur dispersion, ainsi éprouvée, se trouve accidentellement trop grande pour que les foyers de diverses couleurs semblent suffisamment rassemblés, on est contraint de rétrécir le champ que l'instrument embrasse, afin de rendre les axes des faisceaux émergents moins inclinés à l'axe central. En effet, cette opération rapproche optiquement ceux de ces axes qui vont aboutir aux points oculaires divers, puisqu'ils coïncideraient exactement s'ils étaient tous ramenés sur l'axe

central lui-même. Mais une telle correction ne s'obtient qu'aux dépens d'une des qualités les plus désirables de l'instrument; de sorte qu'il est bien mieux de la prévenir, en restreignant les variations chromatiques de H, dans une amplitude assez petite pour qu'on puisse les tolérer.

47. J'arrive enfin au développement de l'équation

$$(c) \qquad 0 = \frac{\delta N''}{\delta i} + h_1 \frac{\delta P''}{\delta i},$$

laquelle, anéantissant les variations chromatiques du coefficient N, assure la dispersion rectiligne des foyers pour l'observateur infiniment presbyte. Cette opération, ainsi que nous l'avons expliqué page 69, doit s'effectuer sur les expressions générales de N'' et de P'', que nous avons trouvé être

$$(2) \quad N'' = n'n'' + q'p'' + n'p''h, \qquad P'' = p'n'' + r'p'' + p'p''h.$$

Après que les variations auront été ainsi opérées, on devra, dans leurs coefficients, donner à P'' la valeur spéciale qui convient à un observateur infiniment presbyte, c'est-à-dire,

$$(b) \qquad P'' = -\frac{N}{\Delta'},$$

et il faudra l'associer avec la valeur correspondante du grossissement angulaire N, dont l'expression est

$$(a) \qquad N = N'' + P''h_1.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer ici les formes générales que nous avons établies pages 65 et 66 pour les variations chromatiques des coefficients principaux des systèmes optiques. D'abord, le premier système partiel que nous considérons dans l'oculaire total étant binaire, on aura, relativement à lui,

$$\frac{\delta n'}{\delta i} = n' - 1, \qquad \frac{\delta p'}{\delta i} = p' + \varpi', \qquad \frac{\delta q'}{\delta i} = 0, \qquad \frac{\delta r'}{\delta i} = r' - 1;$$

en faisant, par abréviation,

$$\varpi' = \frac{(n'-1)(r'-1)}{q'} \qquad \text{et} \qquad \psi' = \frac{(n'-1)(r'-1)}{p'q'}.$$

Pour le reste de l'oculaire, je le supposerai constitué d'une manière quelconque. Alors il faudra y compléter les expressions analogues par des quantités additionnelles dépendantes de sa composition, comme je l'ai expliqué page 66, et l'on aura ainsi relativement à ce reste, quel qu'il puisse être,

$$\frac{\delta n''}{\delta i} = n'' - 1 + \nu'', \qquad \frac{\delta p''}{\delta i} = p'' + \varpi'', \qquad \frac{\delta r''}{\delta i} = r'' - 1 + \rho''.$$

Ici ϖ'' n'a plus la signification bornée que nous lui avons attribuée dans le premier système; mais il la reprendrait si le second était supposé pareillement binaire, et l'on aurait alors

$$\nu'' = 0, \quad \varpi'' = \frac{(n''-1)(r''-1)}{q''}, \quad \psi'' = \frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''}, \quad \rho'' = 0.$$

Il faudra donc employer ces modifications quand on voudra revenir au cas particulier des oculaires quadruples. Il suffira alors de les introduire dans les formules que nous allons préparer pour le cas général où le second système partiel est quelconque.

Enfin l'on doit se rappeler que δi représente le rapport $\frac{\delta n}{n-1}$, dans lequel n est l'indice de réfraction moyenne propre à l'espèce de verre dont les lentilles oculaires sont faites. Puisque nous les supposons toutes de même nature, δi disparaît évidemment de l'équation (c) comme facteur commun, ou comme commun diviseur de tous les coefficients variés.

Ceci convenu, j'applique la caractéristique δ aux expressions explicites de N'' et de P'', en l'employant comme signe

de variations infiniment petites. Je donne à chaque coefficient varié la forme qui lui est propre et que je viens de spécifier; et substituant enfin les résultats de ces opérations dans l'équation (c), elle prend la forme suivante

$$0 = \begin{array}{ll} 2n'n'' & +q'p'' \\ -(n'+n'') & +q'\varpi'' \\ +n'\nu'' & \end{array} + h\left\{\begin{array}{l} 2n'p'' \\ -p'' \\ +n'\varpi'' \end{array}\right\} + h_1\left[\begin{array}{ll} 2n''p' & +2r'p'' \\ -p'(1-\nu'') & -p'' \\ +n''\varpi' & +r'\varpi'' \end{array} + h\left\{\begin{array}{l} 2p'p'' \\ +p'\varpi'' \\ +p''\varpi' \end{array}\right\}\right].$$

Cette équation variée subsiste simultanément avec les expressions finies de N, N'', P'' que j'ai tout à l'heure rappelées. Alors, si l'on y ajoute la somme nulle $q'p'' - q'p''$, la première ligne de termes deviendra 2N. Faisant donc cette substitution, il reste

$$0 = 2\mathrm{N} - (n' + n'') + n'\nu'' - q'(p'' - \varpi'') - h(p'' - n'\varpi'')$$
$$+ h_1[-p' - p'' + p'\nu'' + n''\varpi' + r'\varpi'' + h(p'\varpi'' + p''\varpi')]. \quad (c)$$

Il faut maintenant employer ici la valeur spéciale de P'' qui convient à un observateur infiniment presbyte, laquelle étant $-\frac{\mathrm{N}}{\Delta'}$, donne

$$p'n'' + r'p'' + p'p''h = -\frac{\mathrm{N}}{\Delta'};$$

de là on tire

$$p'h = -\frac{\mathrm{N}}{p''\Delta'} - \frac{p'n''}{p''} - r', \qquad p''h = -\frac{\mathrm{N}}{p'\Delta'} - \frac{r'p''}{p'} - n''.$$

Avec ces valeurs, on pourra chasser partout l'intervalle h de l'équation variée (c). On peut aussi en chasser l'intervalle h_1 par son expression générale $-\frac{(\mathrm{N}-\mathrm{N}'')\Delta'}{\mathrm{N}}$, tirée de l'équation ($a$), page 71. Alors elle prend la forme suivante :

$$0 = 2\mathrm{N} - (n'+n'') + n'\nu'' - q'p''\left(1 - \frac{\varpi''}{p''}\right) + \left(1 - n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{p'\Delta'} + \frac{r'p''}{p'} + n''\right)$$
$$+ \frac{(\mathrm{N}-\mathrm{N}'')\Delta'}{\mathrm{N}}\left[p' + p'' + \frac{\varpi'}{p'}\left(\frac{\mathrm{N}}{\Delta'} + r'p''\right) + \frac{\varpi''}{p''}\left(\frac{\mathrm{N}}{\Delta'} + p'n''\right) - p'\nu''\right],$$

à quoi il faut toujours joindre la relation existante entre N et N'', qui est, page 69 :

$$(3) \qquad p'' = -p'N'' - \frac{n'N}{\Delta'}.$$

48. Maintenant la distance focale actuelle Δ' de l'objectif étant donnée, et supposée commune à tous les pinceaux hétérogènes qui émanent de chaque point rayonnant, il s'agit de satisfaire à ces deux équations, en attribuant aux coefficients principaux des systèmes oculaires partiels, des valeurs physiquement réalisables, conséquemment en premier lieu réelles, puis ensuite telles qu'il en résulte des valeurs positives pour les deux intervalles $h_{,}$, h. A la rigueur, ces conditions n'ont besoin d'être remplies que pour les valeurs spéciales de N et de $\frac{N''\Delta'}{N}$, qui expriment le grossissement angulaire total que l'on veut obtenir, ainsi que la distance du premier verre à l'image objective où l'on veut qu'il soit produit. Mais, pour réaliser des instruments dont le bon effet soit stable, il faut, parmi toutes les combinaisons qui seraient analytiquement admissibles, prendre seulement celles qui sont telles que le second membre de l'équation variée (*c*), qui doit être nul pour les valeurs assignées de N et de N'', ne devienne pas tout à coup considérable pour des valeurs quelque peu différentes de celles-là. En admettant, comme il faut bien le faire, qu'il ne puisse plus alors être rigoureusement nul, il convient du moins qu'il reste toujours fort petit dans l'amplitude de course que ces variations peuvent embrasser. Ainsi, pour être assuré qu'il soit tel, il faudra former l'expression générale de ses variations chromatiques, quand nous l'aurons complétement développé.

49. Ceci convenu, je dis que, en thèse générale, si l'on se

donne arbitrairement tout le second système partiel de l'oculaire, et que l'on prenne aussi à volonté les deux coefficients n', p', du premier, considéré comme binaire, la recherche du troisième q', qui satisfait à la relation précédente et qui achèvera de déterminer l'oculaire total, ne dépendra jamais que d'une équation du second degré; laquelle se réduira même au premier degré, si l'on veut établir la dispersion rectiligne des foyers pour le cas spécial où la première lentille de l'oculaire se trouve dans le foyer de l'objectif même, ce qui rend N'' nul, h égal à $-\Delta'$, et N égal à $-\frac{p''}{n'}\Delta'$.

Pour démontrer ce résultat, nous n'avons pas besoin de discuter les termes qui contiennent explicitement les coefficients principaux n'', p'', n', p' des deux systèmes oculaires partiels, ou encore les quantités ϖ'', ν'' appartenant au second de ces systèmes, puisque nous prenons ces éléments pour données de notre calcul. Par le même motif, nous n'avons pas non plus à nous inquiéter des termes qui contiennent explicitement N ou N''; car l'équation qui lie ces deux indéterminées entre elles ne renferme pas notre inconnue q'. Ainsi, quelle que soit celle des deux que l'on veuille chasser de l'équation (c) par cette relation, son élimination n'élèvera pas le degré de l'équation finale en q'. Nous avons donc seulement à examiner et à développer les termes qui contiennent l'inconnue q', soit explicitement, soit implicitement, comme dépendante de r', par l'équation de condition générale

$$n'r' - p'q' = 1,$$

laquelle donne

$$r' = \frac{1}{n'}(1 + p'q').$$

Sur quoi il faut se rappeler que la lettre ϖ' contenue dans les derniers facteurs représente un produit complexe dont l'expression explicite est

$$\varpi' = \frac{(n'-1)(r'-1)}{q'}.$$

Cette dernière pourra donc aussi introduire q'. C'est pourquoi je la développe en y remplaçant r' par sa valeur explicite, ce qui donne

$$\varpi' = \frac{(n'-1)}{n'}\left(p' - \frac{(n'-1)}{q'}\right).$$

La lettre r' ne se montre explicitement dans l'équation (c) que comme élément du facteur $\frac{N}{\Delta'} + r'p''$. Or, l'équation de condition (3), qui lie N et N'', donne généralement

$$\frac{N}{\Delta'} = -\frac{1}{n'}(p' + p'N'').$$

En associant cette valeur de $\frac{N}{\Delta'}$ à l'expression explicite de r', on trouve

$$\frac{N}{\Delta'} + r'p'' = \frac{p'}{n'}(p''q' - N''),$$

et par suite

$$\frac{1}{p'}\left(\frac{N}{\Delta'} + r'p''\right) + n'' = \frac{1}{n'}(p''q' + n'n'' - N''),$$

puis, en multipliant le premier de ces résultats par la valeur explicite de ϖ' en q', il vient

$$\frac{\varpi'}{p'}\left(\frac{N}{\Delta'} + r'p''\right) = \frac{(n'-1)}{n'^2}\left[p'p''q' + \frac{(n'-1)N''}{q'} - (n'-1)p'' - p'N''\right].$$

Ce sont là les trois seuls facteurs par lesquels r' puisse introduire q' dans notre équation; et ils n'y entrent que linéairement, avec des coefficients indépendants de cette inconnue. On y voit en outre un terme isolé où q' entre aussi au pre-

mier degré. Tous les autres se composent de quantités qu'on suppose données. L'équation finale en q' résultante de ces diverses substitutions, s'élèvera donc généralement au second degré, à cause du terme $\frac{(n'-1)N''}{q'}$ qui contient q' en dénominateur. Mais elle se réduira au premier degré par l'évanouissement de ce terme, si N'' est nul; c'est-à-dire si la première lentille de l'oculaire coïncide avec le foyer de l'objectif, comme je l'ai annoncé.

50. Les calculs précédents préparent la partie la plus difficile de l'opération que nous avons à faire pour éliminer N de l'équation (c), afin de réduire cette équation à ne contenir que la seule indéterminée N'', associée aux éléments arbitraires des deux systèmes partiels. Dans le cas de l'oculaire astronomique à deux verres, on peut se dispenser de cette opération, parce que la simplicité des deux systèmes partiels réduit alors chacun d'eux à n'avoir qu'un seul coefficient principal p', p'', qui est réciproque à la distance focale principale de sa lentille. Et ces coefficients peuvent être déterminés l'un et l'autre, sous forme linéaire, en fonction des deux quantités N', N'' considérées comme arbitraires; après quoi on en déduit les intervalles h_1 et h sous une forme analogue. Mais dans le cas plus général que nous considérons ici, la composition des fonctions ϖ'' et ν'' fait que cette détermination directe n'est plus possible; et l'on ne peut se dispenser de former l'équation explicite du second degré qui doit donner l'inconnue q' en fonction de N ou de N''. Je choisirai cette dernière forme, afin de conserver explicitement disponible l'indéterminée N'' que nous avons reconnu avoir une si grande influence dans les résultats.

51. Je commence donc par substituer dans l'équation (C) les expressions explicites que nous venons de former tout à l'heure. Après quelques réductions qui s'offrent avec évidence, je multiplie tous ses termes par le facteur commun $\frac{n'}{\Delta'}$; et elle se change dans celle-ci :

$$0 = \frac{2Nn'}{\Delta'} - \frac{n'^2}{\Delta'}(1 - \nu'') - \frac{N''}{\Delta'} - n'(n'n'' - N'')\frac{\varpi''}{\Delta' p''} - p''(n' - 1)\frac{q'}{\Delta'}$$
$$+ \frac{(N - N'')}{N}\left[\frac{(n'-1)}{n'}p'p''q' + \frac{(n'-1)^2}{n'}\frac{N''}{q'} + p'\left[n'(1-\nu'') - \frac{(n'-1)}{n'}N''\right] + \frac{(2n'-1)}{n'}p'' + [(n'n'' - N'')p' - p'']\frac{\varpi''}{p''}\right].$$

Pour achever commodément l'élimination de N, je forme les expressions suivantes, qui résultent de l'équation (3) entre N'' et N

$$\frac{Nn'}{\Delta'} = -(p'' + p'N''), \qquad \frac{N - N''}{N} = + \frac{\left[p'' + \left(p' + \frac{n'}{\Delta'}\right)N''\right]}{p'' + p'N''},$$
$$\frac{p'' + p'N}{N} = + \frac{\left(p'p'' - \frac{n'p''}{\Delta'} + p'^2 N''\right)}{p'' + p'N''}.$$

D'après ce que nous avons remarqué précédemment, le rapport $\frac{N''}{N}$ devra être toujours, dans nos constructions, une fraction très-petite; en outre, le moyen le plus convenable d'assurer cette condition, sera que $\frac{p''}{p'}$ soit un nombre peu considérable, et $\frac{n'}{p'\Delta'}$ une très-petite quantité. C'est ainsi que l'on fait toujours. Pour préparer les approximations qui pourront résulter de ces circonstances, je mets les deux dernières expressions sous cette forme :

$$\frac{N - N''}{N} = + \frac{\left[p'' + p'\left(1 + \frac{n'}{p'\Delta'}\right)N''\right]}{p'' + p'N''},$$
$$\frac{p'' + p'N}{N} = p'\,\frac{\left[p''\left(1 - \frac{n'}{p'\Delta'}\right) + p'N''\right]}{p'' + p'N''}.$$

52. Supposons d'abord que N'', sans être absolument nul, soit seulement assez petit pour devenir insensible et négligeable comparativement à N. Dans cette limite d'approximation, le rapport $\frac{N-N''}{N}$ se réduirait à $+1$. Il faudrait donc qu'il en fût ainsi de la quantité qui l'exprime. Or, pour cela il suffit que $\frac{n'}{p'\Delta'}$ soit pareillement négligeable comparativement à 1, c'est-à-dire que la distance focale réciproque du premier système oculaire partiel soit très-petite du même ordre comparativement à la distance focale actuelle Δ' de l'objectif auquel l'oculaire total est appliqué. Ainsi, quand nous admettrons cette dernière circonstance dont nous pouvons disposer, les réductions précédentes en résulteront.

53. Supposons maintenant que le rapport $\frac{p''}{p'}$ soit un nombre assez peu différent de l'unité pour qu'on puisse le considérer aussi comme négligeable comparativement à N. Dans cette limite d'approximation, le rapport $\frac{p''+p'N}{N}$ se réduirait à p'. Il faudrait donc que la quantité qui l'exprime se réduisît aussi à cette même valeur. Or, cela aura lieu en effet si le produit $\frac{n'}{p'\Delta'}$, étant un très-petit nombre, le facteur p'' qui le multiplie n'est pas assez considérable relativement à p', pour compenser cette circonstance de petitesse, ce qui rentre encore dans les conditions que nous avons établies. Nous pourrons donc effectuer aussi cette seconde réduction quand nous voudrons les introduire.

54. Pour le moment, je m'abstiens de ces limitations, et je reprends les formules précédentes sous leur forme géné-

rale. Alors, en vertu des relations qu'elles expriment, les deux termes de notre équation qui sont multipliés par q', peuvent se rassembler en un seul, car il en résulte

$$\left(\frac{(n'-1)(\mathrm{N}-\mathrm{N}'')}{n'\mathrm{N}}p'p''-(n'-1)\frac{p''}{\Delta'}\right)q'$$
$$=\frac{(n'-1)p''}{n'\mathrm{N}}\left((\mathrm{N}-\mathrm{N}'')p'-\frac{\mathrm{N}n'}{\Delta'}\right)q'=\frac{(n'-1)p''(p''+p'\mathrm{N})}{n'\mathrm{N}}q'.$$

D'autres termes encore, parmi ceux qui sont indépendants de q', pourraient donner lieu à des opérations analogues; mais il n'en résulterait pas de simplifications notables dans l'expression finale à laquelle nous voulons parvenir. En nous bornant donc à la réduction précédente, notre équation prend la forme suivante :

$$o=\frac{2\mathrm{N}n'}{\Delta'}-\frac{n'^2}{\Delta'}(1-\nu'')-\frac{\mathrm{N}''}{\Delta'}-n'\frac{(n'n''-\mathrm{N}'')}{\Delta'}\frac{\varpi''}{p''}$$
$$+\frac{(\mathrm{N}-\mathrm{N}'')}{\mathrm{N}}\left[p'\left[n'(1-\nu'')-\frac{(n'-1)}{n'}\mathrm{N}''\right]+\frac{(2n'-1)}{n'}p''+[(n'n''-\mathrm{N}'')p'-p'']\frac{\varpi''}{p''}\right]$$
$$+\frac{(n'-1)p''(p''+p'\mathrm{N})}{n'\mathrm{N}}q'+\frac{(n'-1)^2(\mathrm{N}-\mathrm{N}'')}{n'\mathrm{N}}\cdot\frac{\mathrm{N}''}{q'}.$$

Alors, en chassant totalement N par les relations établies plus haut, elle devient

$$o=-2(p''+p'\mathrm{N}'')-\frac{1}{\Delta'}\left[n'^2(1-\nu'')+\mathrm{N}''+n'(n'n''-\mathrm{N}'')\frac{\varpi''}{p''}\right]$$
$$+\frac{\left[p''+\left(p'+\frac{n'}{\Delta'}\right)\mathrm{N}''\right]}{(p''+p'\mathrm{N}'')}\left[p'\left[n'(1-\nu'')-\frac{(n'-1)}{n'}\mathrm{N}''\right]+\frac{(2n'-1)}{n'}p''+[(n'n''-\mathrm{N}'')p'-p'']\frac{\varpi''}{p''}\right]$$
$$+\frac{(n'-1)p''\left(p'p''-n'\frac{p''}{\Delta'}+p'^2\mathrm{N}''\right)}{n'(p''+p'\mathrm{N}'')}q'+\frac{(n'-1)^2\left[p''+\left(p'+\frac{n'}{\Delta'}\right)\mathrm{N}''\right]\mathrm{N}''}{n'(p''+p'\mathrm{N}'')q'}.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier tous ses termes par le facteur commun

$$\frac{n'(p''+p'\mathrm{N}'')q'}{(n'-1)p''\left(p'p''-n'\frac{p''}{\Delta'}+p'^2\mathrm{N}''\right)}$$

qui est inverse du coefficient de q'; et l'on obtient l'équation finale du second degré en q' et N'', qui est :

$$(c)\quad 0=q'^2-\frac{q'}{(n'-1)p''\left(p'p''-n'\frac{p''}{\Delta'}+p'^2\mathrm{N}''\right)}\left\{\begin{aligned}&2n'(p''+p'\mathrm{N}'')^2\\&+n'\left(\frac{p''+p'\mathrm{N}''}{\Delta'}\right)\left[n'^2(1-\nu'')+\mathrm{N}''+n'(n'n''-\mathrm{N}'')\frac{\varpi''}{p''}\right]\\&-\left[p''+\left(p'+\frac{n'}{\Delta'}\right)\mathrm{N}''\right]\left[p'[n'^2(1-\nu'')-(n'-1)\mathrm{N}'']+(2n'-1)\right.\\&\qquad\left.+n'[(n'n''-\mathrm{N}'')p'-p'']\frac{\varpi'}{p'}\right]\end{aligned}\right\}$$

$$+\frac{(n'-1)\left[p''+\left(p'+\frac{n'}{\Delta'}\right)\mathrm{N}''\right]\mathrm{N}''}{p''\left[p'p''-n'\frac{p''}{\Delta'}+p'^2\mathrm{N}''\right]},$$

Celle-ci doit toujours être associée aux relations générales

$$(3)\qquad \mathrm{N}=-\Delta'\frac{(p''+p'\mathrm{N}'')}{n'},\qquad \mathrm{D}=-\frac{\mathrm{N}''n'}{p''+p'\mathrm{N}''},$$

en vertu desquelles le grossissement angulaire total N et la distance D du premier verre oculaire à l'image objective sont liés à l'indéterminée N'', dans chaque appareil donné. On devra pareillement y joindre les équations

$$(a)\qquad h_1=-\Delta'+\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\Delta',$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{N}''&=n'n''+q'p''+n'p''h,\\-\frac{\mathrm{N}}{\Delta'}&=p'n''+r'p''+p'p''h,\end{aligned}\right.$$

lesquelles déterminent les deux intervalles h_1 et h quand tous les autres éléments de l'oculaire sont connus, ainsi que l'indéterminée N''. Tout cela résulte évidemment des con-

sidérations exposées au commencement de la section III, page 67, § 34 et suivants.

55. C'est ici le lieu d'examiner ce qui arriverait, si cette équation finale en q' n'était qu'approximativement satisfaite, comme cela aura lieu presque toujours. A cet effet je reprends l'expression générale de δN, non plus en la supposant nulle, mais telle qu'elle résulte de la condition de continuité primitivement établie par l'équation intégrale (a), page 68. Cette expression est

$$\frac{\delta N}{\delta i} = \frac{\delta N''}{\delta i} + h_1 \frac{\delta P''}{\delta i}.$$

Maintenant je désigne par C le second membre de notre équation finale en q', tel qu'il se trouve ici exprimé, soit que les termes qui le composent s'entre-détruisent ou ne s'entre-détruisent pas complétement les uns par les autres. En reprenant la marche de calcul que nous avons suivie, il est évident que C n'est autre chose que la quantité $\frac{\delta N''}{\delta i} + h_1 \frac{\delta P''}{\delta i}$ multipliée par les facteurs communs

$$\frac{n'}{\Delta'} \qquad \text{et} \qquad \frac{n'(p'' + p'N'')q'}{(n'-1)p''\left(p'p'' - n'\frac{p''}{\Delta'} + p'^2N''\right)}$$

desquels nous l'avons affectée successivement. C'est-à-dire que l'on a :

$$C = \frac{n'^2(p'' + p'N'')q'}{(n'-1)p''\Delta'\left(p'p'' - n'\frac{p''}{\Delta'} + p'^2N''\right)} \cdot \left(\frac{\delta N''}{\delta i} + h_1 \frac{\delta P''}{\delta i}\right).$$

Tirant donc de là $\frac{\delta N''}{\delta i} + h_1 \frac{\delta P''}{\delta i}$ en C pour le substituer dans l'expression générale de δN, il en résultera

$$\delta N = \frac{(n'-1)p''\left(p'p'' - n'\frac{p''}{\Delta'} + p'^2N''\right)\Delta'}{n'^2(p'' + p'N'')q'} \cdot C\delta i.$$

Cette expression donnera la valeur de δN, correspondante à celle du résidu C, dans tout oculaire dont on connaîtra les coefficients principaux, ainsi que la distance focale principale Δ' à laquelle il s'applique.

56. Lorsque l'on prend l'expression générale de N dans un système optique quelconque, en fonction des distances focales des surfaces réfringentes ou réfléchissantes, et des intervalles qui les séparent, chacun de ces intervalles ne se montre qu'à la première puissance, dans des termes dont les dénominateurs contiennent seulement les produits des distances focales entre elles. D'après cela, si l'on déduit la variation chromatique $\frac{\delta N}{\delta i}$ d'une telle expression, comme la caractéristique δ ne porte que sur les distances focales, chacun des intervalles continuera de ne s'y montrer qu'à la première puissance. Conséquemment, si l'on veut rendre δN nul, on en conclura un quelconque des intervalles en fonction de tous les autres par une relation du premier degré, comme l'ont proposé quelques auteurs; au lieu qu'ici cette même condition de δN nul nous conduit à une équation du second degré en q', ce qui présente une apparente contradiction. Mais la dissemblance résulte de ce qu'ici nous avons assujetti les pinceaux incidents de réfrangibilité moyenne à sortir de l'appareil sous forme de faisceaux, et nous avons en outre éliminé tous les intervalles, excepté q'. Au lieu que, dans la seconde expression de δN, on conserverait tous ces intervalles indépendants les uns des autres, et l'on n'assujettirait les pinceaux de réfrangibilité moyenne à aucune condition d'émergence particulière. Cela justifie suffisamment la différence du degré de l'équation finale qui détermine q' dans ces deux cas, puisqu'il est exprimé

en fonction d'autres éléments, et assujetti à des conditions différentes. Mais la forme que j'ai ici adoptée est la seule qui se prête à des applications réelles, parce qu'elle suppose l'instrument astreint aux véritables conditions dans lesquelles on l'emploie, et qu'elle fait dépendre l'intervalle q' des seuls éléments qui le constituent.

§ V. Applications numériques de l'équation d'achromatisme établie dans la section précédente.

57. Ces applications sont de plusieurs espèces, dont il sera utile de spécifier d'avance le but et les caractères particuliers.

On pourrait d'abord prendre à volonté tous les coefficients principaux d'un oculaire multiple, à l'exception de q', et de r' qui en dérive, quand les deux autres coefficients, n', p', sont donnés pour le même système partiel. On fixerait, de plus, la valeur que l'on veut attribuer à l'indéterminée N'', dans l'application de l'appareil à une certaine distance focale actuelle du système objectif, supposé achromatique individuellement. Alors, q' restant seul inconnu dans l'équation (c), la résolution de celle-ci déterminerait la valeur, ou les valeurs qu'il faut lui donner, pour que la dispersion rectiligne des foyers ait lieu dans l'instrument construit avec les éléments ainsi assignés. La possibilité de ce résultat dépendra d'abord de la réalité des valeurs de q'. Mais il faudra, en outre, que l'une d'elles au moins soit positive, puisque q' exprime un intervalle. Par une raison semblable, il faudra encore que cette valeur positive de q' conduise à une valeur également positive de l'intervalle h, lorsqu'on la substituera dans les

équations auxiliaires (2) qui accompagnent l'équation (c); soit qu'on fasse cette substitution directement, dans la première, soit qu'on l'opère dans la seconde par l'intermédiaire du coefficient r' déduit de q', associé à n' et p' qui sont donnés. Il n'y aura pas analytiquement d'autre condition à remplir. Car le grossissement angulaire N et l'intervalle $h_{,}$, qu'il faut obtenir aussi tous deux positifs, sont déterminés par les éléments mêmes que l'on suppose ici avoir été pris pour données; le premier au moyen de l'équation auxiliaire (3); le second au moyen de l'équation (a) qui coexiste avec elle. Ainsi ce sera dans le choix même des données primitives que les deux conditions de signe relatives à N et à $h_{,}$ auront dû être remplies.

58. Mais, quoiqu'une telle application fût légitime *analytiquement*, et qu'il soit bon d'en saisir toute la marche, elle n'aurait aucune utilité pratique, parce que les éléments ainsi choisis d'avance, indépendamment de q', ne pourraient pas, à moins du plus singulier hasard, avoir, soit entre eux, soit avec cette inconnue, les relations de convenance qui assurent la bonté des effets produits. Pour arriver à fabriquer *à priori* des oculaires qui soient à la fois achromatiques et dans lesquels toutes ces relations soient observées, il faut transformer l'équation (c) de manière à y prendre une inconnue différente de q', laquelle ne s'introduise dans le calcul qu'après que toutes les relations désirables sont établies. C'est ce que je ferai plus loin, et, je crois, de la manière la plus simple comme la plus sûre.

59. Néanmoins l'équation (c), sous sa forme actuelle, peut avoir une autre application immédiatement utile et qui est inverse de la précédente. Elle consiste à découvrir si un ins-

trument composé d'un objectif et d'un oculaire donnés, est réellement achromatique dans les conditions d'intervalle que l'artiste y a établies, et pour le grossissement angulaire qu'on a voulu lui faire produire. En effet, tous les coefficients principaux de l'oculaire étant assignés, ainsi que la distance focale Δ' de l'objectif auquel ils s'appliquent, si l'on substitue ces données dans l'équation (c), tout y sera connu, excepté l'indéterminée N''. On pourra donc en tirer la valeur de cette dernière qui satisfait à l'achromatisme; et, avec celle-ci, les équations auxiliaires qui accompagnent (c), feront connaître les valeurs de D, N, h, h_1 qui y correspondent; de sorte qu'on verra si elles sont, ou ne sont pas conformes à celles que l'artiste avait adoptées dans sa construction.

A la vérité, cette détermination de N'' dépend de la résolution d'une équation du second degré assez complexe; mais elle n'est telle que si l'on veut l'obtenir avec une complète rigueur. En profitant des relations de grandeur que certains termes de l'équation présentent toujours, parce qu'elles sont nécessaires pour assurer la bonté des effets produits, l'équation qui donne N'', peut être sans inconvénient réduite au premier degré; et N'' s'obtient ainsi par une première approximation presque toujours suffisante, dont la précision pourrait d'ailleurs être accrue ensuite indéfiniment s'il en était besoin.

60. Avant d'exposer cette simplification de l'équation (c), je traiterai un cas où elle se réduit rigoureusement au premier degré par rapport à q'. C'est celui où l'on voudrait que l'instrument fût achromatique, lorsque l'image renversée formée par l'objectif coïncide avec la première lentille de l'oculaire. Pratiquement, il ne serait pas bon qu'une telle

coïncidence fût exactement réalisée, quoiqu'elle se trouve l'être quelquefois dans un des points de l'amplitude de course que parcourent les oculaires des lunettes polyaldes. Car, lorsqu'on arrive à cette position, chacun des pinceaux réfractés par l'objectif, se rassemblant tout entier sur un seul point de la première lentille oculaire, du moins si l'objectif est exempt d'aberration de sphéricité, le moindre atome de poussière qui se trouverait en ce point sur la surface de la lentille, ou le moindre défaut qui y existerait, intercepterait tout le pinceau dont il s'agit, et rendrait ainsi complétement invisible le point de l'objet dont il serait émané. Cet inconvénient n'a plus lieu lorsque le foyer de l'objectif est seulement très-voisin de la première lentille oculaire, sans coïncider exactement avec elle; parce que le pinceau réfracté, s'épanouissant quelque peu avant de lui parvenir, l'opacité accidentelle, ou l'irrégularité d'un seul point de cette lentille, ne suffit pas pour l'intercepter en totalité. Il faut donc régler les oculaires, même polyaldes, de manière que la première lentille oculaire se trouve toujours hors du foyer de l'objectif dans les circonstances de leur application. Et il faut évidemment prendre des précautions analogues pour toutes les lentilles suivantes, relativement aux images réelles ou virtuelles qui servent d'origine immédiate aux pinceaux qu'elles réfractent. Néanmoins il est bon de choisir d'abord idéalement pour exemple ce cas de coïncidence de l'image objective sur la première lentille oculaire, parce que l'indéterminée N'' pouvant être occasionnellement positive ou négative, la supposition qui la rend nulle est intermédiaire entre toutes celles que l'on réalisera. Et, en outre, l'expression de q' y devenant plus simple, nous permettra de

mieux apprécier les conditions d'évaluation approximative qu'on pourra lui appliquer dans d'autres cas.

61. Faisant donc N'' nul dans notre équation (c), le terme indépendant de q' s'évanouit et ses deux racines se séparent. Mais l'une d'elles, qui donne q' nul, n'est pas admissible, parce qu'elle réunirait les deux lentilles du premier système partiel en une seule, ce qui ne laisserait plus de libre que son coefficient principal p', et nous ôterait l'indétermination des éléments n', r', qu'il est essentiel de conserver. Je considère donc l'autre racine que je désigne spécialement par $q'_{\circ}$. Alors, en rassemblant les termes analogues qui la composent, et les réduisant entre eux autant qu'ils peuvent l'être, celle-ci donne

$$q'_{\circ}=\frac{1}{(n'-1)p'}\left[\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}}-n'^{2}(1-\nu'')\frac{p'}{p''}+n'\left(\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}}-n'n''\frac{p'}{p''}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right].$$

62. Pour ne pas me jeter dans des généralités inutiles, j'envisagerai principalement cette valeur de $q'_{\circ}$ dans son application aux oculaires quadruples. Alors le facteur $\frac{\varpi''}{p''}$ est cette même quantité qui entre dans les variations chromatiques de H, et que j'avais alors désignée par ψ''. En y mettant pour ϖ'' sa valeur explicite, on a généralement

$$\frac{\varpi''}{p''}=\frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''}.$$

Mais les coefficients principaux sont toujours assujettis à la relation

$$n''r''-p''q''=1.$$

Tirant donc de là $p''\,q''$, le facteur que nous considérons peut être mis sous la forme suivante :

$$\frac{\varpi''}{p''}=-1+\frac{n''(1-r'')+r''(1-n'')}{1-n''r''}.$$

Dans les oculaires quadruples, des conditions que je ferai bientôt connaître, et qui sont nécessaires pour favoriser l'amplitude du champ apparent, exigent que le coefficient n'' soit une fraction négative de l'unité. Nous avons déjà remarqué en outre qu'il convenait de faire toujours r'' fort petit, quel que soit le signe qu'on lui attribuât; mais j'ai prévenu qu'il y avait de l'avantage à le rendre positif. Par cet arrangement la quantité qui se trouve ici associée à -1 est toujours négative, et très-peu différente de n''; ceci rend $1+\frac{\varpi''}{p''}$ négatif et de ce même ordre de grandeur. Pour rendre cette particularité sensible dans l'expression de q'_0, j'y remplace $\frac{\varpi''}{p''}$ par la valeur équivalente $1+\frac{\varpi''}{p''}-1$; puis séparant les termes dont $1+\frac{\varpi''}{p''}$ devient multiplicateur, et rassemblant les autres, j'ai en résultat

$$q'_0=-\frac{1}{p'}\left[\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}}+\frac{n'^2p'}{(n'-1)p''}(1-n''-\nu'')-\frac{n'}{(n'-1)}\left(\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}}-n'n''\frac{p'}{p''}\right)\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)\right].$$

Quand le second système partiel est binaire, comme nous le supposons, ν'' est nul. Nous avons reconnu en outre que le rapport $\frac{n'}{p'\Delta'}$ doit être maintenu très-petit, de sorte que $\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}}$ différera à peine de $+1$. Des considérations du même genre nous ont montré aussi que le rapport $\frac{p'}{p''}$ doit être positif; et il est avantageux de le rendre fractionnaire, comme on le fait toujours pour affaiblir les variations chromatiques du terme de δH qui se trouve l'avoir en coefficient. Ajoutons à cela que n' soit une fraction négative de l'unité,

comme cela a lieu dans toutes les constructions que les artistes ont jusqu'à présent effectuées. Alors, dans le facteur complexe qui multiplie ici $-\frac{1}{p'}$, sous la parenthèse, les deux derniers termes seront, comparativement au premier, d'un ordre de petitesse mesuré par les fractions $\frac{n'^2(1-n'')}{n'-1}\frac{p'}{p''}$ et $\frac{-n'\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)}{n'-1}$. En outre, dans la succession de ces deux derniers termes, l'antérieur sera négatif, le postérieur positif; de sorte qu'ils s'affaibliront mutuellement par leur opposition. Ainsi, pour de tels systèmes, la valeur de q' qui les rendrait achromatiques lorsque D est nul, serait peu différente de $-\frac{1}{p'}$. Ou, inversement : si ces systèmes sont arrangés de manière que q' y diffère peu de $-\frac{1}{p'}$, de manière que $p'q'+1$ y soit une très-petite quantité, ils seront, par cela seul, non pas exactement, mais à peu de chose près achromatiques pour le cas de D nul, c'est-à-dire, lorsque leur première lentille oculaire sera placée dans le foyer actuel de l'objectif, l'intervalle intermédiaire et variable h étant d'ailleurs réglé comme il convient pour que les pinceaux incidents de réfrangibilité moyenne sortent de l'appareil sous forme de faisceaux.

63. Or, voilà précisément ce qui a lieu dans toutes les lunettes terrestres à oculaire quadruple que les opticiens ont construites et construisent aujourd'hui encore, en suivant les traces du premier Dollond qui en fut l'inventeur. Car, dans tous ces appareils, sans aucune exception, si l'on mesure les distances focales principales $f_2 f_3$ des deux lentilles qui composent le système binaire antérieur, ainsi que leur intervalle h_2, qui est q' même; puis, que, de là, on déduise le coef-

ficient principal p', on trouvera toujours entre lui et q' une relation de cette forme

$$q' = -\frac{1}{p'}(1-\omega), \qquad \text{d'où} \qquad p'q' + 1 = +\omega;$$

ω étant une quantité fractionnaire, toujours positive, quelquefois restreinte à un petit nombre de centièmes, et qui reste toujours au-dessous de 0,16 dans tous les appareils que j'ai eu l'occasion d'examiner. Il est facile de voir ce que cette petite quantité signifie : car ayant toujours la relation rigoureuse

$$n'r' - p'q' = 1,$$

si on la compare à la précédente, on en tire

$$\omega = n'r'.$$

C'est donc le produit des deux coefficients n', r', qui est très-petit dans tous ces appareils, et qui s'y trouve positif habituellement. Si l'on veut s'en former une idée sensible, il n'y a qu'à traduire ces coefficients en éléments physiques du système binaire auquel ils appartiennent. Or, pour un système pareil, en lui appliquant la notation ordinaire qui exprime son antériorité, on a généralement

$$n' = 1 + \frac{h_2}{f_3}, \quad p' = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{h_2}{f_2 f_3}, \quad q' = h_2, \quad r' = 1 + \frac{h_2}{f_2},$$

conséquemment

$$n'r' = \frac{(h_2 + f_2)(h_2 + f_3)}{f_2 f_3}.$$

Le plus simple examen des constructions adoptées habituellement montrera qu'en effet chacun des facteurs qui composent ici le numérateur du second membre est toujours positif, et se trouve beaucoup moindre que le facteur négatif du dénominateur qui lui correspond ordinalement.

64. Pour mettre en évidence ce résultat fondamental, je le constaterai ici en nombres sur deux oculaires quadruples qui présentent presque les extrêmes de dissemblance que l'on puisse rencontrer entre les diverses constructions de ce genre d'appareil. Le premier a été fabriqué par Frauenhoffer; le second par Ramsden. Comme je les prendrai plus d'une fois pour exemple dans ce qui va suivre, l'exposition complète que je vais donner de leurs éléments constitutifs, nous servira ultérieurement.

65. 1° Oculaire de Frauenhoffer. C'est celui qui est mentionné sous le n° 2, dans la *Dioptrique pratique* de Precht, publiée à Vienne en 1828. Les éléments linéaires des deux systèmes binaires qui le composent, sont exprimés en pouces d'ancienne mesure française. Je leur applique la notation ordinale qui répond à leur place dans l'appareil total.

Système binaire antérieur

$$f_2 = -\overset{\text{pce}}{1{,}825}, \qquad h_2 = +\overset{\text{pces}}{2{,}725}, \qquad f_3 = -\overset{\text{pces}}{2{,}235},$$

système binaire postérieur

$$f_4 = -2{,}550, \qquad h_4 = +2{,}152, \qquad f_5 = -1{,}400.$$

Les longueurs assignées aux distances focales des quatre lentilles sont censées répondre aux rayons de moyenne réfrangibilité. Cet oculaire était destiné pour un objectif achromatique dont la longueur focale actuelle était $\Delta' = -54^{\text{pces}}$. Ainsi appliqué, l'artiste se proposait d'en tirer un grossissement angulaire $N = +60$.

Nous verrons, dans un moment, résulter de là l'intervalle h ou h_3 des deux systèmes partiels, ainsi que la distance D du premier verre oculaire à l'image objective, qui conviennent à ces circonstances assignées. Je commence par former les

valeurs numériques des coefficients principaux des deux systèmes binaires, d'après leurs expressions explicites, dont j'ai rappelé tout à l'heure le type, pour le premier d'entre eux. Elles s'appliquent de même au second en ajoutant seulement une unité à tous les indices de rang ordinal. Il est évident que ces valeurs sont relatives aux rayons lumineux de moyenne réfrangibilité, comme les distances focales d'après lesquelles on les calcule. Je trouve ainsi les nombres compris dans le tableau suivant; et j'y joins tout de suite leurs logarithmes tabulaires, qui sont sans cesse nécessaires pour en faire usage. Je rappelle que l'unité de longueur employée est l'ancien pouce français. Le caractère + ou — placé à la suite de chaque logarithme, indique le signe positif ou négatif de la quantité à laquelle il appartient.

Système binaire antérieur.		Système binaire postérieur.	
$n' = -0,219239$	$\log n' = \bar{1},3409186\ -$	$n'' = -0,537143$	$\log n'' = \bar{1},7300898\ -$
$p' = -0,327296$	$\log p' = \bar{1},5149409\ -$	$p'' = -0,503642$	$\log p'' = \bar{1},7021215\ -$
$q' = +2,725$	$\log q' = 0,4353665\ +$	$q'' = +2,152$	$\log q'' = 0,3328423\ +$
$r' = -0,493151$	$\log r' = \bar{1},6929796\ -$	$r'' = +0,149054$	$\log r'' = \bar{1},1933429\ +$

66. De là on tire d'abord

$$n'r' = +0,108118.$$

Ce produit est donc une fraction positive, comme je l'ai annoncé. Dans d'autres oculaires de Frauenhoffer elle est de moitié plus faible, ne s'élevant qu'à 0,05. Mais la valeur précédente est de l'ordre qu'on lui trouve le plus fréquemment. On voit aussi que r'' est positif, comme j'ai annoncé encore qu'il pouvait être avantageux de le faire pour assurer le signe négatif de la quantité II. Ce signe de r' est presque toujours tel dans les oculaires de Frauenhoffer. Si l'on suppose $\Delta' = -54^{\text{pces}}$, ce qui était la longueur focale

de l'objectif auquel l'oculaire était destiné, on trouve

$$\frac{n'}{p'\Delta'} = -0{,}0124046.$$

$\frac{n'}{p'}$ exprime la distance focale principale propre du système binaire antérieur. Elle est donc ici fort petite comparativement à Δ'. C'est encore une des particularités dont j'ai annoncé l'existence générale, et sur laquelle on peut appuyer les approximations.

D'après cela, pour calculer commodément le rapport $\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}}$ il faut faire

$$\frac{1}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}} = 1 + \frac{\frac{n'}{p'\Delta'}}{1-\frac{n'}{p'\Delta'}} = 1 - 0{,}1225264.$$

Je forme avec des précautions analogues les deux termes suivants du facteur qui multiplie $-\frac{1}{p'}$ dans l'expression de $q'_{\circ}$; et en les écrivant dans l'ordre successif où ils se présentent, il vient

$$q'_{\circ} = -\frac{1}{p'}[1 - 0{,}1225264 - 0{,}0393806 + 0{,}0297907]$$

ou

$$q'_{\circ} = -\frac{1}{p'}[1 - 0{,}1321162],$$

conséquemment

$$p'q'_{\circ} + 1 = +0{,}1321162.$$

On voit donc que, dans cet oculaire, la valeur de $q'_{\circ}$ qui le rendrait exactement achromatique lorsque D est nul, diffère peu de $-\frac{1}{p'}$, ainsi que je l'ai annoncé comme un fait

général de pratique. Toutefois, il n'avait pas été préparé pour le cas d'application, puisque la valeur que l'artiste y avait employée donne

$$p'q' + 1 = +0{,}108118,$$

conséquemment

$$q' = -\frac{1}{p'}[1 - 0{,}108118].$$

Mais cette dernière valeur diffère bien peu de celle qui rendrait l'instrument achromatique pour $D = 0$; car si l'on réduit q'_0 en nombres pour la valeur attribuée à p', on trouve

$$q'_0 = +\overset{\text{pces}}{2{,}65168},$$

au lieu de

$$q' = +2{,}725,$$

que l'artiste a employée. La différence est donc seulement $0^{\text{pce}},07332$, ou en lignes $0^{\text{l}},87984$.

67. Cette dernière valeur de q' répond à une valeur de la distance D qui est facile à calculer, d'après le grossissement $N = +60$ que l'artiste a voulu faire produire à son oculaire. En effet d'après ce que nous avons établi, page 73, on a généralement

$$N = -\frac{p''\Delta'}{n' + p'D},$$

il en résulte donc :

$$D = -\frac{n'}{p'} - \frac{p''}{p'}\frac{\Delta'}{N}.$$

Si l'on réduit cette dernière expression en nombres, en prenant $\Delta' = -54^{\text{pces}}$, et $N = +60$, on trouve

$$D = +\overset{\text{pce}}{0{,}715065},$$

ou en lignes

$$D = +\overset{\text{l.}}{8{,}58078}.$$

On verra plus loin que l'instrument n'était pas tout à fait

achromatique pour cette valeur de D, mais pour une autre un peu plus petite, c'est-à-dire, plus rapprochée de D nul. Si l'on veut connaître l'intervalle h ou h_3 compris entre les deux systèmes partiels de l'oculaire, lorsque cette valeur adoptée de D est produite, on l'obtient immédiatement par l'équation générale de continuité

$$p'n'' + r'p'' + p'p''h = -\frac{N}{\Delta'},$$

d'où

$$h = -\frac{r'}{p'} - \frac{n''}{p''} - \frac{N}{p'p''\Delta'},$$

laquelle, avec les valeurs ici adoptées de N et de Δ', donne, en pouces,

$$h = -1,506741 - 1,066518 + 6,740550 = +\overset{\text{pce}}{4},167291.$$

On voit, comme je l'ai annoncé, que les deux termes indépendants de N sont bien moindres que celui dont il faut les soustraire. C'est ce qui laisse à h une grande étendue de course, dans laquelle l'oculaire reste physiquement possible et applicable, pour des valeurs très-différentes de $\frac{N}{\Delta'}$.

68. Je calculerai aussi les fonctions $\frac{\varpi'}{p'}$, $\frac{\varpi''}{p''}$ ou ψ', ψ'' qui entrent par différence dans les variations chromatiques de H, et dont la seconde a, en outre, une influence marquée sur l'achromatisme de l'instrument total, comme on le verra plus loin. Avec les valeurs ci-dessus données des coefficients des deux systèmes partiels, on trouve

$$\psi' = \frac{\varpi'}{p'} = \frac{(n'-1)(r'-1)}{p'q'} = -2,041200;$$

$$\psi'' = \frac{\varpi''}{p''} = \frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''} = -1,206848.$$

On voit donc, comme je l'ai pareillement annoncé, que ψ'' ne diffère de ψ' que par une fraction plus ou moins considérable de l'unité, laquelle se trouve ici négative. Cela est ainsi dans les constructions les plus habituelles.

69. Enfin, si l'on substitue les valeurs des coefficients principaux, et celle de $\frac{\Delta'}{N}$ dans l'expression de H, relative à un observateur infiniment presbyte, expression que nous avons formée page 85, § 42, on aura

$$H = \frac{r''}{p''} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N} + \frac{\Delta'}{N^2} = -\overset{\text{pce}}{0},309900 - \overset{\text{pce}}{0},584873 - \overset{\text{pce}}{0},015 = -\overset{\text{pce}}{0},909773.$$

La lettre H prise positivement représente dans nos formules la distance du point oculaire moyen, *en avant* de la dernière lentille oculaire A_5. Le signe négatif dont sa valeur se trouve ici affectée, indique que, dans l'instrument que nous considérons, ce point est postérieur à la lentille, et conséquemment extérieur au tuyau de l'oculaire, de sorte que le centre de la pupille pourra physiquement s'y placer. C'est une des conditions générales que nous nous sommes prescrites. La valeur de H, convertie en millimètres, devient $-24^{\text{mm}},6275$. Elle est ainsi de l'ordre de grandeur que j'ai annoncé comme habituel.

Je ne dis rien ici de l'amplitude du champ qu'embrassait l'instrument que nous venons d'examiner. Ce sera l'objet de considérations ultérieures. Mon but principal, en ce moment, était de montrer cette disposition du système binaire antérieur qui rend le système total presque achromatique pour le cas de D nul.

70. L'oculaire de Ramsden que je vais prendre pour second exemple, fait partie d'une excellente lunette de cet artiste,

appartenant à l'observatoire de Padoue, et qui a été décrite par M. Santini. Voici les éléments fixes qui le constituent, selon les mesures prises par cet astronome sur l'instrument lui-même. L'unité de longueur est la ligne du pied de Paris ancienne mesure. Les distances focales sont censées exprimées pour les rayons de moyenne réfrangibilité, comme on le fait habituellement.

Système binaire antérieur

$f_2 = -20^{l.}$, $h_2 = +32^{l.}$, $f_3 = -25^{l.},5$,

système binaire postérieur

$f_3 = -28$, $h_4 = +30,5$, $f_5 = -15,3$.

Cet oculaire est appliqué à un objectif achromatique dont la distance focale principale $\Delta' = -350^{l}$. Le grossissement angulaire N que l'artiste voulait lui faire produire se trouve déterminé par l'intervalle h_3 des deux systèmes, lequel est égal à $40^{l},5$. Nous verrons tout à l'heure qu'il en résulte $N = +26,69$. M. Santini a trouvé $N = 27$ par des mesures expérimentales faites avec le dynamètre. On ne peut pas espérer un plus parfait accord.

Voici maintenant les coefficients principaux qui se déduisent des éléments physiques que je viens de rapporter; il faut se rappeler que, dans leurs expressions, la ligne est prise pour unité de longueur, et non plus le pouce comme dans l'exemple précédent. Mais ils se rapportent de même aux rayons de moyenne réfrangibilité, comme les distances focales dont ils dérivent.

Système binaire antérieur.		Système binaire postérieur.	
$n' = -0,2549020$	$\log n' = \bar{1},4063732-$	$n'' = -0,993464$	$\log n'' = \bar{1},9971522-$
$p' = -0,0264706$	$\log p' = \bar{2},4227636-$	$p'' = -0,0298786$	$\log p'' = \bar{2},4753606-$
$q' = +32,00$	$\log q' = 1,5051500+$	$q'' = +30,50$	$\log q'' = 1,4842998+$
$r' = -0,60000$	$\log r' = \bar{1},7781513-$	$r'' = -0,0892857$	$\log r'' = \bar{2},9507820-$

Avec ces nombres, et la valeur de l'intervalle intermédiaire h_3 qui est $40^l,5$, je calcule la valeur du grossissement angulaire N par la formule

$$N = -\Delta'(p'n'' + r'p'' + p'p''h),$$

et en prenant $\Delta' = -350$, longueur focale actuelle de l'objectif, j'ai

$$N = +9,20415 + 6,27451 + 11,21107 = +26,68973.$$

71. Si l'on compare cet oculaire à celui de Frauenhoffer que nous avons tout à l'heure analysé, on trouve pour principales différences que la valeur de n'' y est presque égale à 1; et que la valeur de r'', y étant pareillement très-petite, s'y trouve négative au lieu d'être positive. Ces dissemblances réagiront considérablement sur tous les résultats dans lesquels ces deux coefficients interviennent.

Procédant ici comme dans l'exemple précédent, je forme d'abord les deux quantités suivantes :

$$n'r' = +0,1529412, \qquad \frac{n'}{p'\Delta'} = -0,02751323.$$

La première est positive comme dans l'oculaire de Frauenhoffer et notablement plus forte. La seconde est aussi un peu plus grande qu'alors, mais encore assez petite pour autoriser les approximations que l'on fonderait sur cette circonstance.

Je cherche alors la valeur de q'_0 qui rendrait l'instrument achromatique pour le cas de D nul; et je trouve

$$q'_0 = -\frac{1}{p'}(1 - 0,0267765 - 0,914425 + 0,210346)$$
$$= -\frac{1}{p'}(1 + 0,092127).$$

Ici le terme associé à l'unité, sous la parenthèse, dans le facteur numérique du second membre, est encore très-petit.

à la vérité, mais il se trouve positif, au lieu de négatif qu'il était précédemment. Cela tient à la grande dissemblance de n'', qui rend $\frac{\varpi''}{p''}$ fort différent de ce que nous avions alors. En effet, si l'on forme les fonctions $\frac{\varpi'}{p'}$, $\frac{\varpi''}{p''}$ ou ψ', ψ'', on a ici

$$\psi' = \frac{\varpi'}{p'} = \frac{(n'-1)(r'-1)}{p'q'} = -2{,}370370,$$

$$\psi'' = \frac{\varpi''}{p''} = \frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''} = -2{,}382813.$$

Aussi la valeur de q'_0 se trouve-t-elle bien plus éloignée de celle pour laquelle l'artiste avait préparé l'instrument. Car celle-ci est

$$q' = -\frac{1}{p'}(1 - 0{,}1529412).$$

Et la valeur de la distance D qui y correspond étant calculée par la formule

$$D = -\frac{n'}{p'} - \frac{p''}{p'}\frac{\Delta'}{N},$$

se trouve être

$$D = -9^{l},62963 + 14^{l},80201 = +5^{l},17238.$$

Ainsi, dans l'application, la première lentille oculaire était postérieure de cette quantité à l'image objective, de même que dans l'exemple précédent. Mais on verra bientôt que l'achromatisme exact avait lieu pour une valeur de D un peu plus grande que celle-là, et non plus petite.

72. Enfin je calcule la valeur de H, pour ces mêmes circonstances d'application auxquelles l'instrument était destiné; et, d'après la formule,

$$H = \frac{r''}{p''} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N} + \frac{\Delta'}{N^2}$$

je trouve :

$$H = +2^{l},98825 - 11^{l},61788 - 0^{l},49134 = -9^{l},12094.$$

Le signe positif du premier terme de H résulte du signe négatif de r''. Néanmoins la valeur entière de H se trouve négative, comme il le faut pour que le point oculaire moyen de l'instrument soit postérieur à la dernière lentille de l'oculaire. Traduite en millimètres elle est — $20^{mm},5753$.

73. La discussion précédente nous montre que le caractère fractionnaire et négatif des coefficients n', n'', joint à la petitesse de la fonction $p'q'+1$ ou $n'r'$, dans les appareils que nous venons de considérer, leur assure déjà un état voisin de l'achromatisme, pour le cas de D nul, c'est-à-dire lorsque la première lentille oculaire coïnciderait avec l'image formée par l'objectif. Maintenant, les systèmes binaires qui composent ces appareils étant ainsi préparés, il faut profiter de la liberté de variation que l'intervalle intermédiaire h ou h_3 y conserve encore, pour les amener à une condition telle que la dispersion rectiligne des foyers qui constitue leur achromatisme, y soit exactement opérée, c'est-à-dire, pour que notre équation finale du second degré en q' se trouve satisfaite, non plus en faisant D et N'' nuls, mais en donnant à ces quantités de petites valeurs, auxquelles il faut toujours se restreindre, afin que la première lentille oculaire reçoive les pinceaux réfractés par l'objectif, dans un état convenable de minceur. Voilà encore un des avantages que produit cette stabilité de combinaisons dont j'ai successivement spécifié les caractères analytiques, et qui rend l'instrument physiquement possible pour une grande amplitude de course de l'intervalle intermédiaire. Car on va voir qu'elle permet toujours de découvrir, soit par l'expérience, soit par le calcul, ces petites valeurs de D spécialement favorables, dans lequel l'instrument total devra produire les meilleurs effets.

74. La détermination analytique de cette position ne pouvant être que d'un usage approximatif, il convient d'y introduire toutes les simplifications que cette circonstance permet. Or, une des plus efficaces, comme des plus permises, résulte des conditions même que nous avons reconnues nécessaires pour assurer la stabilité de l'instrument, lesquelles consistent en ce que le rapport $\frac{p''}{p'}$ ne soit jamais qu'un nombre médiocre, tout au plus égal à $+2$; et que la quantité $-\frac{n'}{p'\Delta'}$ soit toujours très-petite comparativement à l'unité, ne dépassant, par exemple, jamais 0,03. En effet, en admettant ces restrictions, que la forme des courbures usitées dans la construction des lentilles ne paraît pas permettre jusqu'ici d'excéder, le rapport $\frac{p''+\left(p'+\frac{n'}{\Delta'}\right)N''}{p''+p'N''}$ se réduit très-approximativement à $+1$; et le rapport $\frac{p''+p'N''}{p'p''-n'\frac{p''}{\Delta'}+p'^2N''}$ se réduit de même à $\frac{1}{p'}$. Alors notre équation générale en q', de la page 108, se simplifie d'abord comme il suit :

$$0=q'^2-\frac{q'}{(n'-1)p'p''}\left\{\begin{array}{l}+2n'(p''+p'N'')\\ +\frac{n'}{\Delta'}\left[n'^2(1-\nu'')+N''+n'(n'n''-N'')\frac{\varpi''}{p''}\right]\\ -p'[n'^2(1-\nu'')-(n'-1)N'']-(2n'-1)p''+n'[p''-p'(n'n''-N'')]\frac{\varpi''}{p''}\end{array}\right.$$
$$+\frac{(n'-1)}{p'p''}N''.$$

On voit déjà qu'il s'opère une réduction entre les termes du coefficient de q' qui contiennent le produit $2n'p''$. Mais on peut en admettre aussi une autre plus considérable, qui con-

siste à négliger les termes divisés par Δ'. En effet, si l'on applique à ces termes le coefficient général $\frac{1}{p'}$ qui leur est ici extérieur, ils auront pour facteur commun $\frac{n'}{p'\Delta'}$ que nous considérons comme une très-petite quantité. Or, dans les applications, on prend toujours pour n' et n'' des fractions de l'unité, et N'' a toujours une valeur positive ou négative moindre que 2. Si donc on admet que les quantités ν'' et $\frac{\varpi''}{p''}$ qui dépendent du second système partiel de l'oculaire, seront restreintes à n'être que de petits nombres, comme on a pareillement soin de le faire toujours, la somme des termes multipliés par $\frac{n'}{p'\Delta'}$ devra être négligée comparativement à leurs analogues qui ne sont pas affaiblis par ce facteur. Et alors l'équation sera réduite à la forme suivante :

$$0 = q' - \frac{q'}{n'-1\,p'}\left[1 - n'^2(1-\nu'')\frac{p'}{p''} + n'\left(1 - n'n''\frac{p'}{p''}\right)\frac{\varpi''}{p''} + \frac{p'}{p''}\left(3n' - 1 + n'\frac{\varpi''}{p''}\right)N''\right] + \frac{(n'-1)}{p'p''}N''$$

Si l'on y faisait N'' nul, elle reproduirait la même valeur spéciale de q'_0 que nous avons déjà trouvée, aux quantités près de l'ordre $\frac{n'}{p'\Delta'}$ que nous négligeons; et la comparaison des résultats ainsi obtenus justifierait l'approximation à laquelle nous venons de nous restreindre, en montrant combien peu ils diffèrent dans les cas habituels.

Représentons, comme précédemment, par C, le second membre de cette équation, amené ou non amené à une compensation rigoureuse. Les mêmes conditions d'approximation que nous venons d'employer étant introduites dans l'expression générale de δN, que nous avons formée page 109, § 55, elles donneront

$$\delta N = + \frac{(n'-1)p'p''\Delta'}{n'^2 q'} C\delta i.$$

75. Cette équation approchée (C) peut, comme l'équation rigoureuse, être employée de deux manières. On peut d'abord supposer que tous les éléments des deux systèmes partiels sont donnés à l'exception de q', et que l'on assigne en outre la valeur de l'indéterminée N″, ce qui fixera la distance D, ainsi que le grossissement angulaire N, en laissant q' seul disponible. Alors l'équation résolue donnerait la valeur de q' qu'il faut employer pour opérer la dispersion rectiligne des foyers dans les circonstances ainsi assignées. Toutefois, pour un tel cas, l'équation rigoureuse serait d'un usage plus exact, et presque aussi facile. Mais notre équation actuelle est bien mieux appropriée pour l'application inverse que j'ai déjà indiquée, laquelle consiste à trouver la valeur de N″, qui rend tout à fait achromatique un oculaire quadruple, déjà peu éloigné de l'être lorsque N″ est nul. En effet, lorsque l'on demande de produire un certain grossissement angulaire N, avec une distance focale donnée Δ', il suffit toujours que ce grossissement soit obtenu à quelques unités près, en moins ou en plus, pourvu qu'il se concilie avec toutes les autres qualités essentielles au bon effet de l'instrument. Imaginons en conséquence qu'on ait déterminé tous les éléments fixes d'un oculaire, c'est-à-dire les trois coefficients de ses deux systèmes partiels, y compris q', de manière que ces qualités s'y trouvent assurées pour l'ordre de grossissement prescrit; et qu'en outre la petitesse, ainsi que les signes des quantités n', n'', $p'q'+1$ ou $n'r'$, le rendent déjà peu éloigné de l'achromatisme lorsque N″ est nul. Si l'on substitue tous ces éléments fixes dans notre équation appro-

chée (C), où N″ n'entre qu'au premier degré, elle donnera la valeur de N″ qui produira l'achromatisme complet dans cet ordre d'approximation. D'après les dispositions ainsi adoptées, cette valeur sera nécessairement peu considérable, comme il faut qu'elle le soit toujours pour que le premier verre de l'oculaire s'éloigne peu du foyer actuel de l'objectif, ainsi que nous en avons reconnu la nécessité. Avec ce résultat, et les éléments fixes qui sont donnés, on pourra calculer D, N, h, par nos formules. On connaîtra ainsi la position où il faut placer le premier verre de l'oculaire pour obtenir l'achromatisme, l'intervalle qu'il faut établir entre ses deux systèmes partiels pour que les pinceaux incidents sortent sous forme de faisceaux, et enfin le grossissement angulaire qui résulte de ces dispositions. On devra désirer que ce grossissement pour lequel l'achromatisme existe diffère peu de celui qui a été prescrit; et l'on pourra vouloir au besoin constater le degré de précision que l'évaluation approchée de N″ comporte. Mais j'indiquerai plus loin les précautions qu'il faut prendre pour assurer la première de ces conditions, et je montrerai comment la vérification de N″ peut s'obtenir.

76. Dès à présent notre équation approchée en q', étant employée comme déterminative de N″, va nous servir à éprouver l'état achromatique plus ou moins parfait de divers oculaires construits par des opticiens très-habiles, et dont les éléments constitutifs ont été décrits. Mais afin de la restreindre ainsi aux réalités, j'exclurai d'abord le cas analytique où l'on voudrait supposer le coefficient n' positif et égal à $+1$. Car, si l'on y introduisait cette supposition, l'équation ne pourrait plus être satisfaite qu'en prenant l'intervalle q' ou h, soit nul, soit infini. La seconde de ces solutions n'est

pas réalisable. Quant à la première, la cause qui l'amène devient évidente, si l'on considère la composition du coefficient n' en fonction des éléments physiques du système binaire, auquel il appartient. Car son expression explicite étant $1 + \frac{h_2}{f_3}$, il faudrait, pour qu'il se réduisît à $+1$, que l'intervalle h_2 des deux lentilles constituantes devînt nul, ce qui les mettrait en contact entre elles; ou bien que f_3 devînt infini, ce qui ferait de la seconde lentille un simple verre plan à faces parallèles, lequel étant supposé ici infiniment mince, ne changerait pas la route des rayons lumineux qui le traverseraient. On serait donc ainsi ramené au cas où le système partiel antérieur ne contiendrait qu'une lentille unique, capable de dévier les rayons lumineux. Mais alors q' ou h_2 ne pouvant plus être pris pour inconnue, puisque sa valeur sera nulle ou sans influence sur l'achromatisme, notre équation actuelle en q' ne serait pas applicable; et il faudrait reprendre le calcul à son origine pour ce cas spécial, afin de faire dépendre l'achromatisme de la valeur de p' qui resterait le seul élément disponible du premier système. J'exclurai en conséquence cette particularité; et j'admettrai que, dans les divers choix de valeurs que l'on fait pour n', on ne le prend jamais égal à $+1$, afin que le système partiel antérieur reste toujours effectivement binaire. Alors les conditions de choix, tant pour cet élément que pour les autres qui restent aussi indéterminés dans l'équation en q', seront bornées, *analytiquement*, à ce qu'il puisse en résulter pour cette quantité des quantités réelles d'abord, puis positives, afin que la seconde lentille du système considéré soit effectivement postérieure à la première, comme le suppose le

rang ordinal qu'on lui attribue. Il faudra ensuite, par un motif semblable, qu'il en résulte aussi des valeurs positives pour les intervalles h_1 et h_3 ou h, leur réalité se trouvant d'ailleurs assurée par celle de q' et des autres coefficients principaux dont ils dépendent linéairement. Ces conditions, *nécessaires*, seront toujours remplies dans les appareils que nous allons considérer, puisqu'ils ont été trouvés réellement applicables. Quant à celles que l'on pourrait appeler de convenance, et qui toutefois ne sont pas moins essentielles dans la pratique, j'examinerai plus loin jusqu'à quel point ces appareils les remplissent, et comment on doit préparer leurs coefficients pour y satisfaire avec le plus d'avantage. Mais, en ce moment, l'état plus ou moins parfait de leur achromatisme est la seule circonstance que je veuille y considérer.

77. Tous ces oculaires étant composés de deux systèmes binaires il faut faire $\nu'' = 0$ dans notre équation (C) pour la leur appliquer. Comme notre but est de chercher la valeur de N″ qui les rend achromatiques, je rassemble tous les termes de l'équation, qui ont pour coefficient N″, en leur donnant un dénominateur commun. On a ainsi

$$0 = q'^2 - \frac{q'}{(n'-1)p'}\left[1 - n'^2\frac{p'}{p''} + n'\left(1 - n'n''\frac{p'}{p''}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right]$$
$$+ \left[(n'-1)^2 - p'q'\left(3n' - 1 + n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]\frac{N''}{(n'-1)p'p''}.$$

Je vais maintenant y faire une modification qui manifestera très-utilement l'ordre divers d'influence des termes qui la composent. Pour cela j'ajoute d'abord au coefficient de q' sous la parenthèse la somme nulle $-n' + n'$, ce qui permet de lui donner cette forme

$$-(n'-1)+n'\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)-n'^2\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right).$$

J'effectue alors la division par $n'-1$ sur le premier de ces termes, et je réunis le quotient à q'^2 en multipliant tous les termes de l'équation par p'. Elle devient alors

$$o=q'(p'q'+1)-\frac{n'q'}{n'-1}\left[1+\frac{\varpi''}{p''}-n'\frac{p'}{p''}\left(1+\frac{n''\varpi''}{p''}\right)\right]$$
$$+\left[(n'-1)^2-p'q'\left(3n'-1+n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]\frac{N''}{(n'-1)p''}.$$

Or, les coefficients principaux d'un même système binaire ont toujours entre eux la relation

$$n'r'-p'q'=1,$$

conséquemment $p'q'+1$ est égal à $n'r'$. Dans tous les oculaires que nous considérons, ce dernier produit se trouve être, comme je l'ai dit, une fraction très-petite et positive de l'unité. Je l'introduis donc explicitement dans notre équation en remplacement de $p'q'$ à cause de cette particularité. Alors tous ses termes réduits entre eux deviennent divisibles par n'; et en supprimant ce facteur commun il reste

$$o=r'q'-\frac{q'}{n'-1}\left[1+\frac{\varpi''}{p''}-n'\frac{p'}{p''}\left(1+\frac{n''\varpi''}{p''}\right)\right]$$
$$+\left[n'+1+\frac{\varpi''}{p''}-r'\left\{2n'-1+n'\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)\right\}\right]\frac{N''}{(n'-1)p''},$$

ou enfin

$$o=(n'-1)p''r'q'-p''q'\left[1+\frac{\varpi''}{p''}-n'\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]$$
$$+\left[n'+1+\frac{\varpi''}{p''}-r'\left\{2n'-1+n'\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)\right\}\right]N'' \quad \text{(C)}'$$

Si l'équation (C) n'est pas satisfaite, sous cette nouvelle forme, soit C' son second membre. Il sera égal à sa valeur précédente C, page 130, multipliée par $\frac{(n'-1)p'p''}{n'}$ ou $\frac{C(n'-1)p'p''}{n'}$. Donc, en

l'introduisant au lieu de C dans l'expression de δN que nous avons formée tout à l'heure, page 131, pour le cas d'achromatisme incomplet, on aura :

$$\delta N = \frac{\Delta'}{n'q'} C'\delta i.$$

78. La petitesse habituelle des coefficients r'', dans nos oculaires, fait que $1 + \frac{\varpi''}{p''}$ y est toujours une quantité négative, peu différente de n'', ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, pages 115 et 116. Et comme n'' est toujours une fraction négative, le facteur $1 + n''\frac{\varpi''}{p''}$ se trouve généralement être une quantité positive moindre que 3, souvent de beaucoup inférieure. Alors son produit par $-n'\frac{p'}{p''}$ est positif, et de l'ordre $-n'$. D'après cela les deux termes qui composent le coefficient de $p''q'$ se trouvent, individuellement, de signe opposé l'un à l'autre. Leur somme analytique, multipliée par $-p''q'$ donne alors un produit total, soit positif, soit négatif, toujours moindre que le premier terme $(n'-1)p''r'q'$, et qui n'en est le plus souvent qu'une petite fraction, comme $\frac{1}{30}$ ou $\frac{1}{40}$; de sorte que le signe propre de ce premier terme domine dans leur somme. Or, q' est essentiellement positif, comme exprimant l'intervalle des deux lentilles qui composent le système binaire antérieur, et les facteurs $n'-1, p''$ sont tous deux rendus négatifs par des raisons déjà indiquées; de sorte que leur produit est aussi positif. Mais r' au contraire est toujours rendu négatif, par une condition spéciale que j'expliquerai plus loin, en me bornant à annoncer qu'elle résulte du mode de renversement qu'il convient

d'employer pour redresser finalement les images des objets. D'après cela, en définitive, le signe négatif du premier terme $(n'-1)p''r'q'$, se communique à toute la partie indépendante de N'', dans notre équation.

Maintenant, dans le coefficient de N'', la portion indépendante de r' se compose d'abord de deux quantités individuellement négatives. Le facteur qui multiplie $-r'$ est aussi négatif, parce que sa partie positive $n'\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)$, différant peu de $n'n''$, est toujours bien moindre que $2n'-1$; et comme $-r'$ qui le multiplie est essentiellement positif, le produit est aussi négatif, de sorte qu'il s'ajoute analytiquement aux deux premiers termes. Le coefficient tout entier de N'' se trouve ainsi négatif comme la portion qui est indépendante de cette indéterminée, et par suite la valeur de N'' qui résoudra l'équation sera négative. Or, la distance $+D$ du premier verre oculaire *au delà* du foyer de l'objectif a pour expression analytique $+\frac{N''\Delta'}{N}$. Donc, Δ' étant négatif, et N positif, dans les appareils que nous considérons, D s'y trouve toujours de signe contraire à N''. De là résulte cette conséquence générale : *Dans tous les oculaires quadruples dont les éléments fixes sont assujettis aux conditions de signes, ainsi qu'aux relations de grandeur communément adoptées par les opticiens, la dispersion rectiligne des foyers, en quoi leur achromatisme consiste, ne peut exister que pour des valeurs positives de* D; *c'est-à-dire, pour des positions dans lesquelles l'image produite par l'objectif se forme réellement, et est antérieure au premier verre oculaire.* Aussi peut-on remarquer que ces appareils sont toujours intentionnelle-

ment préparés par les artistes, pour une telle disposition d'antériorité.

79. Avant d'appliquer notre équation (C)' à la recherche de cette position où l'achromatisme s'opère dans les oculaires dont les éléments ont été décrits, je vais montrer comment la valeur approchée de N'', qui s'en déduit, peut être rendue plus exacte par une approximation ultérieure, si l'on juge qu'il en soit besoin.

Pour cela je remarque que l'indéterminée N'' et le grossissement angulaire N qui en résulte sont liés l'un à l'autre par l'équation que nous avons nommée (3) dans la page 69; laquelle équation donne

$$(3) \qquad \frac{n'}{(p''+p'N'')\Delta'} = -\frac{1}{N},$$

de là on tire

$$p'' + \left(p' + \frac{n'}{\Delta'}\right)N'' = (p''+p'N'')\left(1 - \frac{N''}{N}\right),$$

$$p'p'' - \frac{n'p''}{\Delta'} + p'^2N'' = p'\left(p''+p'N'' - \frac{p''}{p'}\cdot\frac{n'}{\Delta'}\right) = p'(p''+p'N'')\left(1+\frac{p''}{p'N}\right).$$

Si l'on introduit ces expressions dans notre équation exacte en q'^2, de la page 108, elle prend la forme suivante :

$$0 = q'^2 - \frac{q'}{(n'-1)p'p''\left(1+\frac{p''}{p'N}\right)}\left\{\begin{array}{l} 2n'(p''+p'N'') \\ +\frac{n'}{\Delta'}\left[n'^2(1-\nu'')+N''+n'(n'n''-N'')\frac{\varpi''}{p''}\right] \\ -\left(1-\frac{N''}{N}\right)\left[p'[n'^2(1-\nu'')-(n'-1)N'']+(2n'-1)p''-n'[p''-(n'n''-N'')p']\frac{\varpi''}{p''}\right] \end{array}\right.$$

$$+\frac{(n'-1)\left(1-\frac{N''}{N}\right)}{p'p''\left(1+\frac{p''}{p'N}\right)}.N''.$$

Pour former notre équation approchée en N'' nous avons traité les termes $\frac{N''}{N}, \frac{p''}{p'N}$ comme négligeables comparative-

ment à l'unité, et nous avons admis en outre que les termes ayant pour dénominateur la distance focale Δ' étaient aussi négligeables comparativement à ceux qui ne sont pas affectés de ce diviseur. Nous allons maintenant conserver ceux-ci tout entiers dans notre calcul. Quant aux premiers, nous ne pouvons pas agir avec la même rigueur, parce qu'ils renferment la quantité même N'' que nous cherchons, laquelle y entre, tant sous sa forme explicite qu'implicitement dans N, qui en est fonction par la relation rappelée tout à l'heure. Mais on verra que dans toutes nos constructions N'' est une fraction de l'unité, et N au contraire est toujours un nombre plus ou moins considérable. D'après cela, quand on aura obtenu N'' par la première approximation, si l'on calcule par l'équation (3) le grossissement N qui en résulte, on pourra se servir de ces valeurs pour calculer seulement les petits termes $\frac{N''}{N}$ et $\frac{p''}{p'N}$ dans celle que nous venons de former ici ; et la résolvant ensuite avec ces coefficients corrigés, elle donnera une nouvelle valeur de N'' nécessairement plus exacte que la première où ces mêmes termes avaient été tout à fait négligés. Il ne nous reste donc qu'à disposer notre équation actuelle sous la forme qui facilitera le plus cette résolution ultérieure en distinguant les quantités de différents ordres que nous y considérons.

Je commence par rassembler dans chacun de ses coefficients les termes indépendants de N'' et ceux qui en sont affectés. J'ai ainsi

$$0 = q'^2 - \frac{q'}{(n'-1)p'p''\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}\left\{\begin{array}{l} 2n'p'' + 2n'p'\mathrm{N}'' \\ +\frac{n'}{\Delta'}\left[n'^2\left(1-\nu''+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)+\left(1-n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\mathrm{N}''\right] \\ -p'n'^2(1-\nu'')-(2n'-1)p''+n'(p''-n'n''p')\frac{\varpi''}{p''}+p'\left(n'-1+n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\mathrm{N}'' \\ +\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\left[p'n'^2(1-\nu'')+(2n'-1)p''-n'(p''-n'n''p')\frac{\varpi''}{p''}-p'\left(n'-1+n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\mathrm{N}''\right] \end{array}\right.$$

$$+\frac{(n'-1)\left(1-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)}{p'p''\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}.\mathrm{N}''.$$

Je réduis alors entre eux les termes du même ordre de grandeur, comme dans la première approximation ; et faisant ainsi passer le diviseur p'' sous la parenthèse, le quotient prend cette forme :

$$0 = q'^2 - \frac{q'}{(n'-1)p'\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}\left\{\begin{array}{l} 1-n'^2\frac{p'}{p''}(1-\nu'')+n'\left(1-n'n''\frac{p'}{p''}\right)\frac{\varpi''}{p''}+\frac{p'}{p''}\left(3n'-1+n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\mathrm{N}'' \\ +\frac{n'}{p'\Delta'}\left[n'^2\frac{p'}{p''}\left(1-\nu''+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)+\frac{p'}{p''}\left(1-n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\mathrm{N}''\right] \\ +\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\left[n'^2\frac{p'}{p''}(1-\nu'')+2n'-1-n'\left(1-n'n''\frac{p'}{p''}\right)\frac{\varpi''}{p''}-\frac{p'}{p''}\left(n'-1+n'\frac{\varpi''}{p''}\right)\mathrm{N}''\right] \end{array}\right.$$

$$+\frac{(n'-1)\left(1-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)}{p'p''\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}\mathrm{N}'',$$

ou, en rassemblant tous les termes affectés du même facteur principal,

$$0 = q'^2 - \frac{q'}{(n'-1)p'\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}\left\{\begin{array}{l} 1+(2n'-1)\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}-n'^2\frac{p'}{p''}(1-\nu'')\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right) \\ +n'\left(1-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)\frac{\varpi''}{p''}-n'^2n''\frac{p'}{p''}\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)\frac{\varpi''}{p''} \\ +\frac{p'}{p''}\left[3n'-1+\frac{n'}{p'\Delta'}-(n'-1)\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}+n'\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right]\mathrm{N}'' \end{array}\right.$$

$$+\frac{(n'-1)\left(1-\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)}{p'p''\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}\mathrm{N}''.$$

Par analogie avec la marche que nous avons suivie dans la première approximation, je retire de dessous la parenthèse le terme du premier ordre qui est multiplié par $\frac{p'}{p''}\mathrm{N}''$, et je le réunis au terme extérieur en leur donnant un dénominateur commun. Puis, j'ajoute aux autres la somme nulle

$$-n' - (n' - 1)\frac{p''}{p'\mathrm{N}} + n' + (n' - 1)\frac{p''}{p'\mathrm{N}}.$$

Les deux premiers de ceux-ci étant réunis à $+1$ composent le facteur $-(n'-1)\left(1 + \frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)$ qui dégage le terme $+\frac{q'}{p'}$. Ensuite les deux derniers s'associent au produit $(2n'-1)\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}$ de la manière suivante :

$$(2n' - 1)\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}} + n' + (n' - 1)\frac{p''}{p'\mathrm{N}} = n'\left(1 + \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)$$
$$+ (n' - 1)\left(\frac{p''+p'\mathrm{N}}{p'\mathrm{N}}\right) = n'\left(1 + \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right) - (n' - 1)\frac{n'}{p'\Delta'}.$$

Alors tous les termes qui restent sous la parenthèse présentent un facteur commun n' que l'on peut séparer. Je le fais donc; puis, multipliant toute l'équation par p', je réunis les deux termes en q'^2 et q' seuls, comme dans la première approximation; et enfin je fais $\nu'' = 0$ pour borner la question aux oculaires quadruples. Il vient ainsi :

$$0 = q'(p'q'+1) - \frac{n'q'}{(n'-1)\left(1+\frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}\left[1 + \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}} - \frac{(n'-1)}{p'\Delta'} + \left(1 - \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)\frac{\varpi''}{p''} - n'\frac{p'}{p''}\left(1 + n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\left(1 - \frac{n'}{p'\Delta'} - \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)\right]$$
$$+ \left[(n'-1)^2\left(1 - \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right) - p'q'\left\{3n' - 1 + \frac{n'}{p'\Delta'} - (n'-1)\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}} + n'\left(1 - \frac{n'}{p'\Delta'} - \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right\}\right]\frac{\mathrm{N}''}{(n'-1)p''\left(1 + \frac{p''}{p'\mathrm{N}}\right)}.$$

Je remplace maintenant le produit $p'q'$ par son expression équivalente $+ n'r' - 1$, ce qui change $q'(p'q' + 1)$ en $n'r'q'$.

La même substitution opérée dans le coefficient de N″ lui donne aussi n' pour facteur. Car les termes indépendants de $n'r'$ y composent la somme suivante :

$$(n'-1)^2-(n'-1)^2\frac{N''}{N}+3n'-1+\frac{n'}{p'\Delta'}-(n'-1)\frac{N''}{N}+n'\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{N''}{N}\right)\frac{\varpi''}{p''},$$

et, en les réduisant les uns par les autres, ils donnent pour reste

$$n'^2+n'-(n'-1)n'\frac{N''}{N}+\frac{n'}{p'\Delta'}+n'\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{N''}{N}\right)\frac{\varpi''}{p''}.$$

Toute l'équation peut donc être délivrée du facteur n' qui lui est ainsi devenu commun. Et en la multipliant tout entière par $(n'-1)p''\left(1+\frac{p''}{p'N}\right)$ pour débarrasser ses deux derniers termes de leurs dénominateurs, elle devient en définitive :

$$(\text{C})''\left\{\begin{aligned}0=&(n'-1)\left(1+\frac{p''}{p'N}\right)p''r'q'-p''q'\left[1+\frac{N''}{N}-\frac{(n'-1)}{p'\Delta'}+\left(1-\frac{N''}{N}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right.\\&\left.\qquad-n'\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{N''}{N}\right)\right]\\&+\left[n'+1-(n'-1)\frac{N''}{N}+\frac{1}{p'\Delta'}+\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{N''}{N}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right.\\&\left.\qquad-r'\left\{3n'-1+\frac{n'}{p'\Delta'}-(n'-1)\frac{N''}{N}+n'\left(1-\frac{n'}{p'\Delta'}-\frac{N''}{N}\right)\frac{\varpi''}{p''}\right\}\right]N''.\end{aligned}\right.$$

Sa forme est alors tout à fait analogue à celle de notre équation finale (C)′ obtenue par la première approximation, page 135; et elle lui devient tout à fait identique, si l'on supprime les termes qui ont pour facteur $\frac{N''}{N}$, ou $\frac{1}{p'\Delta'}$, termes que nous avions alors négligés.

Représentons par C″ le second membre de l'équation précédente, amené ou non amené à l'état nul. En exprimant de même par C le second membre de notre équation primitive en q'^2, page 109, nous avions

$$\delta N = \frac{(n'-1)p''[p'p''-n'\frac{p''}{\Delta'}+p'^2N'']\Delta'}{n'^2(p''+p'N'')q'}C\delta i = \frac{(n'-1)p'p''\left(1+\frac{p''}{p'N}\right)\Delta'}{n'^2q'}C\delta i.$$

Or, d'après les opérations que nous venons ici de faire pour déduire C″ de C, on a évidemment :

$$C'' = \frac{(n'-1)}{n'}p'p''\left(1+\frac{p''}{p'N}\right)C.$$

Substituant donc au lieu de C sa valeur en C″ dans δN, il viendra

$$\delta N = \frac{\Delta'}{n'q'}C''\delta i.$$

80. Pour éprouver l'exactitude des déterminations que l'on peut obtenir au moyen des formules précédentes, je vais les appliquer successivement aux deux oculaires quadruples dont j'ai rapporté plus haut les éléments constitutifs, pages 120 et 125.

Je commence par celui de Frauenhoffer. Si l'on introduit d'abord les valeurs de ses coefficients principaux dans l'équation approchée (C)′ de la page 135, on trouve les résultats suivants, que je détaille par parties dans ce premier exemple, pour montrer l'accord des différents termes avec les prévisions analytiques que j'ai exposées.

$$(n'-1)p''q'r' = -0{,}8251949$$

$$-p''q'\left[1+\frac{\varpi''}{p''}-n'\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]$$

$$= -p''q'(-0{,}206848+0{,}234834) = +0{,}0384086\;3.$$

La somme de ces termes donne donc le coefficient indépendant de N″, égal à

$$-0{,}8251949+0{,}0384086\;3 = -0{,}78678627.$$

Je forme ensuite le coefficient de N″, qui est

$$n' + 1 + \frac{\varpi''}{p''} - r'\left(3n' - 1 + n'\frac{\varpi''}{p''}\right)$$

$$= -0{,}2192393 - 0{,}2068480 - r'(-1{,}6577179 + 0{,}2645887)$$

$$= -0{,}4260873 + r'.1{,}3931292.$$

En mettant pour r' sa valeur, qui est négative, les deux termes de cette expression s'ajoutent analytiquement; et leur somme totale devient

$$-0{,}4260873 - 0{,}6870225 = -1{,}1131098.$$

La condition déterminatrice de N″, fournie par notre équation approchée (C)′, est ainsi :

$$0 = -0{,}78678627 - 1{,}1131098\,\mathrm{N}'',$$

d'où l'on tire

$$\log \mathrm{N}'' = \bar{1}{,}8493187-, \qquad \mathrm{N}'' = -0{,}706836.$$

N″ étant négative, l'achromatisme qui y correspond a lieu dans une position où le foyer de l'objectif est antérieur au premier verre oculaire, comme nous l'avions prévu généralement pour cette constitution d'appareil. Avec cette valeur de N″ je calcule le grossissement N, propre à la position dont il s'agit, en appliquant l'équation de continuité (3), comme il a été convenu, page 108, ce qui donne :

$$\mathrm{N} = -\frac{(p'' + p'\mathrm{N}'')\Delta'}{n'},$$

et j'obtiens ainsi

$$\log \mathrm{N} = 1{,}8265177, \qquad \mathrm{N} = +67{,}0684,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}} = -0{,}1053904.$$

L'instrument de Frauenhoffer que nous considérons, était donc achromatique pour cette valeur de N, et non pour la valeur N = 60 à laquelle il le destinait. Mais ceci n'est en-

core qu'une indication approximative, résultante de l'équation (C)', où les fractions $\frac{N''}{N}$, $\frac{n'}{p'\Delta'}$ sont considérées comme négligeables comparativement à l'unité. Pour en apprécier la justesse, j'introduis maintenant ces rapports dans les termes de l'équation (C)'', page 142, où ils entrent comme correctifs; et reprenant ces calculs sous cette forme plus exacte, j'obtiens : 1° : pour le terme indépendant de N''

$$-0,8441279 + 0,1085598 = -0,7355681\,;$$

2° : pour le coefficient de N''

$$-0,41004609 - 0,69648360 = -1,10652969.$$

De sorte que la condition d'où dépend N'' se trouve maintenant être

$$0 = -0,7355681 - 1,10652969\,N''\,;$$

de là on tire

$$\log N'' = \bar{1},8226599 - \qquad N'' = -0,664752,$$

et par suite, en opérant comme dans le premier cas,

$$\log N = 1,8479484\,; \quad N = +70,4609; \quad \frac{N''}{N} = -0,00943434.$$

Les valeurs ici obtenues pour N'' et N se trouvent un peu différentes de celles de la première approximation, comme on devait s'y attendre. Mais les premiers résultats auraient déjà parfaitement suffi pour mettre l'instrument dans les conditions où son achromatisme peut se compléter par des rectifications expérimentales; ce qui est le but réel de ces calculs. Maintenant une approximation ultérieure fondée sur ces derniers résultats n'y apporterait que des modifications beaucoup plus faibles. En effet, en la réalisant, je

trouve pour la nouvelle équation déterminante de N''

$$0 = -0{,}7316635 - 1{,}1033397\ N'',$$

d'où l'on tire

$$\log N'' = \bar{1}{,}8216021-, \qquad N'' = -0{,}663135,$$

et par suite

$$\log N = 1{,}8487514; \quad N = +70{,}5913, \quad \frac{N''}{N} = -0{,}00939400.$$

Il serait inutile non-seulement de procéder à des approximations ultérieures, mais même d'aller jusqu'à celle-là. Car les épaisseurs centrales que nous avons négligées doivent produire des modifications au moins aussi sensibles que celles qu'on obtiendrait par de nouveaux calculs. Et cela serait tout à fait inutile pour préparer les dernières rectifications expérimentales auxquelles il faut toujours définitivement recourir.

81. J'applique maintenant les mêmes formules à l'oculaire de Ramsden, dont les coefficients principaux, rapportés page 125, offrent des différences si marquées avec celui de Frauenhoffer. Je rapporte les résultats des calculs sous la même forme que ci-dessus, mais sans les accompagner d'indications de détail qui seraient désormais inutiles.

J'emploie d'abord de même l'équation approchée (C)', et je trouve

$$\begin{aligned}(n'-1)p''q'r' &= -0{,}7198992\\ &\quad - p''q'\left[1 + \frac{\varpi''}{p''} - n'\frac{p''}{p'}\left(1 + n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]\\ &= -p''q'(-1{,}3828130 + 0{,}7604142) = -0{,}5950854.\end{aligned}$$

Ce second produit se trouve donc ici de même signe que le premier, au lieu qu'il était de signe contraire dans l'exemple

précédent. Cela tient évidemment à la grandeur prédominante de la quantité $\frac{\varpi''}{p''}$ dans le cas actuel. En ajoutant ces deux quantités on a le terme indépendant de N″ égal à — 1,3149846.

Le coefficient de N″, calculé de même, se trouve être — 2,3321085.

Par conséquent, la condition déterminante de N″ est, dans cet ordre d'approximation :

$$0 = -1{,}3149846 - 2{,}3321085\, N'',$$

de là on tire

$$\log N'' = \bar{1}{,}7511718 -, \qquad N'' = -0{,}5638607.$$

Ensuite, l'équation de continuité (3) donne :

$$N = -\frac{(p'' + p' N'')}{n'}\Delta',$$

et l'on en tire :

$$\log N = 1{,}3124196; \quad N = +20{,}53145; \quad \frac{N''}{N} = -0{,}02746326.$$

L'instrument était donc achromatique pour un grossissement angulaire notablement moindre que la valeur N = 27 à laquelle Ramsden l'avait destiné. Néanmoins, d'après ce que M. Santini rapporte, il est encore très-bon avec ce dernier grossissement; et ainsi la valeur δN qui y correspond, est sans doute assez petite pour n'être pas désagréablement sentie dans l'amplitude de champ qu'on lui a donnée.

Pour compléter nos épreuves, je procède à la détermination de N″ par une seconde approximation, en introduisant la valeur précédente de $\frac{N''}{N}$ et celle de $\frac{n'}{p'\Delta'}$ dans l'équation (C)″, page 142. Et je trouve alors pour condition déterminante de N″ :

$$0 = -1{,}27391236 - 2{,}4067913\, N'',$$

d'où je tire

$$\log N'' = \bar{1},7237010 -, \qquad N'' = -0,529299,$$

et par suite

$$\log N = 1,3382102; \quad N = +21,78764; \quad \frac{N''}{N} = -0,0242935.$$

Cette valeur de N diffère assez peu de la précédente pour qu'il fût parfaitement inutile de procéder à une approximation ultérieure. La première même aurait suffi pour disposer l'instrument à recevoir les rectifications expérimentales auxquelles il faut toujours le soumettre, pour déterminer définitivement l'intervalle intermédiaire h_3 avec lequel il produit les meilleurs effets.

82. Ici cet intervalle se déduit du grossissement N et des autres élements de l'oculaire, par la formule

$$(2) \qquad h_3 = -\frac{r'}{p'} - \frac{n''}{p''} - \frac{N}{p'p''\Delta'},$$

laquelle a été mentionnée page 108, et que nous avons déjà appliquée numériquement page 123. En l'employant ici pour calculer h_3, avec le grossissement $+21,78764$ qui rend l'instrument à très-peu près achromatique, on trouve en lignes

$$h_3 = -22^{l},66667 - 33^{l},2500 + 78^{l},7082 = +22^{l}79115,$$

au lieu que Ramsden l'avait disposé pour une valeur plus grande de h_3 qui était

$$h_3 = 40^{l}5.$$

Le sens dans lequel ces valeurs diffèrent est une conséquence évidente de l'excès de grossissement que Ramsden avait voulu faire produire à son appareil. Je n'ai ici traduit ces résultats en nombres qu'afin de montrer que, dans le mode d'arrangement qui rendait l'instrument achromatique, l'intervalle intermédiaire h_3 aurait dû avoir une valeur moin-

dre que l'intervalle de h_2 des deux lentilles du premier système, lequel était 32^1 comme je l'ai rapporté, page 125. Au lieu que, dans la disposition adoptée par l'artiste, h_3 était plus grand que h_2. Cette prédominance de h_3 existe dans toutes les constructions d'oculaires quadruples habituellement réalisées. Mais je ne vois aucune raison théorique qui en motive la nécessité ou la convenance; et elle est évidemment incompatible avec l'achromatisme dans beaucoup de cas analogues à celui que nous venons de discuter.

83. D'après les épreuves précédentes, je considérerai désormais l'équation approchée (C)', comme étant généralement suffisante pour indiquer les valeurs relatives de position et de grossissement auxquelles il faut amener chaque oculaire quadruple, avant de lui appliquer les dernières rectifications expérimentales qui fixent définitivement la disposition de ses parties. J'en ferai encore une dernière application à un oculaire polyalde d'une très-grande amplitude de course qui a été construit par Dollond, et qui est dans la possession de M. Rossin. Voici ses éléments constitutifs tels que M. Rossin me les a communiqués. Ils sont exprimés en prenant le millimètre pour unité de longueur; et les distances focales des lentilles se rapportent aux rayons de moyenne réfrangibilité, comme précédemment.

Système binaire antérieur

$$f_2 = -38^{\text{mm}}, \quad h_2 = +50^{\text{mm}}; \quad f_3 = -39^{\text{mm}}.$$

Système binaire postérieur

$$f_4 = -31, \qquad h_4 = +28, \qquad f_5 = -20.$$

En mettant ces nombres dans les expressions explicites des coefficients principaux rapportés pages 64 et 66, j'en déduis

pour chacun des deux systèmes les valeurs suivantes, où le millimètre est pareillement pris pour unité de longueur. Elles se rapportent nécessairement aussi aux rayons de moyenne réfrangibilité.

Système binaire antérieur.		Système binaire postérieur.	
$n' = -0{,}2820513$	$\log n' = \bar{1}{,}4503281 -$	$n'' = -0{,}400000$	$\log n'' = \bar{1}{,}6020600 -$
$p' = -0{,}0182186$	$\log p' = \bar{2}{,}2605155 -$	$p'' = -0{,}03709677$	$\log p'' = \bar{2}{,}5693362 -$
$q' = +50.$	$\log q' = 1{,}6989700 -$	$q'' = +28.$	$\log q'' = 1{,}4471580 +$
$r' = -0{,}3157895$	$\log r' = \bar{1}{,}4993977 -$	$r'' = +0{,}0967742$	$\log r'' = \bar{2}{,}9857596 +$

de là on tire

$$n'r' = +0{,}0890689.$$

La petitesse de ce produit jointe à sa valeur positive nous apprend que l'appareil sera peu éloigné de l'achromatisme lorsque N″ sera nul, c'est-à-dire lorsque le premier verre oculaire coïncidera avec le foyer de l'objectif, ce qui permettra d'obtenir l'achromatisme complet pour quelque position peu distante de celle-là. On remarquera en outre que le coefficient r'' a été fait positif, comme dans l'oculaire de Frauenhoffer.

M. Rossin a appliqué très-avantageusement cet oculaire à un objectif achromatique ayant pour distance focale principale $\Delta' = -965^{\text{mm}}$. Il lui a fait produire ainsi une suite de grossissements variables, correspondant à des variations de l'intervalle intermédiaire h_3, lesquelles s'étendaient depuis la valeur $h_3 = 62^{\text{mm}}$ qui était la moindre, jusqu'à $h_3 = 200^{\text{mm}}$ qui était la plus grande. Les grossissements N propres à ces positions extrêmes se calculent directement pour un observateur infiniment presbyte, par l'équation de continuité (2) propre à cet état de l'œil, laquelle, d'après la page 108, donne généralement

$$N = -\Delta'(p'n'' + r'p'' + p'p''h_3);$$

alors, en y introduisant les valeurs ci-dessus des coefficients principaux, et de l'intervalle h_3, on en tire les résultats suivants :

Plus petit intervalle $h_3 = 62^{mm}$, Plus petit grossissement $N_1 = +58,7734$.
Plus grand intervalle $h_3 = 200$, Plus fort grossissement $N_3 = +148,7766$.

Entre ces deux extrêmes les variations du grossissement sont proportionnelles à celles de l'intervalle h_3, comme le montre l'expression générale de N.

Je cherche maintenant par l'équation (C)' la valeur approchée de N'' qui rend l'appareil achromatique. Je trouve ainsi d'abord

$$(n'-1)p''q'r' = -0,7509470$$
$$-p''q'\left[1+\frac{\varpi''}{p''}-n'\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]$$
$$= -p''q'(-0,217391+0,2059708) = -0,02118262.$$

On voit que $\frac{\varpi''}{p''}$ a ici une valeur négative bien moindre que dans l'oculaire de Ramsden. En effet cette valeur est

$$\frac{\varpi''}{p''} = -1,217391,$$

d'où

$$1+\frac{\varpi''}{p''} = -0,217391.$$

Néanmoins les deux termes indépendants de N'' s'ajoutent de même entre eux analytiquement, et donnent pour somme :

$$-0,77212962.$$

Le coefficient de N'' aussi calculé se trouve être :

$$-0,9740066.$$

L'équation déterminatrice de N'' est par conséquent :

$$0 = -0,77212962 - 0,9740066\, N'',$$

de là on tire

$$\log N'' = \bar{1},8991283-, \qquad N'' = -0,792735,$$

et par suite l'équation

$$N = -\frac{(p'' + p'N'')\Delta'}{n'}$$

donne

$$\log N = 1,8893483, \qquad N = 77,5083, \qquad \frac{N''}{N} = -0,0102277.$$

En nous bornant à cette première approximation, bien suffisante pour notre but, on voit que l'instrument auquel cet oculaire a été appliqué, s'est trouvé exactement achromatique pour un grossissement intermédiaire, et à peu près moyen, entre tous ceux qu'on lui a fait produire. Rien n'est plus naturel que ce résultat, puisque, dans la construction même de cet appareil, son étendue de course avait été probablement établie autour de la position où son effet paraissait le plus avantageux.

84. Pour achever d'exposer toutes les applications des formules que nous avons établies, je vais calculer numériquement les valeurs de δN résultantes de l'imperfection de l'achromatisme dans les grossissements extrêmes, où l'appareil que nous venons d'analyser s'écarte le plus de la position spéciale pour laquelle cet état a lieu. A cet effet je renverse l'équation qui donne N par N'', et j'en tire au contraire N'' en N. J'ai ainsi

$$N'' = -\frac{p''}{p'} - \frac{Nn'}{p'\Delta'};$$

en appliquant ceci aux deux grossissements extrêmes, j'en tire

Pour le plus faible $N_1 = 58,7734, \quad N''_1 = -1,093300.$
Pour le plus fort $N_3 = 148,7766, \quad N''_3 = +0,350621.$

La première valeur de N'' étant négative, appartient à une position où le premier verre de l'oculaire est postérieur au foyer de l'objectif. La seconde au contraire qui est positive, rend ce même verre antérieur au foyer. En effet on a remarqué que cela avait lieu ainsi dans l'application réelle de l'appareil à ces deux cas extrêmes. Les valeurs de N'' qui s'y rapportent ne satisfaisant pas à l'équation $(C)'$ de l'achromatisme, leur substitution y laissera un résidu C', ayant pour expression générale

$$C' = -0{,}77212962 - 0{,}9740066\,N'';$$

et en le particularisant pour chacune d'elles, d'après le nombre qui la représente, on aura

$$C'_1 = +\ 0{,}2927514, \qquad C'_3 = -\ 1{,}1136368.$$

Il ne reste plus qu'à mettre ces résultats dans l'expression générale de δN qui, pour la forme actuelle de notre équation, $(C)'$ est, d'après la page 136

$$\delta N = \frac{\Delta'}{n'q'}\,C'\delta i,$$

et en les associant aux éléments de l'oculaire ici désignés, on aura finalement dans ses effets extrêmes,

Grossissement le plus faible

$$N_1 = 58{,}7734, \qquad \delta N_1 = +\ 20{,}0322\,\delta i.$$

Grossissement le plus fort

$$N_3 = 148{,}7766, \qquad \delta N_3 = -\,76{,}2029\,\delta i.$$

85. Dans la suite de ce mémoire, je modifierai notre équation approchée (C') de manière qu'elle puisse servir non-seulement pour vérifier *à posteriori* l'achromatisme des oculaires, mais encore pour introduire directement, et *à priori,* cette

qualité dans leur construction, en y joignant toutes les autres circonstances les plus propres à assurer la bonté de leurs effets. Cela exige préalablement que nous recherchions avec soin ces diverses circonstances pour en établir les conditions analytiques, et c'est ce dont nous allons nous occuper.

§ VI. — DU CHAMP APPARENT; CONDITIONS ANALYTIQUES DESQUELLES RÉSULTE SON AMPLITUDE.

86. Considérons un point rayonnant placé au-devant d'un instrument dioptrique, et angulairement assez voisin de son axe pour que le pinceau incident qui en émane et qui va couvrir la surface antérieure de l'objectif, soit totalement admissible dans l'appareil. Parmi tous les rayons ainsi émis, il y en aura un qui percera cette surface à son centre de figure. On le nomme l'axe géométrique du pinceau incident. Si ce rayon central contient des éléments lumineux de réfrangibilité diverse, comme nous le supposerons en général, les divers rayons simples qui le composent se séparent les uns des autres dans leur transmission; et chacun d'eux, après son émergence finale, va couper l'axe du système au point oculaire qui est propre à sa réfrangibilité. Généralement leur inclinaison sur cet axe serait alors diverse, si l'on ne rendait nulle la variation chromatique du coefficient N dans l'instrument considéré. Mais au moyen de cette précaution que nous avons prise, tous les axes géométriques de couleur diverse appartenant à un même pinceau incident sortent de l'appareil parallèles entre eux.

Appliquons maintenant les mêmes conditions d'admissibilité, et de propagation libre, à tous les points rayonnants

qui composent un objet étendu, observable à travers l'instrument dioptrique donné. Tous les axes géométriques d'une même couleur, émanés de ses divers points, iront finalement concourir au même point oculaire. Alors si le centre de la pupille est placé en ce point de concours, n'eût-elle qu'une ouverture insensible, ils la pénétreront tous simultanément suivant la direction finale résultante, pour chacun d'eux, de sa direction d'incidence propre. Mais, comme la pupille a une certaine étendue, l'introduction aura encore lieu quand même elle serait placée à quelque petite distance de cette position précise. Donc, si tous les points oculaires correspondant aux diverses réfrangibilités n'occupent sur l'axe du système qu'une étendue très-restreinte, et que celui qui est propre à la réfrangibilité moyenne soit postérieur à l'instrument, l'œil placé en ce point moyen recevra dans son ouverture totale tous les axes émergents émanés des différents points de l'objet, à peu près comme s'ils concouraient finalement en un point unique. Tel est l'effet que nous avons voulu obtenir, en rendant la quantité H négative pour les rayons de moyenne réfrangibilité; et en nous proposant de plus que sa variation chromatique δH fût si petite qu'on pût la négliger.

Ces précautions étant prises, l'œil placé au point oculaire moyen ne reçoit pas seulement les axes émergents des pinceaux. Ils lui parviennent entourés des mêmes rayons émergents qui les accompagnaient dans leur incidence. Mais l'amplitude angulaire que la vision transmise embrasse en avant de l'objectif, est définie par la direction d'incidence des axes géométriques les plus écartés de l'axe central parmi tous ceux que l'instrument laisse parvenir à l'œil; et cette amplitude

se nomme l'*ouverture du champ apparent*. Pour trouver les conditions d'où dépend sa grandeur, il faut suivre spécialement le trajet de ces axes à travers le système des lentilles assemblées.

87. Chacun d'eux, lors de son incidence, est d'abord compris dans un plan diamétral du système. Son trajet ultérieur s'opère donc tout entier dans ce même plan. Nous pourrons ainsi, sans le limiter, choisir ce plan d'incidence pour celui des coordonnées x, z, ainsi que nous l'avons déjà fait page 30. Alors y_m et cos Y_m étant rendus constamment nuls dans nos formules générales, par la nullité de y_1 et de cos Y, nous n'avons plus qu'un seul système d'équation à considérer : et cos Z, cos Z_m, devenant respectivement sin X, sin X_m dans le plan des x z, où nous suivons le rayon, les équations qui déterminent sa route se réduisent aux deux suivantes :

$$\sin X_m = N \sin X + P z_1,$$
$$z_m = Q \sin X + R z_1,$$

où l'on a la condition générale

$$NR - PQ = 1.$$

z_m est l'ordonnée du point dans lequel le rayon considéré perce la surface d'émergence finale dont le rang est m, pour rentrer dans l'air ; et X_m est l'angle qu'il forme avec l'axe des x *après* avoir subi cette action.

Jusqu'ici ce rayon se trouve seulement astreint à rester dans un plan diamétral du système. Nous devrons ultérieurement ajouter que son incidence s'opère au centre de figure même de la surface objective, ce qui rendra z_1 nul. Mais avant de lui appliquer cette restriction, il est nécessaire de

présenter quelques remarques sur l'usage que nous allons faire des formules précédentes.

88. Nous y avions déjà eu recours dans la section Ire. Mais alors nous n'avions à les considérer que dans leur application à l'instrument total. Ainsi les quatre coefficients qu'elles renferment étaient censés avoir la valeur finale résultante de toutes les lentilles, et de tous les intervalles dont l'instrument est composé. Mais maintenant que nous allons les employer pour suivre les phases de transmission d'un même rayon à travers les lentilles successives, il faut marquer la succession de ces phases par un indice variable i appliqué à ces coefficients, et que nous ferons progressivement égal à 1, 2, 3... selon le rang de la surface d'*émergence*, à laquelle nous voudrons le supposer parvenu, et d'où nous le ferons ressortir dans l'air. Cette application générale se simplifiera ici, parce que nous considérons les épaisseurs des lentilles comme négligeables, ce qui réunit les points d'incidence et d'émergence des rayons sur les deux surfaces de chacune d'elles; de sorte que l'indice i peut alors être employé comme exprimant le rang successif qu'elles occupent dans le système total. Ceci convenu, faisons z_1 nul pour marquer que nous considérons un rayon à incidence centrale, et achevons de désigner cette circonstance en appliquant l'indice antérieur c aux éléments analytiques qui déterminent la marche de ce rayon. Nos formules ainsi spécifiées deviendront, pour la lentille dont le rang est i

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin {}_cX_i = N_i \sin {}_cX. \\ {}_cz_i = Q_i \sin {}_cX. \end{cases}$$

J'ai donné dans le second volume de mon Astronomie la composition des coefficients N_1, P_1 pour une valeur quel-

conque de l'indice i, en fonction des éléments constitutifs et des intervalles des lentilles traversées, soit qu'on veuille ou ne veuille pas négliger leurs épaisseurs centrales. Mais la première supposition que nous avons admise ici dans notre calcul rend naturellement ces expressions plus simples, et c'est ainsi que nous devons les employer. Alors les valeurs des coefficients N, Q, s'obtiennent d'abord directement par l'élimination successive, pour les deux premières valeurs de l'indice i, et l'on trouve ainsi

$$N_1 = 1, \qquad Q_1 = 0,$$
$$N_2 = 1 + \frac{h_1}{f_2}, \qquad Q_2 = h_1,$$

h_1 est l'intervalle compris sur l'axe central du système, entre la première lentille et la seconde. f_2 est la distance focale principale de cette seconde lentille; et le même mode d'indication ordinal s'applique successivement à ces lettres pour désigner les éléments analogues dans tout le reste de l'instrument. Ces valeurs initiales étant connues, toutes les suivantes s'en peuvent déduire successivement par les équations de dérivation que voici :

$$f_i N_i = (f_i + f_{i-1} + h_{i-1}) N_{i-1} - f_{i-1} N_{i-2}$$
$$h_{i-2} Q_i = \left(h_{i-2} + h_{i-1} + \frac{h_{i-2} h_{i-1}}{f_{i-1}}\right) Q_{i-1} - h_{i-1} Q_{i-2}.$$

J'ai donné dans l'endroit cité de mon Astronomie le moyen de former directement les valeurs de N_i et de f_i pour une valeur quelconque de l'indice i, sans passer par les éliminations successives. Mais on verra que les équations précédentes suffiront pour notre but actuel.

89. Considérons un de nos rayons à incidence centrale, contenant des éléments lumineux d'une réfrangibilité unique,

qui, ayant d'abord coupé l'axe sous l'angle primitif ${}_cX$, se propage ensuite à travers toutes les lentilles en nombre m qui composent l'instrument. Si l'on veut connaître ses ordonnées successives d'incidence et d'émergence sur ces lentilles, ainsi que les angles qu'il forme avec l'axe du système après avoir traversé chacune d'elles, il n'y a qu'à donner à l'indice i les valeurs qui marquent leur rang dans le système total; et les valeurs de ${}_cz_i$ ainsi que de $\sin {}_cX_i$ qui en résulteront, exprimeront les éléments analytiques actuels qui conviennent au rayon dans la circonstance ainsi assignée; pourvu toutefois que les ouvertures des lentilles employées soient assez grandes pour que les ordonnées ${}_cz_i$ ainsi obtenues s'y réalisent.

90. Ces lentilles étant toujours supposées infiniment minces, nommons N le grossissement angulaire total que leur système produit. Alors, pour tout rayon homogène à incidence centrale, dont les inflexions autour de l'axe du système sont maintenues très-petites, comme nos formules le supposent, les ordonnées successives ${}_cz_i$ sont liées à l'angle d'introduction ${}_cX$ et au grossissement total N par la relation suivante, qui est démontrée dans le tome II de mon Astronomie,

$$(N-1)\sin {}_cX = \frac{{}_cz_2}{f_2} + \frac{{}_cz_3}{f_3} + \frac{{}_cz_4}{f_4} + \ldots \frac{{}_cz_m}{f_m}.$$

$f_1 f_2 \ldots f_m$ désignent les distances focales des lentilles où chaque ordonnée se réalise. Si l'on remplace ces ordonnées par leurs expressions en fonction du coefficient variable Q_i, l'angle d'introduction ${}_cX$ disparaît de l'équation, comme facteur commun à tous ses termes, et il reste :

$$N = 1 + \frac{Q_2}{f_2} + \frac{Q_3}{f_3} + \frac{Q_4}{f_4} + \ldots \frac{Q_m}{f_m}.$$

Cette formule montre alors en quelle proportion chaque lentille de l'oculaire contribue au grossissement total N, dans la place où elle est employée. Le système objectif n'y entre point, parce que, étant supposé aussi infiniment mince, les rayons à incidence centrale sont censés le traverser sans déviation.

91. Les lentilles des oculaires multiples se font habituellement planes-convexes, conséquemment convergentes. Dans l'application aux lunettes terrestres où l'oculaire est quadruple, les faces planes des deux premières lentilles sont tournées vers l'objectif, celles des deux dernières vers l'œil. L'expérience, plutôt que le calcul, a fait reconnaître cette disposition de leurs faces comme la plus propre à affaiblir les effets des aberrations de sphéricité, pour le mode de répartition des images successives, tant réelles que virtuelles, qui s'y réalise ordinairement. Ces aberrations n'interviennent point dans notre recherche actuelle, parce que nous y suivons seulement la marche des rayons qui subissent des inflexions très-petites autour de l'axe central du système; mais la forme des lentilles y est cependant à considérer, en tant qu'elle peut influer sur les éléments de l'approximation qui leur attribue ce caractère. Prenant donc les lentilles de l'oculaire comme planes-convexes, désignons par n l'indice de réfraction moyen, propre à l'espèce de matière dont elles sont faites, et que nous supposons ici être la même pour toutes. Comme nous négligeons les épaisseurs centrales, leur distance focale principale f_1 aura pour expression générale $\mp \frac{r_1}{n-1}$, r désignant le rayon de courbure de leur face sphérique, lequel devra être employé comme positif, conjointement avec

le signe supérieur lorsqu'elle tournera sa concavité vers les rayons incidents, et comme négatif, conjointement avec le signe inférieur lorsqu'elle leur présentera sa convexité, de manière que f_i résulte toujours négative dans les deux cas. Alors, chaque terme $\frac{{}_cz_i}{f_i}$ deviendra $\mp (n-1)\frac{{}_cz_i}{r_i}$. Or le facteur $\frac{{}_cz_i}{r_i}$, abstraction faite de son signe occasionnel, exprime le sinus de l'angle ε_i que le rayon de courbure mène à chaque point d'incidence formé avec l'axe central du système. Et la petitesse de cet angle est une des conditions de l'approximation sur laquelle nos formalités générales sont fondées. Il faut donc s'efforcer de produire le grossissement total N, en restreignant le plus possible les valeurs individuelles de ce facteur dans les lentilles employées. Et, comme le coefficient $n - 1$ leur est commun à toutes, aussi bien que la valeur de $\sin {}_cX$ qui entre dans l'expression générale de ${}_cz_i$, pour chaque rayon à incidence centrale dont on suit la marche, on voit que le même principe de restriction devra être appliqué aux rapports $\frac{Q_i}{f_i}$ qui sont proportionnels aux $\sin \varepsilon_i$. On arriverait à une conséquence pareille, si l'on prenait quelqu'une des lentilles biconvexes et isocèles comme on le fait dans certaines constructions. Car si l'on désigne par $+ r_i$ le rayon de courbure de la surface postérieure, qui est positif dans notre notation, la distance focale principale d'une telle lentille, en négligeant son épaisseur centrale, serait $-\frac{r_i}{2(n-1)}$. Alors le terme correspondant $\frac{{}_cz_i}{f_i}$ ou $\frac{Q_i}{f_i} \sin {}_cX$ deviendrait $-2(n-1)\frac{{}_cz_i}{r_i}$, ou $-2(n-1)\sin {}_cX\frac{Q_i}{r_i}$. Donc, si le rapport $\frac{Q_i}{f_i}$ se trouvait convenablement atténué, cette limitation se repor-

terait sur les angles antérieurs et postérieurs $\varepsilon_{,}$, propres aux deux faces de cette lentille, comme on le désire toujours. En général, pour toutes les formes de lentilles jusqu'ici usitées, c'est un axiome de pratique que les valeurs individuelles des rapports $\frac{{}_cz_i}{f_i}$ ne doivent jamais excéder $\frac{1}{4}$; et on ne leur permet tout au plus d'atteindre cette limite que dans les lentilles les plus rapprochées de l'œil. En appliquant ceci à une lentille plane convexe où n serait 1,5, le rapport $\frac{{}_cz_i}{f_i}$, considéré indépendamment de son signe propre, deviendrait $\frac{{}_cz_i}{2r_i}$; et ce rapport étant fait égal à $\frac{1}{4}$, il en résulterait $\frac{{}_cz_i}{r_i}=\frac{1}{2}$ ou $\varepsilon_{,}=30°$, ce qui est une valeur bien rarement tolérable. C'est pourquoi, lorsque les opticiens construisent des lentilles de ce genre, pour les oculaires, ils ont pour pratique de faire leur demi-diamètre d'ouverture égal à $\frac{6}{10}$ du rayon de leur face courbe, ou à $\frac{3}{10}$ de la distance focale qu'ils ont l'intention de leur donner. Car ce demi-diamètre excédant celui de la plus grande ouverture *efficace* que la lentille puisse admettre, on est sûr que, dans l'instrument dont elle fera partie, les rayons lumineux les plus écartés de l'axe central devront toujours la rencontrer en dedans de ses bords, et pourront ainsi y être librement transmis.

92. Maintenant si nous considérons généralement N dans ses éléments $\frac{Q_i}{f_i}$, le plus grand affaiblissement qu'on pourrait opérer dans ceux-ci, consisterait à les faire tous de même signe et égaux entre eux, en leur donnant pour valeur commune $\frac{N-1}{m-1}$, où m exprime le nombre total des lentilles

supposées infiniment minces dont l'instrument se compose. Mais, lorsqu'on prend la première lentille de l'oculaire convergente, ce qui rend f_2 négatif, comme on le pratique toujours dans les oculaires multiples, cette égalité de valeurs ne peut être établie à moins que N ne soit négatif, c'est-à-dire dans les instruments qui renversent. En effet, d'après les expressions explicites rapportées dans la page 158, le premier coefficient Q_2 est égal à h_1, c'est-à-dire qu'il représente l'intervalle compris entre l'objectif et la première lentille oculaire, lequel est essentiellement positif, dans notre notation. Le rapport $\frac{Q_2}{f_2}$ devient donc individuellement négatif par l'application de son dénominateur f_2 quand cette première lentille est convergente. Ainsi sa répétition par égalité, dans les termes suivants, ne peut reproduire $N - 1$ que si N est négatif. Car, dans les lunettes qui sont destinées à l'observation d'objets très-distants, il faut toujours admettre que N, quel que soit son signe, n'est pas une fraction de l'unité, mais un nombre plus ou moins supérieur, de sorte qu'il communique son signe propre à $N - 1$.

93. C'est pour cela que l'on fait toujours N négatif, dans les instruments astronomiques, où le renversement est indifférent. Alors, si le mouvement des rayons lumineux ne se trouve assujetti à aucune condition spéciale qui le restreigne, tous les termes variables qui composent N sont faits égaux entre eux, et conséquemment négatifs comme le premier. Par suite, si l'on donne à l'angle ${}_cX$ une valeur admissible quelconque, qui devient commune à tous les ${}_cz_i$ du rayon à incidence centrale ainsi introduit, toutes ces ordonnées prennent également un même signe, soit positif, soit négatif;

de sorte que chacun de ces rayons, dans son trajet, va percer toutes les lentilles oculaires, du même côté de leur axe commun. Il ne reste plus qu'à concilier cette marche avec la dispersion rectiligne des foyers, et pour cela deux lentilles convergentes suffisent. Telle est la construction de l'oculaire à deux verres, employé dans les instruments astronomiques où l'on ne veut pas introduire de micromètres filaires. L'égalité de tous les termes $\frac{Q_i}{f_i}$ affaiblit ainsi chacun d'eux autant qu'il est possible pour composer N — 1; et chacune des deux lentilles contribue également à produire le grossissement total N.

94. Mais cette identité de répartition et de signe n'est plus possible dans les instruments où N doit être positif, c'est-à-dire, qui doivent faire voir les objets droits, lorsqu'on leur donne un oculaire formé d'un assemblage de lentilles convergentes, comme cela se pratique habituellement pour les lunettes terrestres. Alors la valeur inévitablement négative du premier terme $\frac{Q_2}{f_2}$ doit être d'abord détruite, puis dépassée par les termes suivants, autant qu'il le faut, pour recomposer la somme totale positive N — 1 qui leur est assignée. Ce qu'il y a de mieux à faire alors, c'est de donner au terme inévitablement négatif $\frac{Q_2}{f_2}$ la moindre valeur négative que l'on soit contraint d'admettre pour la destination de l'instrument; puis, de faire tous les autres $\frac{Q_2}{f_2}$ positifs, et, sinon égaux entre eux, du moins aussi près d'être égaux que cela est compatible avec les autres conditions de nécessité ou de convenance auxquelles on doit satisfaire. Alors,

si l'on conçoit, comme tout à l'heure, un ${}_cX$ admissible, qui devient commun à toutes les ordonnées ${}_cz_i$ du rayon incident central introduit sous cet angle, la première ordonnée ${}_cz_2$ étant, je suppose, positive, toutes les suivantes seront négatives, ou inversement. De sorte que le rayon ainsi transmis ne changera qu'une seule fois de situation autour de l'axe du système, en se rendant à son point oculaire final; et ce changement s'opérera en passant de la première à la seconde lentille oculaire. Toutes les lunettes terrestres à oculaire quadruple sont construites sur ce principe de distribution. Mais les trois termes de même signe $\frac{Q_3}{f_3}$, $\frac{Q_4}{f_4}$, $\frac{Q_5}{f_5}$ ne peuvent pas y être rendus exactement égaux entre eux, par des raisons que je ferai bientôt connaître.

95. Les premières lunettes donnant des images droites des objets, furent, à ce que l'on croit, construites par Galilée, en combinant un objectif convergent avec un oculaire formé d'une seule lentille divergente. Quoique ce mode de construction pût être aujourd'hui amélioré, en faisant l'objectif achromatique, on ne l'emploie plus que pour les lorgnettes de spectacle, et il ne sera pas inutile de montrer la cause qui l'a fait restreindre à cet usage.

Pour y appliquer nos formules générales, il faut anéantir toutes les lentilles de nos oculaires multiples, excepté la première, que nous continuerons de supposer infiniment mince. Les coefficients principaux N″, P″, du système oculaire ainsi réduit, seraient alors ceux qui conviennent à une telle lentille, c'est-à-dire qu'on aura

$$N''=1, \qquad P''=\frac{1}{f_2}, \qquad Q''=0, \qquad R''=1.$$

On devra donc introduire d'abord ces valeurs restreintes dans les équations fondamentales (a) et (b) de la page 68, qui sont :

$$N = N'' + P''h_1, \qquad P'' = -\frac{N}{\Delta'},$$

lesquelles, appliquées à des pinceaux lumineux d'une réfrangibilité fixe, par exemple de la réfrangibilité moyenne, assurent la continuité de leur transmission à travers l'appareil, ainsi que leur émergence finale sous forme de faisceaux, avec le grossissement angulaire représenté par N. Cette substitution donne

$$N = 1 + \frac{h_1}{f_2}, \qquad f_2 = -\frac{\Delta'}{N}.$$

La seconde de ces équations détermine la distance focale f_2 de la lentille qu'il faut appliquer comme oculaire à l'objectif donné, pour obtenir le grossissement moyen N qu'on veut lui faire produire. La distance focale Δ' étant toujours négative, et N devant être positive, puisqu'on demande que l'instrument fasse voir les objets droits, f_2 résulte positif, c'est-à-dire que la lentille oculaire doit être divergente. On la fait d'ordinaire biconcave et isocèle ; quelquefois plano-concave, et alors on tourne la face plane du côté de l'œil.

La première équation en h_1 détermine la place de cette lentille, et si l'on en chasse N elle donne

$$h_1 = -\Delta' - f_2.$$

Δ' étant négatif et f_2 positif, on voit que la lentille oculaire doit se placer en avant du foyer de l'objectif, et en être éloignée d'une quantité égale à sa distance focale principale propre. Cette position est, en effet, la seule où les pinceaux concentrés par l'objectif puissent être transformés en faisceaux par la lentille oculaire divergente que l'on suppose infiniment mince.

Tous les éléments de l'appareil se trouvant ainsi déterminés par la condition du redressement, jointe à la grandeur du grossissement N que l'on veut faire produire à l'objectif donné, aucun ne reste disponible pour assurer la dispersion rectiligne des foyers de diverses couleurs. Tout ce qu'on peut faire c'est d'évaluer les variations chromatiques de N correspondantes à celles de f_2, pour connaître les circonstances qui en rendraient l'étendue intolérable. Or, si n est l'indice de réfraction, moyen propre à l'espèce de verre dont la lentille loculaire est faite, la formule générale de variation démontrée page 62, donnera :

$$\delta\left(\frac{1}{f_2}\right)=\frac{1}{f_2}\frac{\delta n}{(n-1)}$$

ou, par abréviation,

$$\delta\left(\frac{1}{f_2}\right)=\frac{1}{f_2}\delta i,$$

en représentant par δi le facteur qui dépend de n, comme nous l'avons fait précédemment. Mais l'expression de N en f_2 donne

$$\delta N = h_1\delta\left(\frac{1}{f_2}\right),$$

conséquemment

$$\delta N=\frac{h_1}{f_2}\delta i,$$

ou, en réintroduisant N,

$$\delta N=(N-1)\delta i.$$

Ainsi, pour chaque nature donnée du verre oculaire, les variations chromatiques de N, autour de sa valeur moyenne, augmentent avec la grandeur que l'on veut donner à cet élément. Elles peuvent donc être tolérables dans les grossissements très-faibles, tels que ceux qu'on admet dans les lunettes de spectacle où l'on fait tout au plus N égal aux

nombres 4 ou 5. Mais, si l'on voulait dépasser ces limites, le mauvais effet produit par l'accroissement des δN ne pourrait s'atténuer qu'en rétrécissant l'ouverture du champ apparent, beaucoup plus que ne le comporte l'usage auquel ces instruments sont destinés.

96. La position intérieure que l'oculaire divergent donne au point oculaire de l'instrument total, est encore une circonstance qui contribue à restreindre considérablement l'amplitude observable du champ apparent, surtout dans les grossissements qui ne sont pas très-faibles. D'abord, que le point oculaire soit ainsi placé, c'est un fait dont la preuve est bien facile. En effet, la distance H de ce point, *au devant* de la surface d'émergence finale, est, dans tout système optique, exprimée par $\frac{Q}{N}$, comme je l'ai rappelé page 25. Ici l'objectif et l'oculaire étant considérés comme deux lentilles simples, dont on néglige les épaisseurs centrales, le coefficient principal Q devient dans notre notation Q_1; et, ainsi que je l'ai établi page 158, il est égal à leur intervalle h_1; cela donne

$$H = \frac{h_1}{N}.$$

H est donc positif, puisque les termes de la fraction qui l'exprime le sont tous deux ; l'un h_1, comme désignant un intervalle, l'autre N parce que l'instrument fait voir les objets droits. D'après cela, le point oculaire auquel H s'applique est antérieur à la surface d'émergence, ainsi que je l'ai annoncé. Si l'on élimine h_1 de H par son expression en f_2, il vient

$$H = \frac{(N-1)}{N} f_2,$$

ce qui montre que H est toujours moindre que f_2.

97. Pour analyser avec plus de facilité l'influence de cette position antérieure du point oculaire sur l'amplitude du champ, ne considérons que des rayons de réfrangibilité moyenne, et rappelons d'abord ce qui arrive quand ce même point est postérieur à la dernière lentille, de sorte que le centre de la pupille peut physiquement s'y placer. Alors tous les axes des pinceaux incidents concourent à ce centre; et ainsi, la pupille fût-elle réduite à ce point unique, ils lui donnent la perception de chaque point extérieur dont ils sont émanés. Les autres rayons qui accompagnaient ces axes dans leur incidence, et qui ont percé l'objectif hors de son centre de figure, se répartissent dans les portions correspondantes de l'anneau oculaire. Ils arrivent ainsi sur les parties excentriques de la pupille qui se trouvent assez étendues pour les recevoir, et ils fortifient la sensation produite par les axes. Mais ils la reportent comme eux aux mêmes points extérieurs dont ils sont partis simultanément; de sorte qu'ils n'ont absolument aucune influence pour accroître l'amplitude du champ embrassé par les axes, laquelle resterait rigoureusement identique, quand même l'objectif et la pupille seraient réduits l'un et l'autre à leur point central.

98. Il en est tout autrement, lorsque le point oculaire est antérieur à la dernière lentille, conséquemment intérieur à l'instrument. Alors l'amplitude du champ observable dépend de l'étendue de l'objectif, de la grandeur de la pupille, du lieu où l'on place l'œil, et de l'intensité des pinceaux émergents qui lui parviennent.

Pour s'en convaincre, et pour saisir les conditions mathématiques de cette dépendance, il suffit de jeter les yeux sur les fig. 4 et 5, dont tous les éléments, tant linéaires qu'an-

gulaires, ont été à dessein exagérés, afin d'y rendre les particularités de la marche des rayons plus facilement discernables. Toutes deux s'appliquent au cas simple d'un objet très-éloigné vu à travers un système binaire, à oculaire divergent. Considérons d'abord la première. Les droites SA_1, $S\Lambda_1$, $S\lambda_1$, représentent l'axe central et les éléments extrêmes d'un faisceau incident, composé de rayons parallèles, qui pénètre l'objectif $\lambda_1 A_1 \Lambda_1$, en formant avec l'axe du système l'angle primitif ${}_cX$. L'épaisseur en A_1 étant supposée négligeable, le rayon central SA_1 se prolonge en ligne droite après l'avoir traversée; et il se dirige ainsi vers le foyer principal F qui convient à sa direction d'incidence. Les rayons extrêmes, partant de leurs points d'incidence respectifs λ_1, Λ_1, se dirigent aussi vers ce même foyer F. Mais la lentille oculaire qui est placée en avant de ce foyer les arrête, ainsi que le rayon central, avant qu'ils aient pu y parvenir. Alors celui-ci sort de cette seconde lentille suivant le prolongement de la droite H_cI_2 menée du point oculaire intérieur H à son point d'incidence; et en supposant l'appareil ajusté pour un observateur infiniment presbyte, les rayons extrêmes sortent de leurs points d'incidence ou d'émergence respectifs suivant des directions parallèles à celles-là; de sorte que le faisceau incident se trouve transformé en un faisceau émergent plus mince. Les choses étant telles, si l'on suppose la pupille appliquée immédiatement contre la lentille oculaire, elle ne percevra le rayon émergent central, que si son demi-diamètre d'ouverture égale ou surpasse l'ordonnée d'émergence $A_{2\,c}I_2$ de ce rayon. Mais, avec une ouverture moindre, et seulement égale à A_2I_2, elle percevra le rayon émergent extrême I_2R_2 qui est entré par le bord inférieur Λ_1 de l'objectif, et qui est émané du même point

de l'objet. Donc si ce rayon, considéré mathématiquement, c'est-à-dire comme une droite abstraite, suffit pour produire la perception du point dont il est parti, le champ apparent sera limité par l'angle $_cX$ qu'il formait avec l'axe central dans son incidence, quoique la pupille ne reçoive, ni l'axe géométrique, ni aucun autre élément du faisceau primitif auquel il appartenait.

99. L'application immédiate de la pupille contre la lentille oculaire est une abstraction que la sensibilité de l'organe ne permet pas de réaliser : les cils même qui le protégent s'y opposent; et, dans l'observation, la pupille se place réellement *au delà* de la surface d'émergence à une distance qui est au moins de 10^{mm}. Je la désignerai généralement par $+ D'$, en la comptant ici, par exception, comme positive dans ce sens ultérieur. Or, cette circonstance modifie encore l'amplitude du champ observable à travers une pupille d'une grandeur donnée, et c'est ce que montre la figure 5, où OO_1 représente sa position dans l'axe du système. Car en supposant son demi-diamètre CO, égal à l'ordonnée A_2I_2 de la figure 4, le rayon émergent excentrique I_2R_2 qu'elle pouvait alors percevoir, passera ici hors de sa surface; et le rayon analogue I_2O qui la percera à ses bords, proviendra d'un faisceau incident moins incliné sur l'axe du système que le précédent ne l'était, ce qui rendra l'amplitude du champ apparent moindre que dans la première supposition.

100. Il faut donc, pour calculer cette amplitude, tenir compte de toutes les circonstances que nous venons de signaler. Or, cela est très-facile par les formules générales établies dans la section Ire. En effet, tous les rayons limites dont nous voulons suivre ici la marche, pouvant être considérés

comme étant dans le plan des $x\,z$, leurs éléments d'émergence seront exprimés en fonction de leurs éléments d'incidence, au moyen des deux équations

$$\sin X_2 = N \sin X + P z_1,$$
$$z_2 = Q \sin X + R z_1.$$

Ici l'objectif et l'oculaire sont considérés comme deux lentilles simples dont on néglige les épaisseurs centrales. Les quatre coefficients principaux N, P, Q, R, ont donc généralement les formes qui conviennent à un système binaire ainsi restreint. C'est-à-dire qu'en nommant $f_1 f_2$ les distances focales principales des deux lentilles pour une réfrangibilité déterminée, et h_1 l'intervalle qui les sépare, les expressions générales de ces coefficients seront

$$N = 1 + \frac{h_1}{f_2}; \quad P = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{h_1}{f_1 f_2}; \quad Q = h_1; \quad R = 1 + \frac{h_1}{f_1}.$$

Seulement, pour notre application actuelle, il faudra y remplacer la distance focale f_1 de la première lentille par la lettre Δ' que nous avons affectée au système objectif, et il faudra aussi la considérer comme commune aux rayons de toutes les réfrangibilités, puisque ce système est supposé achromatique individuellement. Mais ces formes générales se simplifient encore dans le cas spécial que nous voulons traiter. En effet, puisque nous considérons un faisceau incident composé de rayons parallèles entre eux, l'angle d'introduction X sera commun à tous ses éléments. Et puisque nous voulons qu'il fasse aussi son émergence à l'état de faisceau, il faudra que l'angle d'émergence finale X_2 reste constant, quelle que soit l'ordonnée z_1 d'incidence. Ceci exige que P soit nul. Cette condition appliquée à l'expression générale

de P, en y écrivant Δ' au lieu de f_1, donne

$$h_1 = -\Delta_1 - f_2.$$

C'est ce que nous avons déjà trouvé, page 166. Or, h_1 est constant pour toutes les réfrangibilités, comme exprimant un intervalle. Δ_1 l'est aussi, puisque l'objectif est achromatique. L'équation précédente ne pourrait donc être généralement satisfaite que si la distance f_2 avait la même constance, c'est-à-dire, si la lentille oculaire était pareillement rendue achromatique, ce que je ne supposerai point. J'admettrai seulement que f_2 est déterminé de manière que l'équation soit satisfaite exactement dans le cas de la réfrangibilité moyenne, et approximativement dans les autres. Outre que les oculaires divergents dont nous voulons ici étudier les effets ne s'emploient jamais que simples, toutes les conséquences auxquelles nous parviendrons relativement à la limitation du champ qui en résulte, subsisteraient encore si on les supposait achromatiques, comme on le reconnaîtra facilement par les formules mêmes.

Cette valeur de h_1 étant introduite dans les expressions de N et de R, restreintes pareillement à la réfrangibilité moyenne, il en résulte :

$$N = -\frac{\Delta'}{f_2}; \qquad R = -\frac{f_2}{\Delta'} = +\frac{1}{N};$$

et par suite

$$h_1 = (N - 1) f_2;$$

ou encore

$$h_1 = -\frac{(N-1)}{N}\Delta'.$$

Enfin Q étant égal à h_1, on a aussi

$$Q = -\frac{(N-1)}{N}\Delta'.$$

Ceci complète les expressions explicites des quatre coefficients pour les circonstances spéciales que nous admettons. En outre, Q étant égal à $h_1 \cdot \frac{Q}{N}$ ou H devient $\frac{h_1}{N}$ comme nous l'avons déjà reconnu, page 168.

101. Maintenant prenons pour type la figure 5 ; et, ayant placé le centre de la pupille en C à une distance $+ D'$, au delà de la surface d'émergence, ne limitons pas son ouverture, mais considérons-la comme un plan d'une étendue indéterminée. Je choisis alors un rayon excentrique SA_1I_2O, qui, après avoir traversé l'objectif à son bord inférieur A_1, va percer le plan de la pupille en O, à une distance de l'axe central exprimée généralement par $+ \omega$. Je prends ce rayon comme appartenant au faisceau réfracté qui borde le champ physiquement perceptible : soit que lui seul suffise pour donner la perception du point extérieur dont il est émané, auquel cas ω devra être le petit diamètre réel de la pupille ; soit que la sensation exige qu'une certaine épaisseur finie du même faisceau pénètre simultanément l'organe, auquel cas ω devra être d'autant inférieur à ce demi-diamètre réel. La condition d'incidence du rayon dont il s'agit donnera d'abord $z_1 = - A_1$; et, puisque le coefficient principal P est généralement nul pour l'espèce de réfrangibilité qui lui est propre, ses éléments particuliers d'émergence seront

$$\sin X_2 = N \sin {}_eX,$$
$$z_2 = Q \sin {}_eX - RA_1.$$

J'écris ${}_eX$ au lieu de X pour rappeler que le rayon considéré fait partie d'un faisceau incident de rayons parallèles, dont l'angle d'introduction X est le même que celui de leur axe central commun.

Je conduis maintenant ce rayon, au delà de la surface d'émergence, vers l'œil, en le rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires x, z, celle-ci parallèle aux $+z_{,}$, et l'autre comptée sur l'axe central du système à partir de $A_{,}$, positivement vers C. L'équation courante du rayon ainsi défini, sera évidemment

$$z - z_{,} = x \tang X_{,}.$$

Conformément aux principes de l'approximation sur laquelle nos formules reposent, l'angle $X_{,}$ doit être censé assez petit pour que l'on puisse remplacer sa tangente par son sinus. Maintenant si l'on veut que le rayon aille rencontrer le plan de la pupille à la distance $+\omega$ de l'axe central, il faudra que les coordonnées $+D'$ et $+\omega$ de ce point de rencontre satisfassent pour x et z à l'équation précédente, ce qui donne

$$\omega - z_{,} = D' \tang X_{,}.$$

Alors, en mettant pour $z_{,}$ et $\tang X_{,}$, ou $\sin X_{,}$, leurs expressions formées il n'y a qu'un moment, on aura pour condition de la rencontre assignée

$$\omega - Q \sin {}_{c}X + RA_{,} = D'N \sin {}_{c}X;$$

il ne restera plus qu'à remplacer les coefficients Q et R par leurs valeurs spéciales $-\left(\frac{N-1}{N}\right)\Delta'$ et $+\frac{1}{N}$; après quoi D' étant supposé connu, l'équation donnera $\sin {}_{c}X$ en fonction de ω, ou ω en $\sin {}_{c}X$, comme il suit,

$$\sin {}_{c}X = \frac{N\omega + A_{,}}{D'N^2 - (N-1)\Delta'}; \quad \omega = \left[D'N - \frac{(N-1)\Delta'}{N}\right] \sin {}_{c}X - \frac{A_{,}}{N}.$$

La première de ces expressions ne peut pas être appliquée avec certitude. Car, pour le faire, il faudrait savoir jusqu'à

quelle distance des bords de la pupille doit s'étendre le faisceau émergent qui produit la perception des objets les plus écartés de l'axe central, et qui borde ainsi le champ effectivement embrassé par l'œil. Il faudrait, en outre, connaître le demi-diamètre de la pupille pendant l'observation, pour en soustraire cette portion pénétrée par le faisceau, et obtenir ainsi sa plus petite ordonnée ω appartenant à celui des rayons composants dont l'ordonnée d'incidence a été $-A_{,}$. Mais on peut très-bien déterminer directement cette plus petite ordonnée par l'expérience même, en se donnant le demi-diamètre apparent $A_{,}$ de l'objectif, sa distance focale principale $\Delta_{,}$, le grossissement produit N, la distance $+D'$ où l'on place l'œil, au delà de l'oculaire, et mesurant l'amplitude relle $2_{,}X$ du champ apparent observé dans ces conditions. Quand on aura ainsi ω, on le retranchera du demi-diamètre de la pupille, soit mesuré, soit présumable. Le reste sera l'épaisseur de la portion du faisceau réfracté, qui a été indispensable pour donner la perception distincte des objets; et elle devra toujours être moindre que son épaisseur totale $\frac{2A_{,}}{N}$.

Quoique l'expression de $\sin {}_{,}X$ en ω ne soit pas numériquement applicable par les motifs que je viens d'expliquer, elle peut cependant fournir une notion très-utile. En effet, l'ordonnée ω ne peut jamais excéder le demi-diamètre réel de la pupille, et elle lui deviendrait seulement égale dans le cas où un rayon lumineux, d'une finesse mathématique, suffirait pour produire la perception distincte des objets extérieurs. D'après cela, si, dans l'expression de $\sin {}_{,}X$, on attribue à ω une valeur de 3 ou 4 millimètres, ce qui semble être

le maximum qu'elle puisse atteindre, quand la pupille est exposée à la lumière du jour, on sera sûr d'obtenir l'angle ${}_cX$ plutôt trop fort que trop faible. Or, en comparant, pour une telle donnée, les termes qui forment le numérateur de sin ${}_cX$, et ceux qui composent son dénominateur, on reconnaîtra aisément que si N est un nombre tant soit peu considérable, comme cela a toujours lieu dans les lunettes astronomiques et terrestres, la valeur résultante de ${}_cX$ sera très-petite, c'est-à-dire que l'amplitude mathématiquement possible du champ observable sera très-restreinte; et celle dans laquelle la perception réelle s'étendra, le sera encore davantage, puisque ω y sera moindre qu'on ne l'a supposé. Or, tout cela est parfaitement confirmé par les expériences suivantes qui ont eu précisément pour but de comparer numériquement les proportions d'amplitude du champ apparent, embrassées par des oculaires multiples et par des oculaires divergents simples appliqués à un même objectif, avec un même pouvoir d'amplification.

102. Ces expériences ont été faites à ma prière, par M. Rossin, avec une excellente lunette terrestre qu'il avait construite pour l'École des mines de Paris. L'objectif, qui est achromatique, a 72$^{mm.}$ d'ouverture réelle, avec une distance focale principale égale à 965$^{mm.}$ L'oculaire quadruple qui y est adapté admet une variation de son intervalle intermédiaire au moyen de laquelle le grossissement passe de 37,79210 à 46,15318; ce sont les valeurs que j'ai calculées d'après les longueurs des distances focales, et celles de l'intervalle intermédiaire, que M. Rossin avait mesurées pour ces deux cas. Lui-même, par le dynamètre, il avait trouvé 38 et 48 pour ces deux valeurs de grossissement. Il a aussi mesuré les am-

plitudes du champ total qui y répondaient, et il les a trouvées de 49′ pour le plus faible, de 39′ pour le plus fort. Si, des grossissements calculés, on conclut sin $_cX_m$ par son expression générale N sin $_cX$, on obtient l'angle $_cX_m$ égal à 15° 37′ 28″,5 pour le premier cas, et à 15° 10′ 35″,6 pour le second. Ses valeurs oscillent ainsi autour de 15° 30′ que j'ai dit être la limite moyenne de l'angle $_cX_m$ dans les plus parfaites de ces constructions.

103. Pour apprécier comparativement l'effet des oculaires divergents, M. Rossin a successivement appliqué au même objectif deux lentilles biconcaves et isocèles, faites avec une espèce de verre dont l'indice de réfraction n était 1,60 pour les rayons de moyenne réfrangibilité. D'après cela, en nommant $+ r_2$ le rayon de courbure antérieur de ces lentilles, leur distance focale principale f_2 avait pour expression générale $+ \frac{r_2}{2(n-1)}$ ou $+ \frac{r_2}{1,2}$ en remplaçant l'indice n par sa valeur. Ainsi, en les appliquant à l'objectif dont la distance focale principale Δ' était -965^{mm}, le grossissement angulaire résultant N ou $-\frac{\Delta'}{f_2}$ avait pour valeur, $\frac{965.1,2}{r_2}$ ou $\frac{1158}{r_2}$.

Dans la plus faible de ces lentilles, le rayon de courbure r_2 mesuré au sphéromètre, était $38^{mm},35$. Le grossissement produit N était donc $\frac{1158}{38,35}$ ou 30,19557. L'amplitude totale du champ apparent déterminée par une mesure précise s'est trouvée être de 11′.

Pour la seconde lentille, le rayon de courbure r_2 était 18^{mm}; le grossissement produit N était donc $\frac{1158}{18}$ ou $64\frac{1}{3}$. L'amplitude totale du champ apparent, étant mesurée, s'est trouvée réduite à 6′.

On voit déjà combien ces amplitudes sont restreintes comparativement à celles que l'oculaire quadruple admet pour d'égales valeurs du grossissement. Afin d'obtenir les valeurs de ω qui y correspondent, je supposerai $D' = 10^{\text{mm.}}$, ce qui peut être une évaluation trop forte pour quelques observateurs, mais certainement trop faible pour d'autres; en sorte qu'on peut la prendre comme une moyenne. Appliquant donc notre formule à ces données, j'en conclus les deux valeurs suivantes de ω, que je mets en regard avec le grossissement correspondant N, et avec le demi-diamètre $\frac{A_1}{N}$ des faisceaux émergents formés sous son influence, dans chacune des observations.

	Grossissement angulaire, calculé d'après les distances focales de l'objectif, de l'oculaire, et l'intervalle compris entre eux. N	Demi-diamètre des faisceaux émergents, formés sous l'influence du grossissement N, le demi-diamètre d'ouverture A_1 de l'objectif, étant 36^{mm}. $\frac{A_1}{N}$	Demi - amplitude du champ apparent, perçu en réalité par l'œil, évaluée d'après l'observation ${}_e X$	Valeur de ω résultante de ces données par la formule ω
		mm.		mm.
1re observation.	+ 30,19557	1,192228	5′,30″	0,783625
2e observation.	64,33333	0,559585	3′,0	0,830860

La valeur conclue de ω est, dans les deux observations, notablement moindre que le demi-diamètre qu'on peut attribuer à la pupille influencée par la lumière du jour. Ce demi-diamètre était donc complété par la portion transversale du faisceau émergent extrême qui entrait dans l'organe, avec une épaisseur justement suffisante pour donner la per-

ception des objets. On pourrait même remarquer que cette épaisseur complémentaire est un peu plus grande dans la première observation que dans la seconde, où le faisceau émergent était plus condensé, et pouvait produire une impression égale par une moindre portion de son diamètre transversal. Mais les données fournies par l'observation ne sont peut-être pas assez précises pour qu'on puisse en inférer avec certitude des détails si délicats. En effet, si l'on prenait la première valeur de ω comme élément pour calculer la seconde valeur de ${}_{,}X$, où l'on doit cependant la trouver moindre, on trouverait pour ce nouveau cas

$${}_{,}X = 2',53'',88,$$

tandis que l'observation a donné

$${}_{,}X = 3'.$$

La différence de ces deux évaluations est de l'ordre des erreurs que comporte ce genre de mesures, de sorte qu'on n'en saurait répondre. Il faut donc se borner à remarquer qu'elle est dans le sens que le raisonnement indiquerait.

104. La formule qui donne sin ${}_{,}X$ en fonction de ω, montre que la grandeur du grossissement N a une influence considérable pour affaiblir l'angle ${}_{,}X$; d'autant qu'on n'entreprend jamais d'obtenir de forts grossissements qu'en les appliquant à des objectifs d'une grande longueur focale Δ', ce qui accroît encore le dénominateur de sin ${}_{,}X$ relativement à son numérateur. Aussi, n'emploie-t-on avec avantage les oculaires divergents simples que pour les lorgnettes de spectacle dont le grossissement N est toujours très-faible, s'élevant, au plus, et bien rarement jusqu'à 5 unités, en même temps que leur objectif a toujours une distance focale Δ' peu considérable et une grande ouverture $2A_1$, afin qu'avec peu de longueur

elles donnent beaucoup de lumière et de champ. Par une conséquence de ces dispositions, le diamètre $\frac{2A_1}{N}$ des faisceaux émergents y est aussi fort large, souvent de 10 et 12 millimètres; de sorte que la lumière y étant peu condensée, il faut que la pupille reçoive une proportion assez forte de leur épaisseur totale pour avoir la perception des objets. Aussi, quand on calcule ω pour ces appareils, d'après l'observation de l'angle $2_e X$ qu'ils embrassent, comme nous l'avons fait tout à l'heure, on trouve habituellement sa valeur non-seulement bien plus petite, mais même négative; c'est-à-dire que le faisceau émergent qui borde le champ sensible, pénètre et couvre la pupille depuis son bord extrême jusqu'au delà de son centre. J'ai constaté ce résultat pour plusieurs de ces instruments réputés de la meilleure construction. Mais les données que l'on m'avait fournies n'étaient ni assez précises, ni assez comparables entre elles pour qu'on pût en inférer avec certitude les proportions du faisceau émergent qui, dans chaque cas, avait paru nécessaire pour la perception. D'ailleurs, les indications précédentes suffisent au but que je m'étais proposé, qui était de montrer par quelle combinaison de circonstances les oculaires divergents simples rétrécissent le champ apparent quand le grossissement est tant soit peu considérable, au point qu'on ne peut plus alors les employer; tandis qu'ils donnent une amplitude de champ très-suffisante dans les lorgnettes de spectacle, où le grossissement est faible. J'ajouterai seulement deux remarques essentielles sur ces applications. La première, c'est que l'on se tromperait beaucoup si, dans les lorgnettes, on voulait calculer l'amplitude du champ réel, en le supposant

limité par le rayon abstrait qui vient d'un des bords de l'objectif au bord opposé de la pupille, ainsi que les auteurs de traités d'optique le prescrivent généralement. On trouverait ainsi une étendue souvent plus que double de la réalité, même en supposant la pupille réduite à un point unique. Cela tient à la grande largeur de la portion des faisceaux qui devient alors nécessaire à la perception. Ma deuxième remarque, c'est qu'en effectuant des calculs pareils à ceux qui viennent d'être exposés ici, il faut avoir grand soin d'y restreindre le diamètre $2A_1$ de l'objectif à la seule portion qui est réellement efficace, c'est-à-dire, pour laquelle la transmission des rayons n'est pas ultérieurement interceptée, par des diaphragmes intérieurs s'il en existe, ou même par les inflexions des tuyaux des montures, comme cela arrive dans certaines constructions. Il n'est pas rare de trouver des lorgnettes de spectacle où des obstacles de ce genre interceptent la transmission dans une portion considérable du contour de l'objectif, de manière à rendre son ouverture efficace beaucoup moindre que l'ouverture apparente.

105. Les inconvénients qui résultent de la position intérieure du point oculaire, existeraient dans tout appareil où le système oculaire serait composé d'un nombre quelconque de lentilles divergentes. Car les distances focales principales f_1 de toutes ces lentilles étant positives, rendraient tous les termes de Q et de N individuellement positifs, ce qui communiquerait le même signe au rapport $\frac{Q}{N}$ qui exprime H. Le coefficient N se trouvant rendu ainsi positif, l'instrument employé à la formation d'images antérieures à sa dernière surface, les donnerait nécessairement droites. Mais la même identité de

signe ayant lieu aussi dans tous les termes de δN, leur somme ne pourrait jamais être rendue nulle par aucun arrangement des lentilles oculaires, c'est-à-dire qu'on ne pourrait jamais obtenir la dispersion rectiligne des foyers de diverses couleurs dans un pareil instrument.

106. Je n'entreprendrai pas de chercher s'il serait ou ne serait pas possible de composer des systèmes de lentilles convergentes et divergentes qui fussent avantageusement applicables, comme oculaires, pour faire voir les objets droits. Je me bornerai à considérer les appareils que l'on peut former pour ce but avec des oculaires quadruples, en n'y employant que des lentilles convergentes, comme on le fait habituellement. Et, en me tenant même aussi rapproché que possible des combinaisons de ce genre que l'expérience a déjà fait reconnaître les meilleures que l'on sût former, je tâcherai seulement de faire sortir des formules les règles analytiques qui assurent la bonté de leurs effets, afin qu'on puisse les réaliser directement, sans essais inutiles pour chaque longueur donnée de distance focale du système objectif supposé achromatique, et pour chaque valeur assignée de grossissement angulaire total N'.

107. En conséquence, je vais d'abord spécifier, dans ce genre d'oculaire, les expressions les plus générales des quatre rapports $\frac{Q_i}{f_i}$ qui composent la valeur totale $N-1$, et je chercherai ensuite à fixer leurs signes, ainsi que ceux de leurs divers termes constitutifs, conformément aux principes que je viens d'exposer. Ces expressions exigent premièrement que l'on forme les quatre valeurs explicites des coefficients Q_i qui y correspondent. Celles-ci se déduisent des

relations successives rapportées page 158; et en attribuant à l'indice i la progression de valeurs qui convient à quatre lentilles, elles donnent

$$Q_1 = 0$$
$$Q_2 = h_1$$
$$Q_3 = h_1 + h_2 + \frac{h_1 h_2}{f_2}$$
$$h_2 Q_4 = \left(h_2 + h_3 + \frac{h_2 h_3}{f_3}\right) Q_2 - h_3 Q_2$$
$$h_3 Q_5 = \left(h_3 + h_4 + \frac{h_3 h_4}{f_4}\right) Q_4 - h_4 Q_3.$$

Il faut introduire dans ces équations les coefficients principaux des deux systèmes binaires qui composent l'oculaire total. Pour cela, je rappelle que, d'après ce qui a été expliqué pages 64 et 66, leurs expressions, en fonction des distances focales et des intervalles des lentilles, sont telles qu'il suit :

1er système :

$$n' = 1 + \frac{h_2}{f_3}, \quad p' = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{h_2}{f_2 f_3}, \quad q' = h_2, \quad r' = 1 + \frac{h_2}{f_2}.$$

2me système :

$$n'' = 1 + \frac{h_4}{f_5}, \quad p'' = \frac{1}{f_4} + \frac{1}{f_5} + \frac{h_4}{f_4 f_5}, \quad q'' = h_4, \quad r'' = 1 + \frac{h_4}{f_4}.$$

Déjà l'élimination est bien facile pour Q_3, car h_2 est q' ; et $1 + \frac{h_2}{f_2}$ est r'. On a donc :

$$Q_3 = q' + r' h_1.$$

Dans le mode de distribution que nous nous proposons d'établir, Q_3 doit être rendu négatif. Cela résulte des considérations exposées page 164, § 94. Or, des deux termes qui composent Q_3, le premier q' ou h_2 est essentiellement positif comme exprimant l'intervalle des deux lentilles qui composent le système binaire antérieur. Quant au second

terme $r'h_1$, son facteur h_1 est aussi positif par une raison pareille. Il faut donc que ce soit r' qui intervertisse son signe et rende négative la somme des deux termes qui composent Q_3. Ainsi le coefficient r' du premier système binaire devra toujours être fait négatif, et assez grand pour que le produit $r'h_1$ surpasse le terme positif q'.

Les deux coefficients suivants Q_4, Q_5, ne peuvent recevoir une transformation analogue qu'avec quelque artifice de calcul. Considérant d'abord Q_4, je commence par y introduire, comme tout à l'heure q', au lieu de h_2, et n' au lieu de $1+\frac{h_2}{f_3}$. On a ainsi :

$$q'Q_4 = (q' + n'h_3)Q_3 - h_3h_1 = q'Q_3 + (n'Q_3 - h_1)h_3,$$

ou, en mettant pour Q_3 sa valeur générale dans le dernier produit,

$$q'Q_4 = q'Q_3 + [n'q' + (n'r' - 1)h_1]h_3.$$

Mais on a toujours la relation :

$$n'r' - p'q' = 1;$$

conséquemment

$$n'r' - 1 = p'q'.$$

Remplaçant donc $n'r' - 1$ par cette expression en p', q' disparaît de l'équation comme facteur commun, et il reste

$$Q_4 = Q_3 + (n' + p'h_1)h_3.$$

Nous verrons tout à l'heure à en chasser l'intervalle intermédiaire h_3. Mais, pour le moment, je laisse Q_4 sous cette forme-là.

Passant à Q_5, je remarque d'abord que $1+\frac{h_4}{f_4}$ est le coefficient r'' du système binaire postérieur. J'ai donc :

$$h_3Q_5 = h_3r''Q_4 + h_4(Q_4 - Q_3) = h_3r''Q_4 + (n' + p'h_1)h_3h_4.$$

h_3 disparaît ainsi de l'équation comme facteur commun. En outre, h_4, qui exprime l'intervalle des deux lentilles du système binaire postérieur, est égal au coefficient q'' de ce système. On a donc

$$Q_5 = r''Q_4 + (n' + p'h_1)q''.$$

Je reprends maintenant Q_4, et y mettant pour Q_3 sa valeur trouvée d'abord, j'ai

$$Q_4 = q' + r'h_1 + (n' + p'h_1)h_3 = q' + n'h_3 + (r' + p'h_3)h_1.$$

Mais les équations fondamentales (2) en N'' et P'', page 69, donnent :

$$q' + n'h_3 = \frac{N'' - n'n''}{p''}, \qquad r' + p'h_3 = \frac{P'' - p'n''}{p''},$$

conséquemment

$$Q_4 = \frac{1}{p''}[N'' + P''h_1 - n''(n' + p'h_1)].$$

Puisque nous considérons le système objectif comme n'ayant lui-même qu'une épaisseur centrale négligeable, $N'' + P''h_1$ représente le grossissement angulaire total N que l'instrument produit. C'est la première relation que nous avons déduite de la continuité d'un tel système, dans la page 68. On a donc, en l'appliquant ici :

$$Q_4 = \frac{1}{p''}[N - n''(n' + p'h_1)].$$

Substituant cette expression dans Q_5 et réduisant tous les termes au commun dénominateur p'', il vient

$$Q_5 = \frac{1}{p''}[Nr'' - (n''r'' - p''q'')(n' + p'h_1)],$$

ou, comme on a généralement,

$$n''r'' - p''q'' = 1,$$

$$Q_5 = \frac{1}{p''}[Nr'' - (n' + p'h_1)].$$

108. Voilà nos quatre valeurs de Q_i réduites à leur expression la plus simple. Il ne reste plus qu'à les diviser respectivement par les distances focales correspondantes f_2, f_3, f_4, f_5. Or, en traduisant celles-ci en coefficients principaux des deux systèmes constituants binaires, on a

$$\frac{1}{f_2}=\frac{r'-1}{q'},\qquad \frac{1}{f_3}=\frac{n'-1}{q'},\qquad \frac{1}{f_4}=\frac{r''-1}{q''},\qquad \frac{1}{f_5}=\frac{n''-1}{q''}.$$

J'applique donc ces valeurs aux expressions de Q_i que nous venons d'obtenir; et y joignant celles-ci pour les rassembler en correspondance, j'obtiens le tableau suivant qui présente leur composition explicite dans un oculaire quadruple produisant le grossissement total N :

Rang ordinal des lentilles oculaires.		
1re	$Q_2=h_1$	$\frac{Q_2}{f_2}=(r'-1)\frac{h_1}{q'}$;
2e	$Q_3=q'+r'h_1$	$\frac{Q_3}{f_3}=(n'-1)\frac{(q'+r'h_1)}{q'}$;
3e	$Q_4=\frac{1}{p''}[N-n''(n'+p'h_1)]$	$\frac{Q_4}{f_4}=(r''-1)\frac{[N-n''(n'+p'h_1)]}{p''q''}$;
4e	$Q_5=\frac{1}{p''}[Nr''-(n'+p'h_1)]$	$\frac{Q_5}{f_5}=(n''-1)\frac{[Nr''-(n'+p'h_1)]}{p''q''}$.

On peut vérifier matériellement que les quatre quantités contenues dans la dernière colonne, reproduisent en somme N—1, comme cela doit être d'après leur relation générale établie page 159. En effet, si l'on ajoute d'abord ensemble les deux premières, elles donnent

$$\frac{Q_2}{f_2}+\frac{Q_3}{f_3}=n'-1+[(n'-1)r'+r'-1]\frac{h_1}{q'}=n'-1+\frac{(n'r'-1)h_1}{q'}.$$

Or, $n'r'-1$ est toujours égal à $p'q'$. Il vient donc en définitive

$$+\frac{Q_2}{f_2}+\frac{Q_3}{f_3}=-1+n'+p'h_1.$$

Maintenant ajoutons de même les deux dernières; elles donneront :

$$\frac{Q_4}{f_4}+\frac{Q_5}{f_5}=\frac{1}{p''q''}\left[\{r''-1+r''(n''-1)\}N-\{n''(r''-1)+n''-1\}(n'+p'h_1)\right],$$

ou, en réduisant les termes qui s'entre-détruisent,

$$\frac{Q_4}{f_4}+\frac{Q_5}{f_5}=\frac{(n''r''-1)}{p''q''}[N-(n'+p'h_1)].$$

Mais le premier facteur du second membre se trouve justement égal à + 1. Ainsi, en le remplaçant par cette valeur, il reste

$$\frac{Q_4}{f_4}+\frac{Q_5}{f_5}=N-(n'+p'h_1),$$

et cette somme, réunie à la première, donne évidemment

$$\frac{Q_2}{f_2}+\frac{Q_3}{f_3}+\frac{Q_4}{f_4}+\frac{Q_5}{f_5}=N-1,$$

comme on devait l'obtenir, d'après la relation établie page 159.

109. Pour montrer l'usage de ces formules par des résultats qui nous serviront en même temps de guides et d'exemples, je les appliquerai à la lunette de Padoue, et à la lunette n° 2 de Frauenhoffer, dont les éléments constitutifs ont été publiés par Precht. Les oculaires employés dans ces instruments ont été définis par leurs coefficients principaux, pour le premier, page 125, et pour le deuxième, page 120. Pour compléter les circonstances de leur application, il faut y ajouter la distance focale actuelle $-\Delta'$ des objectifs employés, plus la distance D de l'image objective à la première lentille oculaire A_1, d'où résulte $h_1=-\Delta'+D$; et enfin le grossissement actuel N que l'instrument produit. Ces données sont:

Pour la lunette de Padoue, page 125,

$\Delta'=-350^{l.}$, $\quad D=+5^{l},17238$, $\quad N=+26,68973$.

Les deux éléments linéaires sont exprimés en lignes de l'ancien pied de Paris.

Pour la lunette n° 2 de Frauenhoffer, page 120,

$$\Delta' = -54^{\text{pce}}, \qquad D = +0^{\text{pce}},715065, \qquad N = 60.$$

L'unité de longueur est l'ancien pouce de Paris.

Ces données étant introduites dans nos formules, avec les coefficients principaux des oculaires qui y correspondent, on en tire les résultats suivants :

Rang ordinal des lentilles oculaires.		Lunette de Ramsden (Padoue).		Lunette n° 2 de Frauenhoffer.	
1re	A_2	$Q_2 = +355^{\text{l.}},17238$	$\frac{Q_2}{f_2} = -17,758619$	$Q_2 = +54^{\text{pces}},715065$	$\frac{Q_2}{f_2} = -29,980899,$
2e	A_3	$Q_3 = -181,10343$	$\frac{Q_3}{f_3} = +\ 7,102094$	$Q_3 = -24,257775$	$\frac{Q_3}{f_3} = +10,853588,$
3e	A_4	$Q_4 = -572,19220$	$\frac{Q_4}{f_4} = +20,435440$	$Q_4 = -99,799344$	$\frac{Q_4}{f_4} = +39,136988,$
4e	A_5	$Q_5 = -243,4353$	$\frac{Q_5}{f_5} = +15,910800$	$Q_5 = -46,71858$	$\frac{Q_5}{f_5} = +38,990270.$

D'où résulte la reproduction de $N - 1$

$$\frac{Q_2}{f_2} + \frac{Q_3}{f_3} + \frac{Q_4}{f_4} + \frac{Q_5}{f_5} = +\ 25,689715, \qquad \frac{Q_2}{f_2} + \frac{Q_3}{f_3} + \frac{Q_4}{f_4} + \frac{Q_5}{f_5} = +\ 58,99995.$$

Pour chaque rayon à incidence centrale introduit sous l'angle primitif $+{}_cX$, les ordonnées d'incidence successives ${}_cz_i$ ont pour valeur $Q_i \sin {}_cX$; elles sont donc proportionnelles aux Q_i qui y correspondent. Ainsi, en prenant ${}_cX$ positif, la première Q_2 est positive, toutes les suivantes négatives, et la troisième Q_4 la plus grande de toutes en ce dernier sens, dans les oculaires considérés.

En examinant les proportions $\frac{Q_i}{f_i}$ pour lesquelles chaque lentille coopère au grossissement total N, on voit que la première agit négativement, les suivantes positivement, et la

deuxième moins dans ce sens que les deux dernières. Mais, dans l'oculaire de Frauenhoffer, l'action de ces deux-ci est sensiblement égale, au lieu que dans l'oculaire de Ramsden la troisième lentille produit à elle seule une beaucoup plus forte proportion de l'effet total. Nous verrons bientôt que c'est là un inconvénient qu'il convient d'éviter.

VII. APPLICATION GÉNÉRALE DES FORMULES PRÉCÉDENTES AUX SYSTÈMES D'OCULAIRES QUADRUPLES CONSIDÉRÉS COMME LES PLUS PARFAITS; ET RECHERCHE DES PARTICULARITÉS QUI DÉTERMINENT LEURS DÉFAUTS ET LEURS AVANTAGES.

110. Je vais d'abord chercher les conditions analytiques qui assurent aux diverses valeurs de Q_i les signes nécessaires pour qu'il ne s'opère dans tout l'instrument qu'une seule inversion, en n'admettant dans l'oculaire que des lentilles convergentes. Pour cela, comme pour atténuer les valeurs individuelles des $\frac{Q_i}{f_i}$, nous avons reconnu que Q_2 étant essentiellement positif, puisqu'il exprime un intervalle, il faut que les quantités suivantes Q_3, Q_4, Q_5 soient toutes trois négatives; et déjà nous avons remarqué que le coefficient r' doit être rendu assez fortement négatif pour que cette condition de signe puisse être remplie à l'égard de Q_3. Ceci étant supposé avoir lieu, tous les autres signes requis seront assurés si l'on fait en outre n', p', n'', p'' individuellement négatifs, et r'' à volonté positif ou négatif, mais très-petit; ce que nous avons vu aussi être convenable pour assurer à la quantité H son signe négatif, et sa juste proportion de longueur.

111. En effet, ces conventions étant admises, et Q_3 rendu négatif, considérons d'abord Q_4. Je dis qu'il sera aussi négatif,

pourvu seulement que l'instrument soit possible par continuité, c'est-à-dire, si h_3 peut y être positif; car, dans une première transformation effectuée page 185, nous avons trouvé :

$$Q_4 = Q_3 + (n' + p'h_1)h_3.$$

Les deux parties constituantes du second membre se trouveront donc alors négatives individuellement.

Quant à Q_5, son caractère négatif sera d'abord évident si r'' est positif. Car, dans l'expression de Q_5 que présente notre tableau de la page 187, le facteur $\frac{1}{p''}$ qui est négatif, est multiplié par une quantité dont les deux termes seront alors individuellement positifs. Le même résultat aura lieu encore lorsque r'' sera négatif, s'il est maintenu assez petit pour que le produit négatif Nr'' soit moindre que le terme positif $-(n' + p'h_1)$.

112. Les trois quantités Q_3, Q_4, Q_5 étant ainsi rendues négatives, et la première Q_2 étant toujours positive essentiellement, leurs signes s'intervertiront quand on les divisera respectivement par les distances focales correspondantes supposées négatives, comme on le voit dans la seconde colonne de notre tableau. La somme de ces quatre quotients, qui doit être $N-1$, se trouvera ainsi répartie entre eux selon l'arrangement des signes le plus favorable, pour qu'on puisse la former en leur donnant individuellement les moindres valeurs qu'ils puissent recevoir. Or, à la vérité, cette dernière condition de répartition n'est pas réalisée avec une égale habileté dans tous les oculaires quadruples exécutés par d'excellents artistes, parce qu'ils ne possédaient pas les expressions analytiques nécessaires pour l'établir directement. Mais la combinaison de signes dont elle dérive se retrouve

dans les éléments de tous leurs appareils, dont le succès a été reconnu. On peut constater ce fait sur les coefficients qui les constituent, et dont j'ai rapporté plus haut les valeurs.

113. Cette même combinaison de signes a encore plusieurs autres avantages que la discussion analytique nous avait fait prévoir, et que l'on retrouve dans ces appareils. Ainsi l'identité de signe de p' et de p'', jointe à la petitesse de r'', assure le signe négatif de H, ce qui rend toujours le point oculaire de l'instrument total postérieur à sa dernière surface, comme il faut qu'il le soit pour que l'œil puisse physiquement s'y placer. Ensuite, l'identité de signe établie entre n', p', et p'', assure le sens direct des images pour toutes les valeurs positives de D, c'est-à-dire, lorsque la première lentille oculaire est rendue postérieure au foyer de l'objectif; et elle maintient encore ce même sens, pour une certaine amplitude de valeurs négatives, comme nous l'avons remarqué page 76, § 38, et page 79, § 39. Or, c'est aussi pour ce cas spécial de D positif que sont préparés tous les oculaires dont je viens de rappeler les bons effets; et, si l'amplitude de course que l'artiste leur a donnée permet quelquefois de les amener dans des phases de D négatives, ce n'est jamais que comme accessoire et pour des valeurs très-restreintes de cette quantité.

114. J'admettrai donc ce sens positif de D dans la préparation de nos formules, puisqu'il est conforme au choix de signes que nous avons fait, et je vais en suivre les conséquences sur la figure 6, où je les réaliserai successivement à mesure qu'elles se développeront. Cette figure représente une section diamétrale de l'instrument total, ayant pour axe A_1X. Les coupes des quatre lentilles oculaires supposées infiniment minces y sont désignées par quatre perpendicu-

laires indéfinies espacées entre elles comme dans l'oculaire n° 2 de Frauenhoffer aux points A_2, A_3, A_4, A_5 de l'axe. La coupe du système objectif y est indiquée en A_1 de la même manière; mais on a été obligé de le rapprocher beaucoup plus de l'oculaire que la réalité ne le comporte pour pouvoir le comprendre dans le tracé, et il faut l'en concevoir bien plus distant. Il faut aussi se représenter les quatre lentilles de l'oculaire comme planes convexes, les faces planes des deux antérieures étant tournées vers l'objectif, celles des postérieures vers l'œil. Les lignes brisées pleines $A_1 I_2 I_3 I_4 I_5 H$, figurent la marche de deux rayons homogènes à incidence centrale, qui, ayant traversé l'objectif à son centre de figure A_1, en formant avec l'axe du système des angles de sens opposés, vont finalement concourir au point oculaire H qui convient à leur réfrangibilité propre. La flèche $S_1 \Sigma_1$ est l'image d'un objet extérieur, qui s'est d'abord produite renversée au foyer actuel de l'objectif, et qui, se trouvant antérieure à l'oculaire, se forme réellement. $S_4 \Sigma_4$ est une autre image pareillement réelle, mais redressée, qui en dérive, et qui se forme entre les deux dernières lentilles oculaires. Toutes les autres lignes, seulement ponctuées, représentent des images virtuelles ou des droites fictives qui, parties de chaque foyer réel ou virtuel, se dirigent au foyer suivant, en passant par le centre de figure de la lentille qui le produit. Cette coïncidence de direction n'a lieu, à la rigueur, que pour des inclinaisons infiniment petites et pour des lentilles infiniment minces, comme le supposent nos formules restreintes.

115. La distance $A_2 D$, comprise entre l'image objective $S_1 \Sigma_1$ et la première lentille oculaire, représente le D de nos

formules. Nous avons déjà reconnu qu'il faut le maintenir fort petit pour que les pinceaux réfractés, partis de chaque point de cette image, se trouvent encore très-déliés quand ils rencontrent la lentille A_2. Or, les axes géométriques de ces pinceaux, les plus écartés de l'axe central, limitent l'amplitude angulaire du champ apparent; et conséquemment la lentille A_2 doit être faite assez large pour les recevoir dans toute l'amplitude d'écart que comporte l'instrument que l'on veut construire. Mais le diamètre d'ouverture résultant de cette condition nécessite toujours une distance focale f_2 plus grande que la valeur qu'il convient de donner à $+D$ dans les mêmes circonstances. D'après cela, quand les pinceaux partis du foyer de l'objectif ont traversé la première lentille oculaire A_2, ainsi placée, leur second plan focal Δ_2 devient virtuellement antérieur à cette lentille; et c'est de ce second foyer virtuel qu'il faut les supposer émanés pour aller rencontrer la seconde A_3, placée au delà de A_2 à la distance h_2 ou q'. Or, le même motif qui fait restreindre $+D$ à une petite valeur, exige que le second plan focal Δ_2, antérieur à A_2, ne s'éloigne pas, dans ce sens, à une très-grande distance, pour ne pas trop épanouir les pinceaux incidents sur A_3. Cette restriction nécessaire s'obtient et s'assure, en renfermant dans de certaines limites le rapport de $+D$ à f_2. En effet, D devant être positif, et f_2 négatif dans notre construction, désignons ce rapport par $-m$; c'est-à-dire faisons, en général,

$$D = -mf_2;$$

m étant au nombre positif, si nous nommons Δ_2 la distance focale résultante de cette valeur de D, après l'action de A_2, la formule connue, rapportée page 28, § 7, donnera :

$$\Delta_2 = \frac{f_2 D}{f_2 + D},$$

conséquemment

$$\Delta_2 = -\frac{mf_2}{1 - m}.$$

Dans l'application que nous avons en vue, m doit être une fraction moindre que 1. Si nous faisions $m = o$, Δ_2 serait nul, ainsi que D. De sorte que le second, comme le premier foyer, se trouveraient réunis sur la lentille A_2 même; résultat évident d'avance, mais qu'il faut soigneusement éviter par les motifs expliqués page 113, § 60. Si, au contraire, la fraction m était de peu inférieure à $+1$, Δ_2 acquerrait une valeur positive très-grande; c'est-à-dire que le second foyer virtuel se formerait très-loin en avant de A_2, et se rejetterait jusqu'à une distance infinie si m était tout à fait égal à 1; circonstances auxquelles nous nous proposons précisément de mettre obstacle. On voit donc que, pour notre but, il convient d'écarter m de ces deux extrêmes, c'est-à-dire, de lui donner des valeurs à peu près intermédiaires entre eux. Si nous le prenons, par exemple, égal à $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, il en résultera

pour $m = \frac{1}{2}$, $\Delta_2 = -f_2$; pour $m = \frac{1}{4}$, $\Delta_2 = -\frac{1}{3}f_2$.

Tous les oculaires de Frauenhoffer, de Dollond, de Ramsden, que j'ai pu analyser, m'ont donné m entre ces deux limites, et généralement un peu plus rapproché de la première 0,5 que de la seconde 0,25. Pour ceux de Frauenhoffer, les valeurs habituellement employées oscillent entre d'étroites limites autour de la moyenne $m = \frac{20}{51} = 0{,}39215$; d'où résulte $\Delta_2 = -\frac{20}{31}f_2$.

116. Ce caractère positif et fractionnaire de m étant admis,

suivons la marche des rayons qui partent virtuellement de la seconde image $S_2\Sigma_2$, et cherchons le foyer réel ou virtuel auquel ils iront de nouveau concourir, après avoir traversé la deuxième lentille oculaire Δ_3. Ce troisième foyer sera celui que produit le système binaire antérieur appliqué à l'image objective $S_1\Sigma_1$, placée en avant de la première lentille à la distance $+$ D. Ainsi, en nommant $+\Delta_3$ sa distance à la seconde lentille de ce système, considérée analytiquement comme lui étant postérieure, la formule générale des distances focales de la page 28, § 7, donnera, pour ce cas :

$$\Delta_3 = \frac{q' + r'D}{n' + p'D}.$$

D'après les conventions que nous avons faites, les coefficients n', p' sont négatifs, et D est positif. La fonction $n' + p'D$ se trouve donc négative. Conséquemment, d'après la règle établie page 28, § 8, le système binaire antérieur, ainsi disposé et appliqué, renversera l'image objective; et comme elle était déjà renversée comparativement aux objets réels, il la redressera. C'est aussi un des effets que nous nous proposons de produire.

Il faut maintenant savoir si cette troisième image sera réelle et postérieure à la seconde lentille, ou virtuelle et antérieure. Cela dépendra du signe de Δ_3. Nous connaissons déjà celui du dénominateur $n' + p'D$ qui est négatif; je cherche donc le signe du numérateur. Pour cela je remarque que, dans le système binaire considéré, la distance focale f_1 de la première lentille a pour expression explicite $\frac{q'}{r' - 1}$. Cela résulte des relations généralement établies page 64, pour un tel système, entre ses quatre coefficients principaux et les distances focales principales des deux lentilles qui le composent. Donc, puisque nous avons fait D égal à $-mf_2$, on aura

$$D = -\frac{mq'}{r'-1},$$

et par suite

$$q' + r'D = q'\left(1 - \frac{mr'}{r'-1}\right).$$

Étant convenus de faire le coefficient r' négatif, $\frac{r'}{r'-1}$ sera une fraction positive moindre que l'unité. Or, dans la préparation de l'instrument à son usage spécial, nous prenons aussi pour m une pareille fraction; et si nous varions occasionnellement ses effets dans une certaine amplitude de course, les valeurs positives que nous laisserons prendre à m resteront toujours fort inférieures à l'unité. Le produit $-\frac{mr'}{r'-1}$, tant qu'il restera négatif, sera donc toujours fractionnaire et ne pourra pas compenser le terme positif $+1$ dans le facteur auquel il est associé. Quant à q', il est essentiellement positif comme exprimant l'intervalle des deux lentilles du système binaire que nous considérons. Donc, avec les relations de quantité et de signes que nous admettons, $q' + r'D$ sera toujours positif, et $n' + p'D$ négatif, ce qui rendra Δ_3 négatif. Ainsi, dans ces circonstances, l'image redressée produite par le système antérieur, sera réelle; et elle se formera à la distance $-\Delta_3$ *au delà* de la seconde lentille, si les rayons ne sont arrêtés dans leur trajet avant ce point réel de réunion. Elle se trouve construite ainsi dans la figure en $S_3\Sigma_3$.

117. Il est fort essentiel que cette distance Δ_3 n'acquière pas une grandeur absolue très-considérable; et il convient même qu'elle n'excède pas beaucoup l'intervalle intermédiaire h_3, que l'on peut raisonnablement admettre entre les deux systèmes binaires de l'oculaire, pour ne pas trop l'allonger.

Car cette dernière circonstance est nécessaire pour que les pinceaux réfractés par le premier système, rencontrent la première lentille du second dans un état de minceur qui assure des incidences presque égales aux rayons élémentaires dont chacun d'eux se compose. Afin de mettre en évidence les conditions de ce résultat, je remplace $+D$ par sa valeur $-\frac{mq'}{r'-1}$ dans le dénominateur de Δ_3; et en profitant de la relation constante $n'r'-p'q'=1$, je lui donne la forme suivante

$$n'+p'D=n'-m\frac{p'q'}{r'-1}=n'\left(1-\frac{mr'}{r'-1}\right)+\frac{m}{r'-1};$$

je l'associe alors avec le numérateur, transformé comme tout à l'heure, et il vient :

$$\Delta_3=\frac{q'\left(1-\frac{mr'}{r'-1}\right)}{n'\left(1-\frac{mr'}{r'-1}\right)+\frac{m}{r'-1}}=\frac{q'}{n'+\frac{m}{(r'-1)\left(1-\frac{mr'}{r'-1}\right)}}.$$

En faisant n' et r' négatifs comme nous en sommes convenus, et prenant m positif entre les limites de petitesse que nous avons fixées, les deux termes du dénominateur du second membre seront individuellement négatifs; et leur somme ne pouvant alors jamais devenir nulle, Δ_3 ne deviendra jamais infini. Il en sera ainsi encore pour de très-petites valeurs négatives de m, que nous voudrions occasionnellement admettre dans le jeu de l'appareil, ce qui rendrait la première lentille de l'oculaire antérieure au foyer de l'objectif. Mais l'opposition de signe que ces positions introduisent entre les deux termes du dénominateur que nous considérons, tendant à faire croître rapidement la valeur de Δ_3, on voit qu'il faudra ne les admettre qu'avec une grande réserve, et

les maintenir toujours très-restreintes. Généralement, avec les mêmes valeurs données de r' et de m, la petitesse de n' allongera Δ_3, pour chaque intervalle q' qu'on établira. Dans les oculaires de Frauenhoffer, dont les éléments ont été publiés, la valeur de n' se trouve généralement peu différente de $-0,2$. Il l'a réduite une seule fois à $-0,08$, dans l'oculaire indiqué sous le n° 1, et l'effet de cette construction n'a pas paru satisfaisant à ceux qui l'ont réalisée, comme aussi à lui-même, sans doute, puisqu'il ne l'a pas reproduite. Dans la lunette de Padoue, faite par Ramsden, n' est $-0,2549$; et dans l'oculaire polyalde de Dollond, que j'ai déjà cité, la valeur de cet élément s'élève jusqu'à $-0,282$. C'est là évidemment la circonstance qui permet une si remarquable étendue de course à cet appareil. Je montrerai plus loin pourquoi les valeurs négatives de n' doivent être limitées à cet ordre de fractions.

118. En ce moment je me bornerai à expliquer comment la petitesse du coefficient n' a une si grande influence pour allonger Δ_3. Cela se voit par son expression explicite en f_3, qui, d'après la page 64, est

$$n' = 1 + \frac{h_2}{f_3}.$$

Lorsque n' est très-petit, h_2 diffère très-peu de $-f_3$, et lui devient tout à fait égal si n' est nul. Prenons d'abord ce cas, et supposons en outre D ou m nuls, ce qui mettra l'image objective dans le plan même de la lentille A_2. Alors h_2 étant égal à $-f_3$, cette image se trouvera ainsi amenée dans le plan focal principal réciproque de la lentille A_3, qui est censée infiniment mince. Elle sera donc transformée par cette lentille en une autre image renversée, infiniment distante au

delà de A_3, comme notre expression générale de Δ_3 l'indique pour ce cas. Maintenant, n' restant toujours nul, rendons D quelque peu antérieur à A_2, ce qui fera m positif et fort petit. Alors Δ_3 ne sera plus tout à fait infini; mais il restera encore négatif et très-grand, comme le dit aussi la formule. Il convient donc de ne pas donner à n' de trop faibles valeurs, pour éviter cet allongement exagéré.

119. D'après la manière dont ce coefficient est composé, la valeur négative que nous lui assignons a pour effet de rendre l'intervalle h_2 plus grand que $-f_3$. Ce choix de signe permet donc déjà de faire pénétrer quelque peu l'image objective dans l'intervalle h_2, si on le juge convenable, sans que pour cela elle arrive au foyer réciproque de A_3, ce qui donnerait à Δ_3 une valeur négative infinie. Mais la possibilité de cet inconvénient est encore retardée par l'interposition de la lentille A_2. Car, celle-ci étant convergente, lorsque D est positif et moindre que sa distance focale principale réciproque $-f_2$, comme nous l'avons supposé, elle éloigne virtuellement l'image objective de la lentille A_3; et lorsque D devient négatif, elle opère encore un effet pareil, en la rapprochant de son propre centre de figure. De sorte que, dans ces deux cas, son interposition agit pour accroître l'amplitude de course dans laquelle l'instrument peut être appliqué, sans que les effets qu'on en attend soient intervertis.

120. Avant de quitter le premier système binaire, je ferai remarquer que le renversement qu'il opère dans l'image objective, ne suffit pas pour assurer à la quantité Q_3 ou $q' + r'h_1$ le signe négatif que nous avons reconnu nécessaire pour que les ordonnées ${}_rz_3$ soient de sens contraire au ${}_rz_2$ dont elles

dérivent. Ce dernier résultat ne dépend pas seulement du signe de r', mais de sa grandeur. Quand il a lieu, tous les rayons homogènes à incidence centrale, après avoir traversé la première lentille oculaire A_2, viennent physiquement couper l'axe central en un même point, *avant* de rencontrer la suivante A_3. Pour en avoir la preuve, il n'y a qu'à considérer l'objectif, et la lentille A_2, comme un système à part, dont on cherche le point oculaire propre. Ce sera évidemment le lieu de concours de ces rayons. Or, dans notre notation, la distance analytique de ce point au-devant de la deuxième lentille du système, sera $+H_2$; et l'on aura

$$H_2 = \frac{Q_2}{N_2}, \qquad Q_2 = h_1, \qquad N_2 = 1 + \frac{h_1}{f_2}.$$

f_2 peut être remplacé par son expression explicite $\frac{q'}{r'-1}$; il vient alors

$$N_2 = 1 + h_1 \frac{(r_1 - 1)}{q'}, \qquad \text{et} \qquad H_2 = -q' \frac{h_1}{h_1 - (q' + r'h_1)}.$$

Soit maintenant $q' + r'h_1$ négatif. Le facteur qui multiplie $-q'$ dans l'expression de H_2, deviendra une fraction positive moindre que l'unité. Or q' est essentiellement positif; donc H_2 sera négatif et moindre que q'; c'est-à-dire que tous les rayons à incidence centrale, après avoir traversé la première lentille oculaire, iront physiquement couper l'axe central en un point commun H_2, qui sera antérieur à la lentille suivante, comme je l'ai représenté dans la figure qui nous sert de type.

121. Chacun de ces rayons en coupant l'axe est accompagné des mêmes rayons excentriques qui l'entouraient dans son incidence, et qui faisaient partie du même pinceau homogène. Ceux-ci, en traversant le plan oculaire situé à la distance H_2

au delà de la lentille A_2, sont tous compris dans *l'anneau oculaire idéal* qui y correspond, lequel a pour demi-diamètre $\pm \frac{A_1}{N_2}$, $\pm A_1$ étant le demi-diamètre d'ouverture efficace de l'objectif, et N_2 la valeur du coefficient N pour le système A_1A_2. C'est là une des propriétés attachées aux *points* oculaires d'un système optique quelconque, comme je l'ai prouvé page 434 du tome 1[er] de mon Astronomie. On profite de cette circonstance pour fixer intérieurement, dans cette section du tuyau oculaire, un diaphragme métallique noirci, percé autour de son centre d'une ouverture égale à celle de l'anneau oculaire idéal que les rayons régulièrement réfractés ne peuvent excéder. On a ainsi le double avantage de laisser le passage libre à tous ces rayons, et d'intercepter complétement toute lumière irrégulièrement introduite qui pourrait se mêler avec eux. Comme cette opération ne s'effectue qu'après que tous les éléments de l'oculaire sont déterminés, on peut laisser la distance focale f_2 en évidence dans les expressions de H_2 et de N_2; on aura ainsi :

Distance du diaphragme à la première lentille oculaire

$$H_2 = \frac{h_1 f_2}{h_1 + f_2},$$

demi-diamètre de son ouverture centrale, A_1 étant celui de l'objectif,

$$\pm \frac{A_1 f_2}{h_1 + f_2}.$$

On voit, par la discussion précédente, que le lieu de ce diaphragme, ses dimensions et son usage, n'ont aucun rapport avec l'amplitude du champ apparent, comme quelques auteurs d'ouvrages d'optique ont paru le croire. La prudence prescrit de le faire toujours un peu plus ouvert que le calcul ne l'indique, de peur qu'il ne se trouve pas inséré

rigoureusement à sa vraie place, coïncidente avec le plus petit diamètre du conoïde de lumière réfractée en H_2. Car, en quelque sens qu'on l'en éloigne, s'il n'avait exactement que ce minimum d'ouverture, il arrêterait un anneau des rayons venus par les bords de l'objectif, jusqu'à une certaine distance de son contour. Par un motif semblable, si l'instrument auquel l'oculaire est appliqué doit être employé comme polyalde, conséquemment avec des valeurs diverses de h_1, il faudra calculer l'ouverture du diaphragme avec la plus petite valeur de h_1, qui est celle pour laquelle ce diamètre est le plus grand, f_2 étant donné. On doit toujours se rappeler que les dispositions précédentes supposent $q' + r'h_1$ négatif, et nous déterminerons plus loin les limites entre lesquelles il convient de le rendre tel.

122. Dans les applications, la distance focale f_2 est toujours une très-petite fraction de l'intervalle h_1. Alors, en considérant H_2 sous la dernière forme que nous lui avons ici donnée, on voit que sa valeur se trouve très-peu différente de f_2. Ce résultat se conçoit à la seule inspection de la figure 6. Le point H_2, dont nous venons ici de calculer la position, est le foyer de tous les rayons homogènes à incidence centrale qui partent de A_1, c'est-à-dire, du centre de figure de l'objectif. Si ce centre est très-distant de A_2, comparativement à f_2, les rayons qui en émanent sont réfractés par la lentille A_2, presque exactement au même foyer que s'ils étaient partis d'un point de l'axe infiniment distant ; c'est-à-dire à une très-petite distance de son foyer principal.

123. Ceci terminé, je continue de suivre la marche des rayons réfractés, jusqu'à leur arrivée au second système binaire, où les conduit la distance focale Δ_3 qu'ils ont acquise

en sortant du premier. Il est très-essentiel que cette distance ne jette pas leur plan focal fort loin du premier verre du second système, afin que les pinceaux réfractés ne se trouvent pas très-épanouis en le rencontrant. Or, l'intervalle des deux systèmes étant h_3, la distance Δ_4 de ce plan focal à la lentille A_4, a pour expression analytique $\Delta_3 + h_3$, en considérant $+\Delta_3$ comme antérieur à la lentille A_3, ainsi que le veut notre notation. Je forme donc cette somme en mettant pour Δ_3 sa valeur explicite trouvée plus haut, page 196; et j'ai

$$\Delta_3 + h_3 = \frac{q' + r'D}{n' + p'D} + h_3 = \frac{q' + n'h_3 + D(r' + p'h_3)}{n' + p'D}.$$

Or, si l'on se reporte aux équations générales entre les coefficients N″ et P″ de l'oculaire, que nous avons nommées (2), dans la page 69, et qu'on y écrive h_3 au lieu de h, elles donnent :

$$q' + n'h_3 = \frac{1}{p''}(N'' - n'n''), \qquad r' + p'h_3 = \frac{1}{p''}(P'' - p'n'').$$

En les employant, il vient

$$\Delta_3 + h_3 = \frac{1}{p''}\left[\frac{N'' - DP'' - n''(n' + p'D)}{n' + p'D}\right].$$

Mais, dans l'application à un observateur infiniment presbyte, ce qui est le cas spécial pour lequel nous préparons notre instrument, on a, d'après les § 34, p. 68, et § 36, p. 72,

$$P'' = -\frac{N}{\Delta'}, \qquad \text{et} \qquad D = N''\frac{\Delta'}{N},$$

conséquemment

$$N'' - DP'' = 0.$$

Ces deux termes étant annulés, $n' + p'D$ disparaît du second membre comme facteur commun, et il reste

$$\Delta_3 + h_3 = -\frac{n''}{p''}.$$

124. Ce résultat si simple était facile à prévoir. En effet, d'après les généralités exposées à la fin de la première section, p. 42, § 18, $-\frac{n''}{p''}$ exprime la distance focale principale réciproque du système binaire postérieur. Représentons-la généralement par $+ F''_r$ en la considérant comme positive lorsqu'elle lui est antérieure, conformément aux règles constantes de notre notation. L'équation précédente donnera

$$h_3 = -\Delta_3 + F''_r.$$

Alors elle devient bien facile à interpréter. En effet $-\Delta_3$ est ici la distance de la lentille A_3 au foyer actuel du premier système binaire, foyer que nous lui avons rendu postérieur en faisant Δ_3 négatif. Supposons d'abord F''_r positif, ce qui rendra le foyer réciproque du second système antérieur aux deux lentilles qui le composent. L'équation signifiera que l'intervalle h_3 doit être fait égal à la somme des deux distances positives $-\Delta_3$ et F''_r, pour que les pinceaux réfractés sortent du second système oculaire sous forme de faisceaux. Or cela est en effet évident, puisque, pour une telle disposition d'antériorité de F''_r, cette condition de somme met le plan focal qui termime Δ_3 en coïncidence avec le plan focal principal réciproque du système qui suit. Ce système se trouvant ainsi tout entier postérieur à l'image projetée par A_3, elle se formerait réellement. Au contraire, supposons F''_r négatif, ce qui rendra le foyer réciproque du second système postérieur à sa première lentille constituante A_4. Alors l'équation exprime qu'il faudra rapprocher cette lentille de A_3 d'une quantité égale à $\frac{n''}{p''}$ ou F''_r, pour opérer la même coïncidence des deux plans focaux, non plus par somme, mais

par différence, ce qui conduira encore à la condition d'émergence demandée. Mais, dans ce cas, l'image projetée par A_3 ne se formera pas physiquement, parce que les rayons qui devraient la constituer seront arrêtés et réfractés par le second système avant leur réunion. C'est précisément ce qui arrive dans tous les genres d'oculaires que nous considérons, puisque $-\frac{n''}{p''}$ ou F''_r y est une quantité négative, en vertu de l'identité de signe négatif que nous sommes convenus de donner à n'' et à p'' ; aussi la figure qui nous sert de type est-elle construite dans cette disposition. Il faudra donc, dans ces appareils, prendre ces deux coefficients tels que le rapport $-\frac{n''}{p''}$ exprime une longueur peu considérable relativement à Δ_3, ou à sa partie principale $\frac{q'}{n'}$, afin qu'en rapprochant le second système du premier pour mettre leurs foyers, actuel et réciproque, en coïncidence, la lentille A_4 reste toujours postérieure à la lentille A_3 et peu antérieure à $-\Delta_3$. C'est proprement là une condition de possibilité physique pour que les deux systèmes puissent être ainsi associés. Dans la lunette de Padoue construite par Ramsden, $\frac{n''}{p''}$ est $1{,}09\,q''$; de sorte qu'en la concevant ajustée pour un observateur infiniment presbyte, le foyer actuel Δ_3 du premier système binaire est virtuellement porté vers l'œil plus loin que toute l'épaisseur du second. Cette disposition résulte évidemment de la grandeur inusitée que l'on trouve au coefficient n'' dans cet oculaire. On peut craindre qu'elle n'épanouisse trop les pinceaux réfractés au moment de leur incidence sur la lentille A_4. Aussi n'a-t-elle été imitée ni par les Dollond ni par

Frauenhoffer. Dans les oculaires construits par ces derniers artistes, $\frac{n''}{p''}$ est toujours une fraction de q'' inférieure à l'unité; de sorte que le foyer actuel du premier système binaire tombe entre les deux lentilles du second, ce qui le rapproche avantageusement de la lentille A_4. L'oculaire polyalde de Dollond est celui où ce rapprochement est le plus considérable; $\frac{n''}{p''}$ n'y est que 0,385 q''. Dans les oculaires de Frauenhoffer, ce rapport varie depuis 0,6 q'' jusqu'à 0,487 q'', du moins pour quatre fois sur huit, où je l'ai calculé. Aussi le retrouve-t-on entre ces limites dans son n° 2, dont j'ai reproduit les éléments dans la figure qui nous sert d'exemple.

125. C'est évidemment une disposition avantageuse que de retenir ainsi entre les deux lentilles du second système, l'image virtuelle projetée par A_3, et il convient d'assurer théoriquement ce résultat de l'expérience pratique. Or, cela est très-facile quand on a soin, comme nous le faisons, de donner au coefficient numérique r'' une très-petite valeur. En effet, désignons par m'' une fraction positive de l'unité, que nous laisserons d'ailleurs indéterminée, et faisons généralement

$$\frac{n''}{p''} = m''q'',$$

il en résultera

$$n'' = m''p''q''.$$

Or, on a toujours

$$n''r'' - p''q'' = 1.$$

Prenant donc $p''q''$ dans cette équation pour le substituer dans la précédente, on en tirera

$$n'' = -\frac{m''}{1 - m''r''}.$$

Si r'' est une petite fraction, soit positive, soit négative,

la valeur de m'' pourra se développer dans cette série rapidement convergente.

$$n'' = -m'' - m''^2 r'' - m''^3 r''^2 \ldots \text{etc.}$$

Ainsi, pour que l'image virtuelle projetée par A_3 vienne se placer entre les deux lentilles du second système à telle proportion que l'on voudra de leur intervalle, il suffit de donner au coefficient numérique n'' une valeur peu différente de cette proportion, et de prendre en même temps r'' fort petit. Ces deux conditions se trouvent remplies dans les oculaires de Dollond et de Frauenhoffer que je viens de citer. Pour ces derniers, n'' diffère peu de $-0,5$. Ainsi, l'image virtuellement projetée par A_3, vient toujours s'y placer à peu près au milieu de l'intervalle des lentilles du second système. Elle est un peu plus voisine de A_4 dans l'oculaire de Dollond, parce que n'' y est seulement égal à $-0,4$. Ceci nous définit donc en général le signe et l'ordre de valeur qu'il conviendra toujours d'attribuer à ce coefficient, soit qu'on le détermine directement, soit qu'on le déduise de quelque condition de convenance à laquelle il doive être assujetti.

126. Nous pouvons tout de suite en conclure la valeur approchée que cette disposition donnera à la fonction $\frac{\varpi''}{p''}$ ou $\frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''}$, dont nous avons reconnu l'influence sur les dispersions chromatiques de II, page 93, et qui va bientôt nous redevenir nécessaire dans les applications. Pour cela, il faut se rappeler qu'en la désignant par ψ'', comme nous l'avons fait alors, on peut lui donner cette forme qui nous a servi page 115 :

$$\psi'' = -1 + \frac{n''(1-r'')+r''(1-n'')}{1-n''r''}.$$

Alors, en y mettant pour n'' sa valeur exacte $-\frac{m''}{1-m''r''}$ elle devient :

$$\psi''=-1-m''+(2m''+1)r''-m''r''^2=+(r''-1)-m''(r''-1)^2.$$

On voit donc que r'' étant très-petit, ψ'' différera peu de $-(1+m'')$. Mais cette valeur, toujours négative, sera quelque peu affaiblie si r'' est positif. C'est ce que l'on remarque dans les oculaires de Dollond et de Frauenhoffer que j'ai cités. Pour ces deux derniers, par exemple, où m'' diffère peu de 0,5, ψ'' se trouve réduit à peu près à $-1,2$. Dans l'oculaire de Ramsden, au contraire, r'' étant négatif, le terme qui en dépend dans le second membre augmente la valeur négative de ψ''. Et comme, en outre, m'' y surpasse $+1$, ψ'' y devient égal à $-2,38$. Mais on peut croire que ce système de valeurs n'est pas à préférer, parce qu'il résulte du grand éloignement du foyer de A_3 au delà de la lentille A_4.

127. Ce foyer étant d'ailleurs postérieur à A_4 dans tous les systèmes que nous considérons, la lentille A_4 qui est convergente ne peut pas renverser de nouveau l'image virtuelle qui devrait s'y produire. En effet, soient $N^{\text{IV}}, P^{\text{IV}}, Q^{\text{IV}}, R^{\text{IV}}$ les quatre coefficients propres de cette lentille, et Δ^{IV} la distance d'une image placée analytiquement au-devant d'elle. Pour que cette image se renverse, il faut, d'après le § 8, page 28, que $N^{\text{IV}}+P^{\text{IV}}\Delta^{\text{IV}}$ soit négatif. Or, la lentille étant supposée ici infiniment mince, on a

$$N^{\text{IV}}=+1, \qquad P^{\text{IV}}=\frac{1}{f_4}, \qquad Q^{\text{IV}}=0, \qquad R^{\text{IV}}=+1.$$

De plus, nous venons de trouver

$$\Delta^{\text{IV}}=-\frac{n''}{p''},$$

il en résultera donc

$$N^{\text{IV}} + P^{\text{IV}}\Delta^{\text{IV}} = 1 - \frac{n''}{p''f_4}.$$

D'après nos conventions, n'' et p'' sont tous deux négatifs. f_4 est aussi négatif selon notre notation, puisque la lentille A_4 est convergente. La fonction caractéristique du sens de l'image est donc positive, et ainsi il ne s'opérera pas de renversement.

127. Quel est alors l'effet propre de cette lentille et son utilité? Pour le voir, il faut chercher la distance focale Δ_4 où elle amène l'image virtuelle sur laquelle elle agit. Or, la formule de la page 28, § 7, donne généralement

$$\Delta_4 = \frac{Q^{\text{IV}} + R^{\text{IV}}\Delta^{\text{IV}}}{N^{\text{IV}} + P^{\text{IV}}\Delta^{\text{IV}}},$$

ce qui, dans le cas actuel, devient

$$\Delta_4 = \frac{-\frac{n''}{p''}}{1 - \frac{n''}{p''f_4}}.$$

Nous venons de voir que le dénominateur de cette expression est positif, et plus grand que l'unité. Le numérateur, qui est négatif, représente la distance Δ^{IV} même. Δ_4 sera donc moindre que Δ^{IV} et de même signe, c'est-à-dire postérieure à A_4. L'image réelle $S_4\Sigma_4$ produite dans ces circonstances se formera ainsi au delà de la lentille A_4, mais plus près que l'image virtuelle $S_3\Sigma_3$ dont elle dérive. Elle sera conséquemment plus petite qu'elle; car N^{IV} étant 1, l'image et l'objet sous-tendent le même angle $2\,{}_cX_4$ au centre de figure de la lentille A_4. Cette concentration de l'image virtuelle $S_3\Sigma_3$ rend admissibles, dans la lentille A_5, des pinceaux qui l'auraient rencontrée trop loin de son centre de figure, ou même qu'elle n'aurait

pas pu physiquement recevoir faute d'une ouverture suffisante, si l'on n'avait pas ainsi ramené vers l'axe central les rayons qui les composaient. C'est en cela que consiste l'utilité la plus apparente de la lentille intermédiaire A_4, et aussi les opticiens l'appellent-ils *le verre de champ*.

128. Je dis maintenant que cette même image projetée par A_3 ne sera pas non plus renversée par l'action totale du second système binaire, non-seulement dans l'application à un observateur infiniment presbyte, mais encore lorsque l'instrument sera adapté à une vue ordinaire. Pour prouver ceci, désignons toujours par $+\Delta^{\text{iv}}$ la distance analytiquement positive de l'image au-devant de la lentille A_4, quand l'instrument sera ainsi ajusté; et soit $+\Delta_f$ la distance où devra se former l'image finale lorsque l'observateur la regardera du point oculaire extérieur où son œil se place. D'après ce qui a été démontré page 28, § 7, on aura généralement

$$\Delta_f = \frac{q'' + r''\Delta^{\text{iv}}}{n'' + p''\Delta^{\text{iv}}}.$$

L'instrument a été préparé pour un observateur infiniment presbyte; il est donc rendu possible dans tous ses intervalles pour un tel cas. Soit $(\Delta)^{\text{iv}}$ la valeur spéciale de Δ^{iv} pour cette circonstance. Δ_f étant alors infinie, elle devra rendre nul le dénominateur du second membre, c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$(\Delta^{\text{iv}}) = -\frac{n''}{p''}.$$

C'est ce que nous avons déjà remarqué, et cela même est une des conditions que nous avons introduites dans la préparation de l'instrument. Maintenant, pour l'appliquer à un observateur doué d'une vue ordinaire, il faudra que Δ_f puisse être rendu positif, et non plus infini, mais toutefois encore

fort considérable relativement aux dimensions de q'' et de H. Pour cela Δ^{iv} devra prendre une valeur différente de la précédente, et devenir par exemple $(\Delta)^{\text{iv}}+x$, x étant une quantité dont nous supposerons la valeur et le signe indéterminés. Remplaçant donc Δ^{iv} par cette expression, et remarquant que $h''+p''(\Delta)^{\text{iv}}$ est nul au dénominateur, on a

$$\Delta_f = \frac{r''}{p''} + \frac{q''+r''(\Delta)^{\text{iv}}}{p''x}.$$

Mais on peut chasser tout à fait $(\Delta)^{\text{iv}}$ au moyen de sa valeur $-\frac{n''}{p''}$. Alors, en profitant de la relation $n''r''-p''q''=-1$, il reste simplement

$$\Delta_f = \frac{r''}{p''} - \frac{1}{p''^2 x}.$$

D'après nos conventions $\frac{r''}{p''}$ peut être occasionnellement une quantité positive ou négative; mais elle restera toujours fort petite à cause de la petitesse de r''. Le second terme au contraire, à cause de son dénominateur x, peut être rendu à volonté positif et très-grand, ou même presque infini, en donnant à x une très-petite valeur négative; ce qui revient à éloigner l'image virtuelle de A_3 au delà de la lentille A_4 un tant soit peu plus que pour le cas d'un presbytisme illimité. Or, un si petit déplacement sera toujours admissible dans nos oculaires, par la précaution que nous avons prise d'amener l'extrémité de $(\Delta)^{\text{iv}}$ presque au milieu de l'intervalle q'' compris entre les deux lentilles A_4, A_5. Lors donc qu'ils auront été ainsi préparés pour un observateur infiniment presbyte qui exige Δ_5 infini, il sera toujours possible de les ajuster pour une vue ordinaire qui exige seulement Δ_5 positif et très-grand; et ce faible transport de l'image virtuelle de A_3 vers l'œil, pourra s'opérer par un petit enfoncement de

l'oculaire total qui rapprochera la lentille antérieure A_2 de l'image objective, sans modifier les intervalles q', q'', h_3.

Puisqu'un tel ajustement est démontré réalisable, admettons qu'il ait lieu, et prenons alors l'expression de Δ^{IV} en Δ_f par la relation générale établie plus haut, nous aurons ainsi

$$\Delta^{\text{IV}} = \frac{q'' - n''\Delta_f}{p''\Delta_f - r''};$$

de là je tire

$$n'' + p''\Delta^{\text{IV}} = \frac{-n''r'' + p''q''}{p''\Delta_f - r''} = + \frac{1}{r'' - p''\Delta_f}.$$

D'après nos conventions $-p''$ est une quantité positive. De plus, dans l'application que nous supposons réalisée, Δ_f est rendu positif et très-considérable, tandis qu'au contraire r'' positif ou négatif est fort petit. Le produit positif $-p''\Delta_f$ donnera donc alors son signe propre à $r'' - p''\Delta_f$; ainsi $n'' + p''\Delta^{\text{IV}}$ étant positif, le second système binaire ne renversera pas l'image virtuelle déjà redressée que le premier système aura produite. Cette inversion sera encore plus impraticable lorsque r'' sera positif, comme il est utile de le faire pour assurer le signe négatif de H. L'instrument ainsi préparé pour un observateur infiniment presbyte, donnera donc encore des images droites quand il sera ajusté pour une portée de vue ordinaire.

129. Au point de l'axe central, où se forme la dernière image réelle $S_4\Sigma_4$, c'est-à-dire, dans le plan focal principal réciproque de la dernière lentille oculaire A_5, on place un diaphragme métallique noirci, percé à son centre d'une ouverture circulaire. Il a pour but de restreindre cette image dans des limites de grandeur telles, que les pinceaux très-déliés qui rayonnent de ses points extrêmes, puissent être admis dans la lentille A_5, simultanément avec ceux qui éma-

nent de points plus voisins de l'axe central, sans être rejetés par elle vers des foyers trop inégalement distants de l'œil quand l'instrument est ajusté pour une vue ordinaire. Si l'on considère idéalement les ouvertures des lentilles comme indéfinies, c'est uniquement l'ouverture de ce diaphragme qui limite l'amplitude du champ apparent, puisque la distance de ses bords intérieurs à l'axe central fixe l'ordonnée focale $\Delta_4 S_4$ ou $\Delta_4 \Sigma_4$ du pinceau incident le plus écarté de cet axe qui puisse parvenir à la dernière lentille oculaire. Or, cette distance est très-facile à fixer en fonction de l'angle final ${}_c X_m$, lorsque l'on suppose les lentilles infiniment minces et les incidences très-petites, comme nous le faisons ici dans tous nos calculs. Car alors tous les rayons partis des points extrêmes S_4, Σ_4 sont censés former leur foyer ultérieur sur leur prolongement des axes géométriques menés des mêmes points au centre de figure A_5. De sorte, par exemple, que, l'instrument étant ajusté pour un œil infiniment presbyte, comme le représente notre figure, les rayons émergents extrêmes $I_5 R_5$, $I_5 S_5$ doivent être respectivement parallèles à ces axes-là. A la vérité, ce parallélisme n'a pas lieu tout à fait exactement dans l'application réelle, tant à cause de l'épaisseur de la lentille A_5, qu'à cause de la grandeur des incidences sous lesquelles elle reçoit les pinceaux émanés des points extrêmes S_4, Σ_4. Car ces pinceaux n'y sont admissibles sous des incidences si considérables qu'en vertu du peu d'amplitude qu'embrasse leur radiation totale, resserrée par les réfractions précédentes; et ils seraient loin de l'être si cette radiation s'étendait physiquement jusqu'au centre de figure A_5 de la lentille, comme le suppose la construction qui comprendrait les droites centrales $S_4 A_5$, $\Sigma_4 A_5$ parmi leurs rayons

constituants. Néanmoins, cette supposition suffira ici, parce qu'on verra tout à l'heure que l'évaluation qu'on en tire sert seulement pour préparer et limiter les épreuves expérimentales auxquelles il faut toujours définitivement recourir pour fixer l'amplitude réelle du champ que chaque instrument peut embrasser avec une suffisante perfection. La ligne centrale $S_4 A_5$ étant ainsi considérée comme parallèle à $I_5 R_5$, l'angle $SA_5 \Delta_4$ devient $-{}_cX_m$; et la distance $A_5 \Delta_4$ étant $-f_5$, l'ordonnée $S_4 \Delta_4$ est sensiblement $-f_5 \sin {}_cX_m$, parce que la petitesse attribuée à l'angle ${}_cX_m$ permet de substituer ici son sinus à sa tangente. Le double de ce produit $2f_5 \sin {}_cX_m$ exprimera donc le diamètre total d'ouverture que doit avoir ce second diaphragme dans les mêmes limites d'approximation. De sorte que l'instrument étant construit, et f_5 connu, il ne restera, pour réduire ce diamètre en nombres, que d'y donner à l'angle ${}_cX_m$ la plus grande valeur que l'instrument puisse admettre.

130. C'est ici que les épreuves expérimentales deviennent nécessaires. Dans tous les instruments jusqu'ici réalisés par les opticiens les plus habiles, l'angle ${}_cX_m$ n'excède pas 15° ou 16°; mais il doit pouvoir atteindre ces limites de grandeur si l'instrument est judicieusement combiné, et si quelque motif particulier n'oblige pas à restreindre avec exagération l'amplitude du champ qu'on y veut admettre, comme nous avons vu que Dollond l'avait fait dans son oculaire polyalde que nous avons pris pour un de nos exemples. Cela posé, le sinus de 15° étant 0,264434, donnons d'abord à $\sin {}_cX_m$ une valeur moindre, par exemple 0,25 ou $\frac{1}{4}$, ce qui suppose ${}_cX_m$ un peu inférieur à 14°,30′. Le diamètre d'ouverture du diaphragme,

ainsi calculé, sera alors $-\frac{1}{2}f_5$, ou la moitié de la distance focale principale de la dernière lentille; et, si l'instrument est bien fait, cette ouverture sera un peu moindre que celle qu'il peut réellement supporter. On l'emploierait donc d'abord; et, après avoir constaté la bonté des effets qu'elle produit, on l'agrandira progressivement jusqu'à ce que leur perfection commence à ne plus paraître suffisante. Alors on se fixera un peu au-dessous de cette dernière limite, et l'amplitude du champ ainsi réglée sera la plus grande que l'instrument puisse embrasser avec convenance. Ce mode expérimental de détermination est celui que les opticiens emploient généralement lorsqu'ils ne reproduisent pas simplement les dimensions d'un appareil déjà éprouvé. On trouve, dans l'Optique pratique de Precht, des proportions d'ouverture de ce diaphragme beaucoup plus grandes que la limite que je viens d'indiquer, et qui sont rapportées comme s'appliquant à une série d'oculaires construits par Frauenhoffer. Mais, d'après les valeurs effectives d'amplitude de champ qui y sont jointes, on voit que ces indications n'y sont pas réellement employées; et aucun opticien à ma connaissance n'a pu pratiquement les admettre. Elles offrent donc tout au plus des limites supérieures qui ne m'ont paru avoir aucun fondement théorique exact, et qui d'ailleurs sont sans utilité pratique, puisque la détermination expérimentale doit procéder par une marche inverse, c'est-à-dire, partir d'une limite d'ouverture trop restreinte pour arriver à la plus grande que chaque instrument peut comporter.

131. Un oculaire quadruple à image objective antérieure, qui serait construit suivant les principes que je viens d'ex-

poser, aurait déjà ses foyers successifs espacés de la manière la plus favorable. Et la position extérieure de son point oculaire final serait assurée, dans l'instrument auquel on l'emploierait. En outre, ces qualités y seraient stables, c'est-à-dire qu'elles subsisteraient encore sans altération appréciable, si les proportions assignées à ses éléments fixes n'étaient pas pratiquement réalisées avec une rigueur absolue. Il ne resterait donc qu'à distribuer la fonction N — 1 du grossissement total positif N, entre ses quatre lentilles, dans la relation la plus approchée possible de l'égalité; et enfin, à faire en sorte que la distribution rectiligne des foyers s'y trouvât réalisée pour ce grossissement, sinon avec une complète rigueur, du moins avec une très-grande approximation. Tel est le problème que nous allons résoudre dans la section suivante.

VIII. RÉPARTITION DE LA FONCTION N — 1 DU GROSSISSEMENT TOTAL, ENTRE LES QUATRE LENTILLES OCULAIRES, EN SATISFAISANT A L'ACHROMATISME FINAL.

132. Employant toujours la même figure 6 que nous avons prise pour exemple, je suppose que A_1I_2 y représente, tant au-dessus qu'au-dessous de l'axe des lentilles, non plus un rayon quelconque à incidence centrale, mais celui de tous ces rayons qui doit border le champ apparent admissible, en formant avec l'axe du système l'angle limite $\pm\, _cX$, dont le signe correspondra à celui des ordonnées z. Prenons d'abord $_cX$ positif. Lorsque le rayon limite, ainsi défini sera parvenu à la première lentille A_2, il la rencontrera en un certain point I_2 dont l'ordonnée A_2I_2 ou $_cz_2$ sera de même signe que $_cX$, par conséquent positive dans notre exemple. L'intervalle A_1A_2 étant

h_1, et l'angle ${}_cX$ devant être supposé très-petit dans l'ordre d'approximation auquel nos formules s'appliquent, on aura entre ces mêmes limites d'évaluation approximative

$${}_cz_2 = h_1 \sin {}_cX.$$

Comme nous supposons l'épaisseur de la lentille A_2 négligeable, cette même valeur de ${}_cz_2$ exprimera aussi l'ordonnée d'incidence du même rayon quand il sera parvenu à sa seconde surface. La petite erreur que comporte cette évaluation, se trouvera encore ici atténuée par le soin qu'on a de tourner la face plane de la lentille A_2 vers l'objectif, qui en est fort distant. Car alors, la petitesse dans laquelle l'angle ${}_cX$ est toujours restreint, rend le rayon incident A_1I_2 presque perpendiculaire à cette face, de sorte qu'il en est à peine dévié. Ainsi, son ordonnée se trouve infiniment peu augmentée quand il parvient à la seconde surface de la lentille, d'autant qu'il la traverse toujours à une petite distance de son tranchant extérieur.

133. Soit r_2 le rayon de courbure de cette seconde surface. On devra le considérer comme positif dans notre notation, puisqu'elle présente sa concavité aux rayons incidents. Alors le rayon de courbure mené au second point d'incidence formera avec l'axe central un certain angle ε_2, pour lequel on aura, dans les mêmes limites d'évaluation

$$\frac{{}_cz_2}{r_2} = \sin \varepsilon_2;$$

mais, à cause de la forme plane convexe de la lentille, si n y représente l'indice de réfraction pour les éléments lumineux de moyenne réfrangibilité, sa distance focale f, calculée pour les mêmes éléments, sera $-\frac{r_2}{n-1}$, page 160; de sorte

qu'en la substituant dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{{}_c z_2}{f_2} = -(n-1)\sin \varepsilon_2.$$

Si, dans cette équation, l'on remplace ${}_c z_2$ par sa valeur en h_1, on en tirera $\frac{h_1}{f_2}$ qui est $\frac{Q_2}{f_2}$, c'est-à-dire le premier des quatre termes qui, d'après la page 159, doivent composer en somme N — 1. Il viendra ainsi

$$\frac{Q_2}{f_2} = -(n-1)\frac{\sin \varepsilon_2}{\sin {}_c X};$$

${}_c X$ est la demi-amplitude du champ apparent que l'on veut, et que l'on croit par conséquent pouvoir admettre, conjointement avec le grossissement angulaire N qui est assigné. Or, pour chaque valeur de N ainsi réalisée, l'angle ${}_c X$ est lié à l'angle final ${}_c X_m$, formé avec l'axe central du système par les axes incidents ainsi introduits; et l'équation qui exprime cette dépendance est

$$\sin {}_c X_m = N \sin {}_c X.$$

Tirant donc de là l'expression générale de $\sin {}_c X$, pour l'éliminer de l'équation précédente, il en résulte

$$\frac{Q_2}{f_2} = -(n-1)N.\frac{\sin \varepsilon_2}{\sin {}_c X_m},$$

ou en faisant pour abréger

$$\mu_1 = +(n-1)\frac{\sin \varepsilon_2}{\sin {}_c X_m}, \qquad \frac{Q_2}{f_2} = -\mu_1 N;$$

alors le coefficient numérique μ_1, supposé positif, exprimera la proportion négative de N que la première lentille A_1 devra fournir dans l'équation de condition de la page 159 :

$$N = 1 + \frac{Q_2}{f_2} + \frac{Q_3}{f_3} + \frac{Q_4}{f_4} + \frac{Q_5}{f_5},$$

équation à laquelle nous avons reconnu qu'il faut satisfaire en donnant au premier terme $\frac{Q_2}{f_2}$ une valeur négative, et aux trois autres des valeurs positives, approchant autant que possible d'être égales entre elles, page 164, § 94.

134. Or, je dis que μ_1 se trouvera effectivement positif dans la disposition que nous donnons ici à l'appareil. Car d'abord la face postérieure de la lentille A_2 présentant sa concavité aux rayons incidents, son rayon de courbure r_2 sera positif dans notre notation. Mais nous avons pris l'angle ${}_cX$ positif pour le rayon à incidence centrale dont nous suivons la marche; ce qui dans cette même notation lui donne une ordonnée d'incidence et d'émergence positive sur la lentille A_2. Donc sin ε_2 aura, pour ce même rayon, une valeur positive, comme l'indique aussi son expression en r_2. Maintenant, puisque N est positif dans l'instrument que nous voulons construire, sin ${}_cX_m$ s'y trouvera toujours de même signe que sin ${}_cX$. Il sera donc positif pour le rayon lumineux que nous considérons. Par conséquent μ_1 sera positif, comme je l'ai annoncé. Car $n - 1$ est toujours positif dans les matières réfringentes solides; et sa valeur surpasse de très-peu $\frac{1}{2}$ pour l'espèce de verre avec lequel les lentilles oculaires sont habituellement confectionnées.

Si nous avions pris l'angle ${}_cX$ négatif, le signe final de μ_1 serait resté le même. Car, à la vérité, le rayon à incidence centrale ainsi introduit aurait son ordonnée d'incidence et d'émergence ${}_cz_2$ négative, ce qui, combiné avec le signe toujours positif de r_2, aurait rendu sin ε_2 négatif; mais, dans ce cas aussi, sin ${}_cX_m$ serait devenu négatif comme sin ${}_cX$

ce qui aurait compensé l'inversion précédente, et restitué à μ_1 son signe positif.

135. Maintenant, pour chaque valeur donnée de l'intervalle h_1, compris entre l'objectif et la première lentille oculaire A_1, il serait évidemment avantageux de rendre l'ordonnée d'incidence ${}_cz_1$ la plus grande possible. En effet, comme elle a pour expression $h_1 \sin {}_cX$, sa grandeur entraîne celle de l'angle ${}_cX$ qui mesure la demi-amplitude du champ apparent que l'instrument embrasse; du moins, en supposant que le rayon à incidence centrale introduit sous cet angle, n'éprouve dans la suite de son trajet que des réfractions assez petites pour qu'on puisse le laisser parvenir à l'œil. Mais les aberrations de sphéricité mettent bientôt des limites à cet agrandissement de ${}_cX$; parce qu'il entraîne celui de ε_1, et par suite celui de l'angle d'incidence en I_1 qui est exprimé par $\varepsilon_1 - {}_cX$ dans notre notation. Car l'effet des aberrations augmente rapidement avec ces angles, de sorte qu'on est forcé de restreindre leurs valeurs dans toutes les lentilles, au degré nécessaire pour que la vision soit tolérable. On a un exemple de cette limitation dans l'angle ${}_cX_m$ lui-même, qui entre ici dans l'expression de $\mu_{,1}$. En effet, la face d'émergence de la dernière lentille A_5 étant plane, la normale à cette face devient parallèle à l'axe central; et ainsi l'angle ${}_mX_c$ représente l'angle final d'émergence I_m. Or, avec les formes de lentilles jusqu'à présent employées dans la confection des oculaires, et que nous adoptons ici, l'expérience la plus constante prouve qu'on ne peut pas obtenir des résultats satisfaisants, si on lui fait excéder une valeur de 15°,30′ ou au plus 16°; ce qui donne pour limite de son sinus 0,267 ou 0,276. Il est donc difficile d'espérer que l'on puisse

donner à l'angle ε_2 des valeurs plus fortes que celles-là, puisqu'il en résulterait pour l'angle d'incidence en I_2, des grandeurs à peu près pareilles, vu la petitesse de $_eX$. Aussi trouvai-je que, dans les oculaires de Frauenhoffer, l'angle ε_2 est habituellement restreint à cette raison d'égalité avec $_eX_m$. Car, en prenant par approximation $n = 1,5$, elle donnerait $\mu_1 = \frac{1}{2}$. Or, c'est là en effet à peu près la valeur qu'on trouve le plus ordinairement au coefficient μ_1 dans ces oculaires, quand on l'y conclut des valeurs simultanées de $\frac{Q_2}{f_2}$ et de N. Ce même coefficient est bien moindre dans l'oculaire polyalde de Dollond dont j'ai rapporté les éléments; car, en l'y calculant par la même méthode, on le trouve égal à 0,44 pour le plus faible grossissement $N = 58$; et seulement à 0,17 pour le plus fort $N = 148,77$; ce qui, en prenant toujours $n = 1,5$ suppose $\sin \varepsilon_2 = 0,88 \sin {}_eX_m$ pour le premier cas, et $\sin \varepsilon_2 = 0,34 \sin {}_eX_m$ pour le second. Au contraire, dans la lunette de Padoue fabriquée par Ramsden, la valeur de μ_1 s'élève jusqu'à $\frac{2}{3}$, mais à la vérité pour un faible grossissement $N = 27$. Cela suppose $\sin \varepsilon_2 = \frac{4}{3} \sin {}_eX_m$, en supposant toujours $n = 1,5$. Or, dans ce même instrument, l'angle $_eX$ a été trouvé par M. Santini égal à $34'.30''$; le grossissement N, mesuré par le dynamètre de Ramsden, étant 27 comme je viens de le dire. Ces données étant introduites dans l'équation générale

$$\sin {}_eX_m = N \sin {}_eX,$$

il en résulte d'abord

$$_eX_m = 15^\circ.43'.26'',$$

et par suite

$$\varepsilon_2 = 21^\circ.10'.43''.$$

Mais cette grande valeur de ε_2 semble être ici une hardiesse qu'il ne serait peut-être pas prudent de prendre pour exemple; car nous allons bientôt reconnaître que le trop fort accroissement de μ_1 réagit d'une manière défavorable sur la grandeur ainsi que sur les proportions relatives des trois termes ultérieurs qui doivent compenser $\frac{Q_2}{f_2}$ et reproduire la somme totale $N - 1$.

136. Pour chaque valeur donnée du grossissement N, l'augmentation du coefficient μ_1 a pour effet de plier plus rapidement vers l'axe central les axes des pinceaux réfractés par la lentille A_2, et de rapprocher ainsi d'elle leur point de concours H_2. Cela permet donc de raccourcir l'intervalle q' ou h_2 qui doit toujours dépasser ce point. L'amoindrissement de μ_1 produit un effet contraire; il éloigne le point de concours H_2 et force d'augmenter h_2. La valeur de $\mu_1 = \frac{1}{2}$ qu'on trouve dans les oculaires de Frauenhoffer, paraît être un résultat moyen entre les dispositions employées avant lui, et par ce motif on peut la croire plus sûre. Au reste, je laisserai ici dans le calcul μ_1 indéterminé, et nous pourrons mieux juger de la convenance de ses valeurs, à mesure que leurs effets se développeront.

137. Mais pour ne laisser aucune obscurité sur ce qui le concerne, j'examinerai dès à présent ce que signifie la petitesse qu'on lui trouve dans l'oculaire polyalde de Dollond, ainsi que les variations considérables qu'il y présente aux deux limites extrêmes de N. Pour cela j'ai prié M. Rossin

de mesurer l'amplitude du champ apparent $2_c X$ que cet oculaire embrassait, dans ces deux circonstances, étant appliqué à un objectif achromatique dont la distance focale principale Δ' était -965^{mm}. Avec ces données, j'ai d'abord calculé les valeurs correspondantes de l'angle final $_c X_m$ par la formule générale

$$\sin {}_c X_m = N \sin {}_c X.$$

J'ai ensuite calculé, pour ces mêmes limites de N, les valeurs de $\frac{Q_2}{N f_2}$ ou μ_1, données par la constitution de l'instrument, et elles se sont trouvées être, respectivement

$$\mu_1 = 0{,}440117, \qquad \mu_1 = 0{,}170288;$$

de sorte qu'en prenant par approximation $n = 1{,}5$, il en résultait

$$\sin \varepsilon_2 = 0{,}880234 \sin {}_c X_m; \qquad \sin \varepsilon_2 = 0{,}340576 \sin {}_c X_m.$$

Alors en effectuant les calculs indiqués j'ai obtenu le tableau suivant :

	Valeurs du grossissement angulaire N, pour les deux valeurs extrêmes de l'intervalle intermédiaire h_3, calculées par la formule de la page 150.	Valeurs correspondantes de l'angle $_c X$ observées aux extrémités de course de l'oculaire.	Valeurs déduites de l'angle $_c X_m$.	Valeurs déduites de l'angle ε_2.
Plus petite valeur de h_3.	58,7734	10'.30"	10°.20'.19"	9°. 5'.29"
Plus grande valeur de h_3.	148,7766	4 . 00	9 .59 .28	3 .22 .48

138. Ce qui frappe d'abord dans ces nombres, c'est la petitesse des valeurs de l'angle $_c X_m$, toutes deux au-dessous de celles qu'on admet en général dans ces appareils. Cette

petitesse se communique à l'angle ${}_{\varepsilon}X$, et le rend beaucoup moindre qu'on ne le trouve dans d'autres instruments pour des grossissements de même force. On la produit en rétrécissant l'ouverture du second diaphragme qui se place en avant de la dernière lentille A_5, dans le plan de son foyer principal, comme je l'ai expliqué, page 213, § 129. L'artiste a eu vraisemblablement recours à cet artifice, pour rendre les effets de son oculaire supportables dans la grande étendue de course qu'il voulait lui donner.

139. La même cause produit la diminution considérable que l'angle ε_2 éprouve, quand on passe de la plus petite à la plus grande valeur de h_3, conséquemment du plus faible au plus fort grossissement. Cela se voit à l'inspection de notre figure 6. D'abord, dans le grossissement le plus faible, l'image objective $S_1\Sigma_1$ est antérieure à la première lentille oculaire A_2; et de là résulte une image virtuelle $S_3\Sigma_3$, placée à une certaine distance au delà de A_3, laquelle est ensuite concentrée en une réelle $S_4\Sigma_4$, qui se forme dans le plan focal de A_5, où le second diaphragme est fixé. L'ouverture de ce diaphragme limite alors l'image $S_4\Sigma_4$, conséquemment le champ extérieur dont elle dérive. Maintenant, pour passer au grossissement le plus fort, en conservant toujours aux pinceaux incidents leur caractère d'émergence finale sous forme de faisceaux, il faut rapprocher l'oculaire de l'objectif jusqu'à faire entrer le foyer de celui-ci dans l'intervalle des deux lentilles A_2A_3 qui composent le premier système binaire. Cette circonstance rejette l'image virtuelle $S_3\Sigma_3$ beaucoup plus loin de A_3 en la rendant aussi plus grande. On est obligé en conséquence d'éloigner aussi davantage le second système binaire du premier, afin de mettre toujours $S_4\Sigma_4$ dans le plan

focal principal réciproque de A_5. Mais cette coïncidence de position relative étant opérée sur une image $S_3\Sigma_3$ plus grande qu'auparavant, l'image réelle $S_4\Sigma_4$ qui en dérive déborde le diaphragme qui avait été réglé pour la contenir dans son premier état; et toute la portion actuellement excédante étant perdue pour l'œil, les portions correspondantes des objets qui la formaient cessent d'être visibles; de sorte que l'amplitude du champ observable se rétrécit. Par suite, les rayons à incidence centrale qui bordent ce champ rétréci vont percer la lentille A_2 plus près de son centre de figure que ne faisaient les précédents qui leur étaient extérieurs, et cela diminue l'angle ε_2.

140. L'oculaire de Dollond que j'ai pris ici pour exemple, n'avait pas été primitivement destiné pour l'objectif auquel nous venons de l'appliquer : il était adapté à un autre dont la distance focale principale était seulement 1 pied français d'ancienne mesure ou $324^{mm},84$, et il y produisait un grossissement angulaire variable depuis 20 jusqu'à 60. On peut donc se demander si les valeurs de ${}_{c}X_{m}$ qui se produisaient aussi alors, n'étaient pas fort différentes de celles que nous venons de calculer, et si celles du coefficient μ_1 que nous en avons déduites, n'étaient pas autres aussi, dans ce premier état. Ces questions sont d'autant plus nécessaires à examiner, que l'on transporte ainsi fréquemment un même oculaire à des objectifs de longueur focale différente.

141. Pour que l'identité d'application soit exacte, il faut admettre que non-seulement les lentilles de l'oculaire, mais aussi tous leurs intervalles sont maintenus les mêmes dans les deux cas. Il faut, en outre, établir la comparaison pour une même portée de vue de l'observateur; et, afin de simplifier

les résultats, je le supposerai infiniment presbyte. Alors, dans les deux applications, tous les coefficients principaux de l'oculaire que nous nommons N'', P'', Q'', R'' resteront constants; et par suite la distance D de l'image objective à sa première lentille A_2 devra l'être aussi, puisque cette image doit toujours se trouver dans le plan focal principal réciproque de l'oculaire, dont toutes les parties gardent la même position relativement à A_2. Ceci convenu, nommons $(\Delta)'$ la première distance focale employée, (N) le grossissement angulaire qui s'y produit, et désignons par Δ', N les quantités analogues dans l'application suivante. Nous aurons, d'après la page 72, ces deux expressions équivalentes de la distance D

$$D = N'' \frac{(\Delta)'}{(N)}, \qquad D = N'' \frac{\Delta'}{N},$$

conséquemment

$$N = \frac{\Delta'}{(\Delta)'} (N),$$

c'est-à-dire que les grossissements angulaires produits seront proportionnels aux longueurs des distances focales employées.

Lorsque l'on applique ainsi successivement un même oculaire à des objectifs dont les longueurs focales sont différentes, on l'emploie, dans les deux cas, sans aucun changement intérieur, et par conséquent avec le même diaphragme placé au foyer réciproque de la dernière lentille A_5. Or, ce diaphragme ainsi fixé, détermine, par son ouverture, le plus grand angle final ${}_cX_m$ que l'instrument puisse admettre, étant adapté à un observateur infiniment presbyte. Car en nommant δ son demi-diamètre, on a, comme nous l'avons vu page 215, § 129,

$$\sin {}_cX_m = \pm \frac{\delta}{f_5}.$$

L'angle ${}_cX_m$ reste ainsi le même dans les deux applications; mais les valeurs de l'angle primitif ${}_cX$ dont il dérive sont très-différentes l'une de l'autre. Car en appliquant à ces éléments la même notation de parenthèses dont nous avons fait tout à l'heure usage, la relation générale qui les rattache au grossissement N donne pour chacun des deux cas

$$\sin {}_cX_m = (N) \sin {}_c(X), \qquad \sin {}_cX_m = N \sin {}_cX,$$

conséquemment

$$N \sin {}_cX = (N) \sin {}_c(X),$$

ou encore

$$\Delta' \sin {}_cX = (\Delta)' \sin {}_c(X),$$

c'est-à-dire que les deux amplitudes successives du champ sont réciproques aux grossissements angulaires produits, et le sont aussi aux longueurs focales des objectifs employés.

Si l'on applique ces calculs à l'oculaire de Dollond, transporté à la distance focale 965^{mm}, au lieu de $324^{mm},84$, sur laquelle il avait été primitivement ajusté, on trouvera d'abord que le rapport de ces distances, ou $\frac{\Delta'}{(\Delta)'}$, est 2,9707 ou à fort peu près 3. Ainsi, en prenant pour données les grossissements mesurés par M. Rossin avec le dynamètre, lesquels étaient 62 et 180, dans les extrêmes de la course que parcourait cet oculaire lorsqu'il était appliqué à la plus grande des distances Δ', on aura 20,6 et 60 pour les valeurs primitives de (N), et qui étaient en effet celles que l'on voit encore gravées sur le tube de l'instrument. La seconde s'obtiendrait un peu plus faible si on la déduisait de la valeur 148,66 que le calcul donne quand on suppose la plus grande valeur de h_3 égale à 200^{mm}, ainsi que me l'avait indiqué M. Rossin. Mais cette différence peut résulter soit de l'imperfection de la mesure des intervalles,

soit des erreurs que le dynamètre comporte pour les forts grossissements, soit enfin de l'influence que les épaisseurs des lentilles, que nous considérons comme insensibles, peuvent avoir sur les résultats.

142. Maintenant, dans de telles circonstances, d'un trajet libre, et d'un même oculaire appliqué à des distances focales d'inégales longueurs, si l'on calcule le coefficient μ_1, par la valeur actuelle de $\frac{Q_2}{f_2}$, c'est-à-dire de $\frac{h_2}{f_2}$ en N, je dis qu'on le trouvera toujours sensiblement le même.

En effet, si l'on remplace h_1 par son expression représentative $-\Delta' + D$, dans les deux observations supposées successives, elles donneront

$$\frac{-(\Delta)' + D}{f_2} = -(\mu)_1(N),$$

et

$$\frac{-\Delta' + D}{f_2} = -\mu_1 N,$$

d'où l'on tire, en éliminant f_2 qui est commun,

$$\frac{\mu_1}{(\mu)_1} = -\frac{(N)\Delta'}{N(\Delta)'}\frac{\left(1-\frac{D}{\Delta'}\right)}{\left(1-\frac{D}{(\Delta)'}\right)}.$$

Et comme le coefficient extérieur à la parenthèse, dans le second membre, est égal à 1, à cause de la constance supposée de D, il restera

$$\frac{\mu_1}{(\mu)_1} = \frac{\left(1-\frac{D}{\Delta'}\right)}{\left(1-\frac{D}{(\Delta)'}\right)};$$

cela donnera donc μ_1 sensiblement égal à $(\mu)_1$, si la distance D est toujours très-petite comparativement à Δ' et à $(\Delta)'$,

comme on doit toujours le supposer dans ces applications. Ainsi la valeur de μ_1 que j'ai conclue des observations faites par M. Rossin avec l'oculaire de Dollond, en l'appliquant à la distance focale $\Delta' = -965$, nous reproduit à très-peu près celle qui s'y trouvait réalisée dans son ajustement primitif, pour les mêmes valeurs de l'intervalle intermédiaire h_3. Nous avons reconnu d'ailleurs que l'angle final ${}_{\prime}X_m$ n'avait subi aucun changement dans les deux observations, puisque le diaphragme qui le limite était resté appliqué avec sa même ouverture, et à la même place au-devant de la même lentille A_5. Il résulte donc de là que l'artiste avait réellement restreint ce diaphragme, et par suite l'angle ${}_{\prime}X_m$, à un degré excessif, pour donner une plus grande possibilité de course à son instrument, en retrécissant dans une proportion correspondante, l'amplitude du champ qu'il lui laissait embrasser.

143. J'ai beaucoup insisté sur les particularités physiques et analytiques attachées à ce premier coefficient μ_1, parce que la valeur qu'on lui attribue exerce une influence considérable sur tout le reste de l'oculaire, comme on peut aisément le pressentir, et comme on en verra bientôt la preuve ressortir des faits. Maintenant, quelle que soit cette valeur, la somme des trois quantités $\frac{Q_3}{f_3}$, $\frac{Q_4}{f_4}$, $\frac{Q_5}{f_5}$, analogues à $\frac{Q_2}{f_2}$, mais qui doivent être positives, devra, en outre, compenser d'abord le produit négatif $-\mu_1 N$, puis y ajouter $N - 1$. Cette somme totale sera ainsi $(1 + \mu_1)N - 1$. Si donc les trois quantités qui la composent étaient rendues égales entre elles, comme il serait à désirer qu'on pût le faire, pour les affaiblir individuellement, la valeur de chacune d'elles devrait être

$(1+\mu_1)\frac{N}{3}-\frac{1}{3}$; de sorte qu'en prenant, par exemple, $\mu_1=\frac{1}{2}$, comme dans la plupart des oculaires de Frauenhoffer, cette valeur positive commune serait $\frac{1}{2}N-\frac{1}{3}$, ou approximativement $\frac{1}{2}N$. Mais il s'en faut malheureusement de beaucoup qu'une telle égalité de répartition puisse être appliquée à la première $\frac{Q_3}{f_3}$. Celle-ci doit inévitablement être faite plus petite que les deux suivantes et moindre que $-\frac{Q_2}{f_2}$, par des motifs que je vais exposer. Ainsi l'on ne pourra pas accroître $\frac{Q_2}{f_2}$, sans reporter sur les deux dernières lentilles une proportion du grossissement, qui tend à y trop exagérer les incidences.

144. Ces motifs résultent des conditions d'achromatisme, et des autres relations de signe ou de grandeur que nous avons reconnu convenable d'établir entre les coefficients principaux des deux systèmes binaires qui constituent l'oculaire total. Pour développer cette connexion, je remplace d'abord $\frac{Q_2}{f_2}$ par son expression explicite en fonction des coefficients principaux du premier système, que nous avons formée page 187; et l'égalant à $-\mu_1 N$, comme nous l'avons établi page 219, j'ai ainsi

$$(r'-1)\frac{h_1}{q'}=-\mu_1 N;$$

je considère de même $\frac{Q_3}{f_3}$ dans son expression explicite qui, d'après cette même page 187, est

$$\frac{Q_3}{f_3}=(n-1)\frac{(q'+r'h_1)}{q'},$$

ou

$$\frac{Q_3}{f_3} = \frac{(n'-1)r'h_1}{q'} + n' - 1.$$

Dans les arrangements que nous voulons établir, n' sera une petite fraction négative de l'unité; conséquemment $\frac{(n'-1)r'h_1}{q'}$ devra être une proportion positive de N supérieure d'un peu plus d'une unité à la valeur totale positive de $\frac{Q_3}{f_3}$. Je représente généralement cette proportion par $+\mu_2 N$; et en réunissant ce résultat à l'expression précédente de $-\mu_1 N$, j'ai les deux équations coexistantes

$$(r'-1)\frac{h_1}{q'} = -\mu_1 N, \qquad \frac{(n'-1)r'h_1}{q'} = +\mu_2 N,$$

dans lesquelles les coefficients numériques μ_1, μ_2, doivent être tous deux positifs. En les divisant l'une par l'autre, elles donnent

$$\mu_2(r'-1) + \mu_1(n'-1)r' = 0.$$

Voilà donc déjà une relation obligée entre les coefficients principaux n', r', et les indéterminées positives μ_1, μ_2. Or, dans un instrument où l'image objective doit être de très-peu antérieure à la première lentille oculaire, comme celui que nous voulons établir, nous avons reconnu, page 118, pour condition essentielle de l'achromatisme, que le produit $n'r'$ fût une petite fraction positive de l'unité. Désignant donc cette fraction par $+\omega$, comme nous l'avons fait alors, nous aurons;

$$n'r' = \omega,$$

et cette relation combinée avec la première, entre les coefficients n', r', donnera pour leur expression la plus générale

$$n' = \frac{\omega(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1\omega - \mu_2}, \qquad r' = \frac{(\mu_1\omega - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

145. Ces valeurs étant reportées dans les équations primitives en N vont déterminer q'; mais avant de le faire, je vais spécifier la petitesse ainsi que le sens de la distance D de l'image objective au-devant de la première lentille oculaire A_1. Pour cela, comme dans la page 194, je désigne par m une fraction positive de l'unité, que nous avons reconnu alors convenable de maintenir entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, et je fais

$$D = -mf_2,$$

ou en mettant pour f_2 sa valeur explicite en fonction des coefficients principaux du premier système

$$D = -\frac{mq'}{r'-1}.$$

Or, on a généralement

$$h_1 = -\Delta' + D,$$

il en résulte donc

$$h_1 = -\Delta' - \frac{mq'}{r'-1}.$$

Cette transformation de h_1 étant introduite dans l'une des équations primitives en N, par exemple dans la première, on en tire

$$\frac{(r'-1)\Delta'}{q'} = \mu_1 N - m.$$

Et après avoir éliminé r' par son expression en ω, il vient

$$q' = -\frac{\mu_1(1-\omega)\Delta'}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1 N - m)}.$$

Je déduis tout de suite de ces résultats l'expression correspondante du coefficient principal p' par la relation

$$n'r' - p'q' = 1,$$

qui donne

$$p' = \frac{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1 N - m)}{\mu_1\Delta'}.$$

146. Enfin, pour ne pas revenir sur ces transformations, je traduis de même, en fonction de l'indéterminée ω, les distances focales f_2, f_3, ainsi que les intervalles D et h_1, au moyen de leurs expressions explicites

$$f_2 = \frac{q'}{r' - 1}, \quad f_3 = \frac{q'}{n' - 1}, \quad D = -mf_2, \quad h_1 = -\Delta' + D,$$

et je rassemble ces résultats dans le tableau suivant, qui contient ainsi tous les éléments constitutifs du premier système binaire réduits à cette nouvelle forme, laquelle met en évidence les conditions numériques des diverses quantités spéciales dont nous avons reconnu la convenance ou la nécessité.

147. ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DU SYSTÈME BINAIRE ANTÉRIEUR. EXPRESSIONS GÉNÉRALES.

Coefficients numériques	$n' = \frac{\omega(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1\omega - \mu_2}$	$r' = \frac{(\mu_1\omega - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}$
Coefficients linéaires	$p' = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 N - m)}{\mu_1 \Delta'}$	$q' = -\frac{\mu_1(1 - \omega)\Delta'}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 N - m)}$
Distances focales principales des lentilles	$f_2 = +\frac{\Delta'}{\mu_1 N - m}$	$f_3 = -\frac{\mu_1(\mu_1\omega - \mu_2)\Delta'}{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 N - m)}$
Autre expression de la dernière		$f_3 = -\frac{\mu_1(\mu_1\omega - \mu_2)}{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)} f_2$
Distance de l'image objective au devant de la 1re lentille oculaire A_2		$D = -mf_2$
Intervalle compris entre l'objectif et cette 1re lentille		$h_1 = -\mu_1 N f_2$
Distance de la lentille A_2 au diaphragme qui la suit	$H_2 = \frac{h_1 f_2}{h_1 + f_2}$; ou encore	$H_2 = \frac{\mu_1 N}{\mu_1 N - 1} . f_2$
Demi-ouverture de ce diaphragme A_1 étant celle de l'objectif	$\delta_2 = \pm \frac{A_1 . f_2}{h_1 + f_2}$: ou encore	$\delta_2 = \pm \frac{A_1}{\mu_1 N - 1}$

CONSTANTES FONDAMENTALES INDÉTERMINÉES.

1°.......Δ' distance focale actuelle de l'objectif.
2°.......N grossissement angulaire de l'instrument total.
3°.......m ou $\frac{D}{f_2}$.
4°.......ω ou $n'r'$.
5°...$-\mu_1$ proportion intervertie du grossissement N, produite par la 1re lentille oculaire A_2 (expression exacte).
6°...$+\mu_2$ proportion redressée du grossissement N, produite par la 2e lentille oculaire A_3, augmentée de $1 - n'$.

Je vais maintenant examiner les caractères imprimés à ces expressions, par les conditions de signe ou de grandeur que nous avons attribuées aux diverses indéterminées que nous y avons introduites, conditions que je me bornerai seulement à rappeler au besoin, comme autant de faits convenus.

148. Je considère d'abord q'. Dans son expression, Δ' représente la distance focale principale de l'objectif, qui est négative, de sorte que $-\Delta'$ est positif. Les indéterminées μ_1, μ_2 sont aussi positives individuellement, de même que $\mu_1 N - m$, parce que m est une petite fraction qui ne peut pas intervertir le signe de $\mu_1 N$. Enfin, ω doit être aussi une petite fraction positive dont la valeur atteint tout au plus 0,15 ou 0,16 dans les cas les plus exagérés; de sorte que le facteur $1-\omega$ sera pareillement positif. Donc, pour que q' soit positif, comme il doit toujours l'être, puisqu'il exprime l'intervalle des deux lentilles $A_1 A_2$, il faut que $\mu_1 - \mu_2$ soit positif, c'est-à-dire que μ_1 surpasse μ_2.

Ainsi, déjà la seconde lentille A_3 ne peut à elle seule compenser toute la proportion du grossissement N que la première A_2 a interverti. Elle n'en peut reproduire qu'une partie; et ce qui manque pour la compensation doit être opéré par les deux suivantes conjointement avec la somme positive $N-1$. Cette circonstance, jointe à la limitation nécessaire de μ_1, empêche que l'on ne puisse répartir la somme totale $(1+\mu_1)N-1$ entre les trois lentilles postérieures de l'oculaire, suivant l'exacte proportion d'égalité qui serait d'ailleurs désirable.

Mais l'excès de μ_1 sur μ_2 dans les limites où on peut l'étendre, est bien plus que compensé dans $\mu_1\omega - \mu_2$ par la petitesse numérique du facteur ω tel que nous l'admettons.

Cette quantité $\mu_1\omega - \mu_2$ devient donc négative, ce qui, joint au caractère positif de ω ainsi que de $\mu_1 - \mu_2$, rend les coefficients numériques n', r', tous deux négatifs, comme nous avions désiré qu'ils le fussent, et comme ils le sont en effet dans tous les oculaires que nous avons étudiés.

Par une conséquence pareille, p' est négatif à cause de son dénominateur Δ'; il se trouve tel encore dans toutes ces constructions.

Enfin, les distances focales f_2, f_3 se présentent également toutes deux négatives, comme cela convient au caractère de convergence que nous leur avons attribué.

149. Je vais maintenant former la quantité $q' + r'h_1$ ou Q_3, pour voir si elle se présente aussi négative. Car, ainsi qu'on l'a vu page 165, § 94, cela est nécessaire pour que l'ordonnée ${}_cz_3$ de chaque rayon à incidence centrale soit de signe contraire à son ordonnée ${}_cz_2$, ce que nous avons reconnu être la première condition à remplir pour que les trois dernières lentilles coopèrent dans un même sens à produire l'angle final ${}_cX_m$, de même signe que ${}_cX$. Au moyen des expressions contenues dans notre tableau, je trouve :

$$Q_3 = q' + r'h_1 = \frac{\mu_1(\mu_2 N - 1)\Delta'}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 N - m)}\left[1 - \frac{(\mu_1 N - 1)}{(\mu_2 N - 1)}\,\omega\right];$$

la petitesse convenue de ω fait que le terme qu'il multiplie entre les parenthèses est toujours une fraction moindre que 1 ; ainsi la quantité totale que ce signe embrasse est positive. Dans le coefficient extérieur, tous les facteurs sont positifs, excepté Δ' qui est négatif. Le signe de celui-ci se communique donc à l'expression de Q_3 qui se trouve par là rendue négative, comme nous le désirions.

150. Je forme de même l'expression transformée de Δ_3 qui

est la distance focale actuelle du premier système binaire appliqué à l'image objective, dans les conditions où il est employé. On a vu, page 196, que cette expression a pour forme primitive

$$\Delta_3 = \frac{q' + r'D}{n' + p'D};$$

en substituant dans les deux termes du second membre leurs valeurs transformées, je trouve

$$q' + r'D = -\frac{\Delta'}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 N - m)}\left[m(\mu_1\omega - \mu_2) + \mu_1(1 - \omega)\right];$$

$$n' + p'D = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1(\mu_1\omega - \mu_2)}\left[m(\mu_1\omega - \mu_2) - \mu_1\omega\right];$$

ce qui donne

$$\Delta_3 = -\frac{\mu_1(\mu_1\omega - \mu_2)\Delta'}{(\mu_1 - \mu_2)^2(\mu_1 N - m)}\left[\frac{\mu_1}{m\mu_2 + (1 - m)\mu_1\omega} - 1\right].$$

Ici, encore, la petitesse convenue de ω et de m, tous deux positifs, fait que le terme où ils entrent comme diviseurs dans les parenthèses, a toujours une valeur positive bien plus grande que l'unité négative qui l'accompagne. Ainsi la quantité totale comprise sous ce signe reste positive. Dans le coefficient extérieur, il y a deux facteurs négatifs qui sont $\mu_1\omega - \mu_2$ et Δ'. Les autres sont tous positifs, tant au numérateur qu'au dénominateur de ce coefficient. Le signe extérieur — se communique donc à toute l'expression de Δ_3, qui se trouve par là rendue négative. Ainsi le système binaire, appliqué à l'image objective, la renverse d'abord, puisque $n' + p'D$ est évidemment négatif, c'est-à-dire qu'il la redresse; puis, en outre, il la jette derrière lui comme nous le demandions. Enfin, ces conditions de redressement et de formation postérieure au système, subsistent même pour toutes les valeurs négatives de m qui n'intervertissent pas le signe du dénomi-

nateur compris sous les parenthèses dans l'expression de Δ_3. De sorte que, jusqu'à cette limite d'inversion, l'appareil conserve encore son sens d'action primitif, même pour des positions de l'image objective qui seraient postérieures à la première lentille oculaire A_2. La possibilité physique de l'instrument sera donc assurée dans toute cette amplitude de course où Δ_3 est négatif, si l'on règle la distance focale principale $\frac{n''}{p''}$ du second système binaire, laquelle sera positive, de manière qu'elle soit toujours moindre que $-\Delta_3$; et c'est ce que nous ferons plus tard.

151. Mais auparavant il est essentiel de remarquer l'influence que la différence $\mu_1 - \mu_2$ exercerait sur les éléments linéaires de ces résultats, si l'on élevait imprudemment μ_2 jusqu'à une valeur trop rapprochée de μ_1, dans l'intention de faire produire à la seconde lentille A_3 une plus forte proportion de la somme totale de grossissement que les trois dernières doivent restituer. En effet, la petitesse de cette différence donnerait alors une grandeur exagérée à ceux de ces éléments dans l'expression desquels elle entre comme dénominateur, et qui sont q', f_3, Q_3, Δ_3; de sorte que les dimensions longitudinales de l'oculaire s'en trouveraient allongées au delà de toutes les proportions convenables pour l'usage de l'instrument; et elles deviendraient infinies, si μ_2 était fait égal à μ_1. Il faut donc consulter l'expérience pratique pour savoir dans quelles limites ces dimensions doivent être restreintes, et déterminer les coefficients μ_1, μ_2, de manière que nos appareils ne les excèdent pas. A cet effet, je reprends l'expression transformée de f_3, où μ_1 se présente seul, et j'y joins celle de q' en f_3 par un motif de simplification analogue. J'ai ainsi

pour éléments de comparaison avec l'expérience :

$$f_1 = \frac{\Delta'}{\mu_1 N - m}, \qquad q' = -\frac{\mu_1(1-\omega)}{(\mu_1-\mu_2)} \cdot f_1.$$

152. Je considère d'abord f_1 : étant convenus de prendre pour m une petite fraction, comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, sa valeur dépend principalement du rapport $\frac{\Delta'}{N}$ et du coefficient μ_1 ; je vais donc examiner successivement ce que l'expérience peut donner de lumière sur le choix le plus convenable de ces deux quantités.

Le rapport $-\frac{\Delta'}{N}$ exprime la longueur absolue de distance focale qui correspond à chaque unité de grossissement. J'ai calculé la valeur de cet élément dans les oculaires de Frauenhoffer dont on a les mesures; et, en prenant le millimètre pour unité de longueur, j'ai trouvé qu'il y varie entre $24^{mm}\frac{1}{3}$ et $16^{mm}\frac{1}{4}$. Mais la seconde limite y est très-rarement employée, et l'on peut légitimement craindre qu'avec un raccourcissement si considérable, le grossissement demandé ne puisse s'obtenir d'une manière satisfaisante pour l'œil, qu'en rétrécissant l'amplitude du champ apparent plus qu'il n'est désirable de le faire. Le résultat moyen de toutes les évaluations donne 21^{mm} pour chaque unité de grossissement, et cette dernière proportion paraît ne devoir être affaiblie qu'occasionnellement; par exemple, pour la plus grande étendue d'écart que l'on peut vouloir permettre aux deux systèmes binaires d'un oculaire polyalde. Ainsi, dans l'application de celui de Dollond à la distance focale primitive de $324^{mm},84$, avec des grossissements de 20 et 60 fois, le rapport $-\frac{\Delta'}{N}$ est

seulement $16^{mm}\frac{1}{4}$ pour le premier, et $5^{mm},41$ pour le second. Mais on a vu que ces résultats n'y sont tolérables qu'avec une amplitude de champ excessivement restreinte. Dans la lunette de Padoue, construite par Ramsden, le rapport $-\frac{\Delta'}{N}$ est bien plus élevé ; car la distance focale de l'objectif, étant 350 lignes de Paris ou $789^{mm},540$, et le grossissement 27, chaque unité de grossissement y répond à $29^{mm},24$. Cet excès de longueur est sans doute une des causes des bons effets qu'elle produit. Mais en exceptant les cas particuliers où l'on aura quelque motif spécial pour obtenir un instrument très-long ou très-court, on peut s'en tenir avec sécurité à la moyenne déduite des oculaires de Frauenhoffer, c'est-à-dire prendre habituellement 21^{mm} de distance focale de l'objectif pour chaque unité de grossissement que l'on veut produire avec les oculaires quadruples que nous considérons.

153. En supposant alors qu'on leur donne toute la perfection dont ils sont susceptibles, on peut très-approximativement prévoir l'amplitude du champ qu'ils seront capables d'embrasser, pour chaque grossissement assigné N. Car l'angle final ${}_cX_m$ se trouvant toujours restreint à une valeur peu différente de $15°.30'$ dans ceux de ces instruments qui sont reconnus les plus parfaits, si l'on suppose cette limite réalisée dans celui qu'on veut construire, on en tirera aussitôt

$$\sin {}_cX = \frac{\sin 15°.30'}{N} = \frac{0,2672384}{N}.$$

Ainsi, en effectuant la division indiquée dans le second membre, on connaîtra par les tables de sinus la demi-amplitude approchée ${}_cX$ du champ apparent que l'instrument embrassera *pratiquement*, avec avantage, et à laquelle on

devra ultérieurement le restreindre pour en obtenir de bons effets.

Par exemple, dans la lunette de Padoue, le grossissement réalisé, et mesuré par M. Santini avec le dynamètre, est 27. Pour cette valeur de N, la règle précédente donne

$$ {}_cX = 34'.3'', $$

conséquemment

$$ 2_cX = 68'.6''. $$

Cet angle 2_cX est donc l'amplitude du champ présumable que l'instrument pourra supporter avec perfection. M. Santini a mesuré celle qu'il embrasse réellement, dans l'état où l'artiste l'a réglé, et il l'a trouvée d'*environ* 69'.

M. Rossin a construit, pour l'École des mines de Paris, une excellente lunette à oculaire quadruple, dont le grossissement peut être varié depuis 38 fois jusqu'à 48, par l'écartement de l'intervalle intermédiaire h_3; et, dans toute cette étendue de course, les effets sont on ne peut plus satisfaisants. Ici notre règle donne

Pour	$N = 38$,	$2_cX = 48'.11''$.
	$N = 48$,	$2_cX = 38'.16''$.

Pour ces mêmes valeurs de N, déterminées avec le dynamètre, M. Rossin a trouvé par des mesures angulaires les amplitudes réelles du champ égales à 49' et à 39'. La différence peut tenir aux incertitudes que ce double genre d'observation comporte; ou à ce que la bonne exécution de l'oculaire aurait permis d'y laisser l'angle final ${}_cX_m$, un peu plus grand que la valeur moyenne supposée ici.

Il faut remarquer que ce mode d'évaluation approximative indique seulement les amplitudes que l'on peut réaliser

avec succès, et non celles que l'on pourrait théoriquement supposer réalisables. Ainsi, en l'appliquant, par exemple, aux oculaires de Frauenhoffer, dont les éléments ont été publiés par Sprecht dans son Traité d'optique pratique, on en déduit des amplitudes notablement moindres que celles qu'indique cet ouvrage. Mais aussi ces dernières paraissent avoir été établies par des suppositions de calcul, pour donner les dimensions d'ouverture sur lesquelles les lentilles et les diaphragmes doivent être fabriqués, et non pas avoir été obtenues par des expériences réelles. C'est probablement pour cela que des opticiens fort habiles qui ont exécuté des oculaires exactement de même modèle que ceux de Frauenhoffer, ont toujours été obligés d'y restreindre le diaphragme le plus voisin de l'œil au-dessous des dimensions indiquées, ce qui rétrécissait le champ réel, et devait le faire rentrer dans les limites de notre règle pratique.

Par une raison inverse, cette règle appliquée à l'oculaire de Dollond donnerait des amplitudes trop fortes, l'angle X_m y étant beaucoup trop restreint.

154. Je cherche maintenant les valeurs les plus convenables du coefficient μ_1. Déjà, dans la page 222, § 135, j'ai exposé les considérations physiques qui ne permettent pas d'élever sa valeur beaucoup au delà de 0,5. L'expérience confirme pleinement cette restriction. Pour s'en assurer, il n'y a qu'à prendre les valeurs simultanées de f_1, Δ', N et m, dans les circonstances d'application des divers oculaires les plus parfaits qui nous ont servi d'exemple, et en déduire μ_1 d'après sa relation avec ces données. On trouve ainsi dans les oculaires de Frauenhoffer μ_1 habituellement très-peu inférieur à 0,5 avec des variations occasionnelles extrêmement

petites. Il est encore tel dans l'excellente lunette fabriquée par M. Rossin pour l'École des mines. On le voit une seule fois élevé jusqu'à 0,54 par Frauenhoffer, dans son oculaire n° 1, qui est d'une construction exceptionnelle, et qui n'a pas paru d'un usage avantageux quand on l'a reproduit; enfin, il est plus fort encore dans la lunette de Padoue, où il s'élève jusqu'à 0,6577. Mais cette dernière aussi, par plusieurs de ses particularités, semble s'écarter des conditions qui ont réussi le plus généralement; et elle pourrait bien devoir surtout sa bonté à la faiblesse, tant relative qu'absolue, du grossissement auquel on l'a restreinte. D'après cela, on peut, je crois, avec toute sûreté, prendre comme moyenne habituelle $\mu_1=0,5$, en se réservant la liberté de faire osciller ce coefficient dans d'étroites limites, autour de cette valeur, ainsi que j'en offrirai plus loin des exemples.

155. J'arrive au coefficient μ_2. Nous avons déjà reconnu qu'il devait être moindre que μ_1; mais sa relation de différence avec celui-ci réagit principalement sur les quantités qui ont pour dénominateur $\mu_1-\mu_2$, comme sont, par exemple, q' et Δ_3. C'est donc de leurs expressions qu'il convient de la déduire. Pour cela, reprenant les mêmes oculaires que leur succès nous a déjà fait employer comme exemple, je cherche dans chacun d'eux le rapport de q' à f_2 que l'on y a réalisé. Puis, empruntant aussi la valeur de ω qui est associée à ce rapport, j'obtiens la valeur correspondante de $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ par l'équation qui lie entre elles ces diverses quantités. Je trouve ainsi que, dans les oculaires de Frauenhoffer, $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ est toujours excessivement peu différent de 0,4, avec de très-petites oscillations occasionnelles tant au-dessus qu'au-des-

sous de cette valeur. Dans la lunette de Padoue, ce même rapport s'élève jusqu'à 0,47, et c'est la plus haute limite que j'aie rencontrée. La plus basse s'est offerte à moi dans l'oculaire de Dollond, où $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ est réduit à 0,30770. Mais on a vu que ce dernier ne doit pas être pris pour un modèle habituel. Il est cependant utile de remarquer que ces valeurs extrêmes s'écartent de la moyenne de Frauenhoffer en des sens contraires, et à peu près également : de sorte qu'elles s'accordent à la présenter comme un milieu dont il faut toujours se tenir très-proche.

156. D'après cela, dans les calculs qui vont suivre, j'associerai habituellement cette valeur moyenne de $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ à celle de μ_1 que nous avions plus haut fixée; nous aurons alors

$$\mu_1 = 0{,}5, \qquad \mu_2 = 0{,}4\,\mu_1 = 0{,}2, \qquad \mu_1 - \mu_2 = 0{,}3.$$

Ces valeurs offrent ainsi un type moyen dont on ne devra jamais que très-peu s'écarter, afin de maintenir entre μ_1 et μ_2 un ordre de différence tel, que les quantités q', f_3, Δ_3, où $\mu_1 - \mu_2$ agit comme dénominateur, ne se trouvent pas démesurément agrandies. Par inverse, en s'astreignant à cette condition, l'on sera assuré que les quantités dont il s'agit resteront entre les bornes de longueur désirables. C'est pourquoi, dans ce qui va suivre, j'emploierai toujours les valeurs précédentes de μ_1 et de μ_2 pour apprécier numériquement les effets physiques des diverses expressions analytiques que nous formerons.

157. Déjà ceci nous donne une limite supérieure de notre indéterminée ω. En effet, en l'introduisant, nous avons exigé qu'elle fût positive, et assez petite pour que $\mu_2 - \mu_1\omega$ fût aussi

positif. Or, avec les moyennes précédentes de μ_1 et de μ_2, cette dernière quantité devient $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\omega$ ou $\frac{2-5\omega}{10}$. Elle ne peut donc être positive, avec ω positif, qu'autant que ω est inférieur à $\frac{2}{5}$ ou 0,4. Mais d'autres considérations vont bientôt nous montrer qu'il doit être maintenu bien au-dessous de cette limite.

158. Pour compléter l'évaluation moyenne des quantités relatives au premier système binaire, je forme l'expression transformée de la fonction $\frac{(n'-1)(r'-1)}{p'q'}$ ou ψ', que nous avons reconnue avoir une influence considérable sur les variations chromatiques du point oculaire final, page 95, § 45, et page 208, § 126. En y mettant pour n' r' leurs valeurs en ω, puis remarquant que le dénominateur $p'q'$ est égal à $n'r'-1$ ou $\omega-1$, on trouve premièrement

$$n'-1=\frac{\mu_2(1-\omega)}{\mu_1\omega-\mu_2},\qquad r'-1=-\frac{\mu_2(1-\omega)}{\mu_1-\mu_2},\qquad p'q'=\omega-1,$$

de là on tire

$$\psi'=\frac{\mu_1\mu_2(1-\omega)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1\omega-\mu_2)},$$

expression qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\psi'=-\left(\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}+\frac{\mu_1\omega}{\mu_2-\mu_1\omega}\right).$$

Les deux termes compris sous la parenthèse sont individuellement positifs, parce que μ_1 surpasse μ_2, et que $\mu_2-\mu_1\omega$ est positif. La fonction ψ' tout entière sera donc négative, comme nous l'avons trouvée effectivement dans tous les oculaires que nous avons analysés. Pour prévoir l'ordre de ses valeurs numériques, j'y substitue pour μ_1 et μ_2, nos évaluations moyennes

$$\mu_1=0{,}5,\qquad \mu_2=0{,}2,$$

et il en résulte

$$\psi' = -\left(\frac{5}{3} + \frac{\omega}{0,4 - \omega}\right).$$

Si l'on prenait $\omega = 0,1$, le second membre deviendrait -2. C'est aussi à très-peu près la valeur habituelle de ψ' dans les oculaires de Frauenhoffer, parce que ω y diffère ordinairement très-peu de 0,1. L'oculaire de Ramsden donne pour cette même fonction ψ', $-2,37$, celui de Dollond $-2,02$; on voit combien ces résultats s'écartent peu de notre évaluation moyenne. Mais nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet quand nous aurons fixé définitivement les limites de l'indéterminée ω.

159. J'arrive maintenant à la formation du second système binaire ; et je remarque d'abord que le coefficient p'' se trouvera déterminé en fonction des éléments du système antérieur par ce que j'ai appelé la condition de continuité, c'est-à-dire, par la concordance qui doit exister entre eux, afin que l'instrument total ajusté pour un observateur infiniment presbyte produise le grossissement angulaire N. En effet, l'équation qui exprime cette concordance est celle que nous avons nommée (3), dans la page 73, § 36, et, lorsqu'on en chasse le coefficient N'' par sa valeur en D et N, comme nous l'avons fait alors, elle se change dans la suivante

$$(3) \qquad p'' = -\frac{N}{\Delta'}(n' + p'D).$$

Déjà, dans le § 150, page 237, nous avons obtenu l'expression transformée de la fonction renfermée ici dans les parenthèses. En l'employant, on aura

$$(3) \qquad p'' = \frac{N(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \Delta'}\left(m + \frac{\mu_1 \omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega}\right).$$

Nous voulons spécialement préparer l'appareil pour des positions antérieures de l'image objective. Plaçons-nous d'abord

dans cette condition; alors m sera positif. La petitesse convenue de l'indéterminée positive ω rendra pareillement positif le terme qui la contient entre les parenthèses. Le facteur que ce signe embrasse aura donc ses deux termes positifs individuellement. Dans le coefficient extérieur, tous les facteurs sont aussi positifs, excepté Δ'; car N doit être supposé positif, puisque nous voulons que l'instrument donne des images droites des objets. Le signe négatif de Δ' se communiquera donc à tout le second membre, et il en résultera pour p'' une valeur négative comme nous l'avions effectivement reconnue nécessaire pour le genre d'oculaire que nous considérons, page 79, § 39.

160. Ceci ayant lieu, et la relation de continuité se trouvant satisfaite, sous sa première ou sous sa nouvelle forme, pour une certaine valeur positive de D, associée à celle pareillement positive de N qui y correspond, je suppose qu'on augmente quelque peu l'intervalle h_3 des deux systèmes binaires, comme on le fait dans les lunettes polyaldes pour accroître la force du grossissement. Alors, si l'on veut ramener l'instrument dans les conditions convenables à un observateur infiniment presbyte, comme nous l'admettons ici dans tous nos calculs, on sera obligé de rapprocher tout l'oculaire de l'image objective. Et, quand on l'aura replacé ainsi comme il doit l'être, le grossissement se trouvera augmenté. La simultanéité de ces deux résultats que l'expérience constate, se lit clairement dans l'équation de continuité (3), que je viens de rappeler. En effet, considérons-la d'abord sous sa première forme, où la distance D s'y trouve explicitement. Les lettres n', p', p'', qu'elle contient, représentent des coefficients principaux, appartenant aux sys-

tèmes binaires qui composent l'oculaire total. Ces coefficients, dans chaque système, s'expriment uniquement par les éléments fixes qui le constituent, c'est-à-dire, par les distances focales principales de ses deux lentilles, et par l'intervalle compris entre elles. Ils sont ainsi indépendants de l'intervalle h_3 intermédiaire entre les deux systèmes, et restent constants quand on le fait varier. Δ' qui représente la distance focale actuelle du système objectif est aussi constante. D'après cela, D et N sont les deux seuls éléments de l'équation (3) qui peuvent changer de valeur quand h_3 varie; et leurs changements doivent toujours se correspondre entre eux, de manière que les deux facteurs où ils se trouvent, étant multipliés l'un par l'autre, forment constamment le même produit fixe p''. Ceci reconnu, supposons l'équation satisfaite pour une certaine valeur positive de D, associée à une valeur également positive de N, ce qui exprimera la position spécialement antérieure de l'image objective pour laquelle nous voulons préparer notre instrument, et aussi le sens des images que nous désirons qu'il produise. Alors, si nous augmentons quelque peu l'intervalle h_3, et que l'instrument soit encore applicable à un observateur infiniment presbyte, je dis que le grossissement N augmentera. Car sa valeur est toujours liée à celle de h_3 par la seconde des équations que nous avons appelées (2) dans la page 69, § 34. Et, lorsqu'on met dans cette équation pour P'' la valeur $-\frac{N}{\Delta'}$ qui convient au cas d'un observateur infiniment presbyte, elle donne (2)

$$N = -\Delta'(p'n'' + r'p'' + p'p''h_3).$$

Le facteur compris entre les parenthèses a tous ses termes

individuellement positifs, à cause du caractère négatif que nous donnons à tous les coefficients principaux qui le constituent. Le facteur extérieur $-\Delta'$ est pareillement positif. Ainsi, dans une telle constitution de l'instrument, le premier membre N devra croître et décroître simultanément avec l'intervalle h_3, en restant toujours positif comme lui. Il n'y aurait aucune limite à cette simultanéité de variation, si la relation précédente entre N et h_3 existait seule. Mais elle doit s'accorder avec l'autre équation (2) qui lui est associée dans le même paragraphe 34, page 69, et que l'on peut suppléer par l'équation (3) qui s'y trouve aussi mentionnée, puisque celle-ci se déduit de leur combinaison en éliminant h_3. Or, cette équation (3) à son tour n'est autre que celle que j'ai rappelée tout à l'heure sous la même indication dans la page 246. Car on lui donne cette nouvelle forme en y remplaçant N'' par sa valeur équivalente $\frac{ND}{\Delta'}$, comme nous l'avons fait page 73, § 36. Maintenant, lorsqu'on la considère ainsi modifiée, on voit que si N positif augmente, $+D$ doit décroître, pour que l'affaiblissement numérique du facteur qui contient cette lettre, compense l'accroissement positif de N dans l'autre facteur, en sorte que leur multiplication mutuelle reproduise toujours le coefficient p'', qui est négatif et invariable. Réciproquement, si c'est $+D$ que l'on fait décroître, N devra augmenter pour que la restitution de p'' s'opère, et que l'équation continue d'être satisfaite avec la même valeur fixe attribuée à ce coefficient. Cette restitution pourra encore s'opérer ainsi, par des valeurs positives de N, si l'on va jusqu'à rendre D nul, ce qui mettra l'image objective dans le plan de la première lentille oculaire A_2, puisque le facteur

compris sous la parenthèse conservera alors son signe négatif, comme précédemment. Et cette possibilité subsistera même pour des valeurs négatives de D, qui rendront cette image postérieure à A_2, pourvu que ces valeurs, d'où p' D résulte positif, ne le grandissent pas jusqu'au point de surpasser le coefficient négatif n'. Car si ce dernier cas avait lieu, le signe du facteur compris entre les parenthèses, se trouvant interverti et devenu positif, il faudrait que le grossissement N pût aussi changer de signe et devenir négatif, pour que la restitution de p'' continuât de s'effectuer. Mais, comme N ne peut être que positif, d'après son expression en h_3, dans la constitution d'oculaire que nous admettons, l'accord de ces deux conditions y deviendrait impossible. C'est-à-dire que, dans ces positions de l'image objective, trop postérieures à la lentille A_2, nos deux systèmes binaires étant affectés des signes que nous attribuons à leurs coefficients, les pinceaux réfractés par le premier d'entre eux, ne pourraient plus être transformés par le second en faisceaux émergents, qui eussent autour de l'axe central des inclinaisons de même sens que les axes des pinceaux incidents dont ils dérivent. La raison physique de cette impossibilité se conçoit aisément, si l'on fait attention qu'elle a lieu pour toutes les valeurs négatives de D, qui rendent $n'+p'$ D, une quantité positive. En effet, de telles valeurs étant associées à r' négatif, rendront évidemment positive l'expression de Δ_3, qui est, d'après la page 196, généralement,

$$\Delta_3 = \frac{q'+r'\mathrm{D}}{n'+p'\mathrm{D}},$$

c'est-à-dire que le premier système binaire appliqué à l'image objective ainsi placée, formera son foyer antérieurement à la lentille A_3, et non plus postérieurement. Or, les coefficients

n'' et p'' du second système binaire étant tous négatifs, sa distance focale réciproque $-\frac{n''}{p''}$ sera comme précédemment négative, c'est-à-dire postérieure à la lentille A_4. Il deviendra donc alors physiquement impossible de mettre ces deux plans focaux en coïncidence, comme cela est nécessaire pour que les pinceaux transmis par l'appareil sortent du second système sous forme de faisceaux. Aussi la condition de cette coïncidence qui est analytiquement

$$h_3 = -\Delta_3 - \frac{n''}{p''},$$

ne pourrait plus être satisfaite avec des valeurs positives de h_3, mais avec des négatives qui sont physiquement inadmissibles, puisqu'elles intervertiraient l'ordre de position attribué aux deux systèmes partiels, ou les feraient se pénétrer mutuellement.

161. Les mêmes phases de phénomènes doivent nécessairement s'opérer dans l'équation (3) après la transformation analytique que nous lui avons fait subir, page 246; et elles s'y produisent effectivement de la même manière par les variations de N, combinées avec celle de l'indéterminée m qui remplace D. Pour s'en convaincre, il faut remarquer que l'indéterminée ω, qui représente le produit $n'r'$, est invariable comme les facteurs qui la composent, lesquels sont des coefficients propres au système binaire antérieur, que les variations de D et de h_3 ne changent pas. Cette constance a lieu aussi pour les facteurs qui contiennent μ_1 et μ_2, parce que ces dernières quantités n'y entrent que par leur rapport $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, lequel est uniquement fonction de n' et de r', d'après la relation

$$\mu_2(r' - 1) + \mu_1(n' - 1)r' = 0,$$

qui est immédiatement résultée de leur introduction, page 232. L'équation (3) transformée ne pourra donc être satisfaite pour des valeurs négatives de m, associées à N positif, qu'autant que ces valeurs ne surpasseront pas le terme positif $\frac{\mu_1\omega}{\mu_2 - \mu_1\omega}$ qui accompagne m entre les parenthèses. Et, comme la relation de N avec h_3 ne lui permet pas de devenir négatif, d'après l'identité de signe que nous avons donnée à tous les coefficients principaux de nos systèmes partiels, on voit que l'impossibilité de reproduire p'' avec une telle construction, commencera quand le facteur qui contient la variable positive ou négative m deviendra nul, c'est-à-dire, quand on aura

$$m + \frac{\mu_1\omega}{\mu_2 - \mu_1\omega} = 0.$$

Or, en adoptant les valeurs moyennes $\mu_1 = 0{,}5$, et $\mu_2 = 0{,}2$, dont nous avons reconnu qu'on ne doit jamais que très-peu s'écarter, cette équation devient

$$m + \frac{\omega}{\frac{2}{5} - \omega} = 0.$$

162. Déjà, en employant ces mêmes moyennes, page 245, § 157, nous avions vu que, pour donner aux coefficients n' et r' le caractère négatif que nous voulons leur attribuer, il fallait que la valeur de l'indéterminée positive ω fût maintenue au-dessous de $\frac{2}{5}$ ou 0,4. Ici la même limite nous est de nouveau indiquée par un motif encore plus puissant. Car si ω positif était fait plus grand que 0,4, le terme en ω qui accompagne m devenant négatif, et très-grand d'abord, il surpasserait toutes les valeurs positives de m que l'on peut raisonnablement admettre, puisqu'elles doivent toujours être moindres que 1. Son signe négatif se communiquerait

donc au facteur entier qui contient m dans l'équation (3) transformée; et alors l'instrument deviendrait impossible, même pour les valeurs positives de m, à plus forte raison pour les négatives. Mais en faisant ω moindre que 0,4, plus on l'élèvera au-dessus de zéro, si l'on ne trouve pas d'inconvénient à le faire, et plus on accroîtra la possibilité de l'instrument pour des valeurs négatives de m, c'est-à-dire pour des positions de l'image objective postérieures à la lentille A_1; et même, si l'on veut se borner à des valeurs positives de m, il conviendra encore d'élever ainsi ω pour accroître la stabilité de l'instrument, en éloignant les conditions de l'inversion, surtout si l'on a donné à m une petite valeur. Aussi dans l'oculaire de Ramsden, qui est préparé pour une position fixe et antérieure de l'image objective, la valeur de m étant à peine supérieure à $+\frac{1}{4}$, celle de ω se trouve élevée jusqu'à 0,153. Mais dans ceux de Frauenhoffer où m a généralement une valeur positive plus forte, peu différente de 0,4, une valeur moindre de ω a pu suffire; ce qui facilite l'établissement de l'achromatisme, comme nous l'avons remarqué. Aussi cette indéterminée s'y trouve-t-elle habituellement restreinte à des valeurs peu différentes de 0,108. Frauenhoffer s'est écarté une seule fois de cette règle dans son oculaire n° 1, où la valeur de ω est bien plus petite et seulement égale à 0,05. Aussi, par compensation, celle de m y est plus grande et presque égale à $\frac{1}{2}$, ce qui éloigne davantage l'image objective en avant de la première lentille A_1, et retarde de même la possibilité de l'inversion. Mais alors les pinceaux émanés de cette image arrivent à la lentille plus épanouis, ce qui augmente la difficulté de leur concentration chromatique en un

même foyer ; et aussi cet oculaire a-t-il été trouvé moins bon que les autres. La même disposition existe dans l'oculaire polyalde de Dollond ; car ω n'y a pareillement qu'une très-petite valeur 0,089, tandis que m s'y trouve porté presque jusqu'à $\frac{1}{2}$ pour le moindre grossissement. Mais la faiblesse de ω a encore plus d'inconvénient dans cet appareil que dans ceux que je viens de mentionner, parce que le plus fort grossissement y est obtenu en rendant l'image objective ultérieure à la lentille A_1 ; ce qui fait alors m négatif, et rapproche trop l'instrument de sa limite d'inversion. Aussi l'artiste n'a-t-il pu le rendre supportable vers cette extrémité de sa course qu'en ne lui permettant d'embrasser qu'un champ excessivement restreint.

163. La discussion précédente nous a montré que la valeur positive attribuée à l'indéterminée ω doit toujours être fort au-dessous de 0,4, mais elle ne nous indique pas le terme auquel cet abaissement doit s'arrêter. Nous allons le déduire d'une autre considération qui lui fixera d'étroites limites.

Je la fonde sur la grandeur absolue qu'il convient de donner à la quantité négative H, laquelle représente la distance du point oculaire de l'instrument total au delà de la dernière oculaire A_5. Nous avons trouvé page 85 que, pour un observateur infiniment presbyte, l'expression générale de cette quantité est

$$H = \frac{r''}{p''} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N} + \frac{\Delta'}{N^2}.$$

Nous avons reconnu en outre, en la discutant alors, que son signe négatif sera toujours assuré par la convention que nous avons faite de donner au coefficient numérique r'' une très-

petite valeur, et de rendre p'' de même signe que p', conséquemment négatif, ce que nous venons de réaliser.

Ces particularités étant admises, examinons successivement les différents termes qui composent H, et cherchons à prévoir la part que chacun d'eux aura dans la formation de sa grandeur absolue. Pour cela, je rappelle qu'en discutant les diverses constructions d'oculaires réalisées par les plus habiles artistes, nous avons reconnu, page 239, qu'en général la proportion la plus convenable à établir entre $-\Delta'$ et N, consistait à prendre 21^{mm} de longueur focale pour chaque unité de grossissement, ce qui donne le rapport $\frac{\Delta'}{N}$ égal à -21^{mm}; et nous avons remarqué aussi qu'on ne devait s'écarter de cette moyenne qu'entre des limites très-étroites, ou pour des circonstances tout exceptionnelles. Employant donc ce résultat comme un élément général d'évaluation très-approchée, le dernier terme de H, qui est $\frac{\Delta'}{N^2}$, deviendra $-\frac{21^{mm}}{N}$, de sorte que sa valeur absolue sera $-2^{mm},1$ pour $N = +10$; $-1^{mm},05$ pour $N = +20$; et se réduira à une fraction de millimètre pour tous les grossissements plus forts. Le terme précédent $\frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}$, étant évalué avec la même moyenne, devient $-21^{mm}\frac{p'}{p''}$, de sorte que sa valeur absolue dépend de celle qu'on donnera au rapport $\frac{p'}{p''}$, dont nous avons seulement jusqu'ici assuré le signe positif; et, d'après la convention faite de donner au coefficient r'' une très-petite valeur, on voit que ce terme sera le plus considérable des trois qui composent H. Or, si nous supposions $\frac{p'}{p''}$ égal $+1$, sa valeur deviendrait -21^{mm}; et elle égalerait presque à elle seule la longueur qu'il convient

de donner à H, afin de ne pas éloigner l'œil de la dernière lentille d'une manière incommode pour l'usage de l'instrument. Mais cette distance s'accroîtra encore si nous rendons le coefficient r'' positif, comme nous avons reconnu qu'il serait avantageux de le faire. Car alors, p'' étant négatif, le rapport $\frac{r''}{p''}$ le sera aussi; et sa valeur, quelque petite qu'elle soit, se joindra au troisième terme de H, pour augmenter analytiquement celui que nous considérons. Il deviendrait donc nécessaire, dans un tel cas, de faire r'' négatif, pour que $\frac{r''}{p''}$ devenant positif, son opposition aux deux autres termes de H, ramène cette quantité à une limite convenable de longueur. C'est précisément ce qui a lieu dans l'oculaire de Ramsden. Car le rapport $\frac{\Delta'}{N}$, s'y trouvant élevé jusqu'à $-29,58$, et $\frac{p'}{p''}$ y étant $+0,885937$, c'est-à-dire peu inférieur à l'unité, le terme $\frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}$ y devient $-26^{mm},31$; de sorte que, pour le réduire, r'' a été rendu négatif, et $\frac{r''}{p''}$ a été fait égal à $+6^{mm},74$. Avec cette réduction, la valeur totale de H, y compris son dernier terme, se trouve être $-20^{mm},572$; et la position de l'œilleton qui oblige l'œil à se rapprocher de $5^{mm},908$ vers la dernière lentille, l'en maintient encore éloigné de $14^{mm},664$, ce qui rentre dans les limites de distance que l'usage a fait adopter. Mais il y a toujours de l'inconvénient à établir ainsi la limitation des résultats physiques, par l'opposition de signe des termes qui les composent, parce que les bornes auxquelles on veut les restreindre, en deviennent moins stables, étant plus facilement déplacées par les erreurs

que l'on peut commettre dans l'exécution de leurs éléments. Aussi presque tous les oculaires de Frauenhoffer sont-ils disposés de manière que r'' s'y trouve positif, conséquemment $\frac{r''}{p''}$ négatif, comme les deux termes suivants de H. Et la possibilité de l'avoir tel, sans trop agrandir H, résulte de deux précautions fort simples, qui toutes deux conspirent pour affaiblir le terme principal $\frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}$. La première consiste à donner au rapport $-\frac{\Delta'}{N}$ une valeur moindre que celle de Ramsden et peu différente en général de 21^{mm}; ce qui a encore l'avantage de rendre tout l'instrument plus court pour une même puissance de grossissement. La deuxième, c'est de donner au rapport $\frac{p'}{p''}$ une valeur fractionnaire plus faible que ne l'a fait Ramsden, ou ce qui revient au même, de faire son inverse $\frac{p''}{p'}$ plus fort. En effet, dans la lunette de Padoue, je trouve ce dernier rapport égal à 1,112875, d'où résulte $\frac{p'}{p''}$ égal à 0,88537. Tandis que, dans les meilleurs oculaires de Frauenhoffer $\frac{p''}{p'}$ oscille, avec des écarts à peine sensibles, autour d'une moyenne qui est 1,53482; d'où résulte $\frac{p'}{p''}$ égal à 0,65154, ce qui affaiblit bien davantage le terme de H, auquel ce facteur est appliqué. Par ce double artifice la valeur totale de H se trouve ramenée dans les limites de grandeur convenable, malgré l'identité de signe de ses trois termes. Un seul des oculaires de Frauenhoffer, le n° 1, s'écarte notablement de la moyenne que je viens d'énoncer. La valeur de $\frac{p''}{p'}$ y est plus faible, et seulement égale à

1,156993, ce qui se rapproche du nombre de Ramsden. Mais j'ai déjà fait remarquer que cet oculaire n° 1 présente plusieurs dispositions exceptionnelles que le succès ne confirme pas. Dans l'oculaire polyalde de Dollond, au contraire, le rapport $\frac{p''}{p'}$ est beaucoup plus fort que la moyenne de Frauenhoffer. Il s'élève à 2,0362, ce qui, renversé, donne $\frac{p'}{p''}$ égal à 0,4911. Alors l'affaiblissement de ce dernier facteur se communique au produit $\frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}$. En outre, le rapport $\frac{\Delta'}{N}$ se trouve aussi abaissé bien au-dessous de sa valeur moyenne et habituelle, quand on le calcule avec la distance focale $\Delta' = -324,84$, et les grossissements 20 ou 60, pour lesquels cet oculaire était primitivement destiné. Le concours de ces deux circonstances affaiblissant le terme principal de H, a permis que le premier, $\frac{r''}{p''}$, fût pareillement négatif, sans que l'expression entière sortît des limites d'étendue convenables pour une distance focale aussi courte que celle-là. En effet, en les réduisant en nombres, avec les données précédentes par la formule que j'ai tout à l'heure rappelée, je trouve $H = -11^{mm},697$ pour le plus faible grossissement $N = 20$; et $H = -5^{mm},358$ pour le plus fort $N = 60$. Ces valeurs sont toutes deux bien plus restreintes que celles qu'on admet d'ordinaire dans des instruments d'une plus grande longueur; et peut-être même le sont-elles trop pour que la surface antérieure de l'œil puisse s'approcher physiquement de la dernière lentille oculaire autant qu'elles l'exigent.

164. Il résulte de ceci que, dans les systèmes d'oculaires que nous considérons, le rapport $\frac{p'}{p''}$ doit toujours être une

fraction positive de l'unité, ce qui exige $-p''$ plus grand que $-p'$. On voit en outre que c'est ce rapport qui détermine principalement la distance du point oculaire final au delà de la dernière lentille A_5, quand la valeur de $\frac{\Delta'}{N}$ est fixée. Il convient donc de le régler, dans chaque cas spécial, de manière que cette distance exprimée par H soit appropriée à la longueur de l'instrument que l'on veut construire. L'accomplissement de ces conditions va précisément nous fournir des caractères analytiques et numériques, pour découvrir les limites de grandeur auxquelles il faut restreindre l'indéterminée ω ou $n'r'$ dans nos appareils, lorsqu'on a fixé les valeurs des quantités μ_1, μ_2 et m, qui doivent s'y associer.

165. Pour cela je reprends les expressions transformées de p' et de p'', celle-ci dans la page 246, l'autre dans notre tableau de la page 234. Ce sont :

$$p' = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \Delta'}\left(\mu_1 N - m\right), \qquad p'' = \frac{N(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \Delta'}\left(m + \frac{\mu_1 \omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega}\right);$$

divisant la seconde par la première, je mets le quotient sous cette forme

$$\frac{p''}{p'} = \frac{\mu_1 N}{(\mu_1 N - m)}\left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{\omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega}\right),$$

on connaît toujours la longueur focale objective Δ' de l'instrument que l'on veut construire, ainsi que le grossissement angulaire N que l'on veut y attacher. Avec ces données, on peut déterminer la valeur qu'il faut donner au rapport $\frac{p'}{p''}$, conséquemment à son inverse $\frac{p''}{p'}$, pour que la distance H se trouve contenue dans des limites convenables de grandeur.

On aura dû choisir aussi les valeurs des constantes m, μ_1, μ_2, d'après les considérations exposées plus haut; et, soit qu'on adopte les moyennes que nous leur avons attribuées, soit qu'on les en écarte dans les petites amplitudes d'oscillations dont elles sont susceptibles, elles seront connues en nombres. Alors, dans l'équation que nous venons de former, tout sera aussi connu, excepté ω, et l'on pourra l'en déduire. A la vérité, la valeur ainsi obtenue ne peut être admise qu'autant qu'elle sera positive, et beaucoup moindre que 0,4. Mais cette condition se trouvera toujours remplie quand les autres éléments numériques de l'équation auront été pris peu différents des valeurs moyennes que le raisonnement et l'expérience nous ont fait leur assigner.

166. Quoique le grossissement absolu N entre explicitement dans l'expression de ω, il n'influe en réalité sur sa valeur que pour une proportion très-petite et le plus souvent insensible. En effet, m doit être toujours une fraction positive généralement moindre que $\frac{1}{2}$; et μ_1 a aussi une valeur positive qui doit tout au plus descendre jusqu'à cette limite; tandis que N, au contraire, est toujours un multiple plus ou moins considérable de l'unité. D'après cela, dans toutes les applications, le facteur extérieur $\frac{\mu_1 N}{\mu_1 N - m}$, ou $\frac{N}{N - \frac{m}{\mu_1}}$ diffère extrêmement peu de $+1$; et le facteur intérieur aux parenthèses détermine presque seul l'égalité avec $\frac{p''}{p'}$. Si donc on s'impose, pour la généralité des constructions, une certaine valeur de $\frac{\Delta'}{N}$ de laquelle on doive très-peu s'écarter, et

que l'on fixe ensuite celle de $\frac{p''}{p'}$ qu'il convient d'y associer dans H, il suffira de déterminer ω de manière que l'égalité demandée ait lieu par la seule influence du facteur intérieur aux parenthèses. Car l'intervention de l'extérieur augmentera ensuite la valeur de $\frac{p''}{p'}$ dans une proportion si faible, que, quoiqu'un peu différente de la demandée, elle pourra s'employer avec un égal avantage. Alors cette même valeur de ω sera également applicable à tous les instruments qui auront cette même valeur du rapport $\frac{\Delta'}{N}$.

167. Par exemple, je prends comme éléments de construction les valeurs moyennes

$$m = 0,4, \qquad \mu_1 = 0,5, \qquad \mu_2 = 0,2.$$

Puis, adoptant pour $\frac{\Delta'}{N}$ des valeurs toujours peu différentes de 21^{mm}, comme le fait habituellement Frauenhoffer, je me propose de leur associer une valeur de $\frac{p''}{p'}$ qui soit pareillement peu différente de la moyenne 1,53482 qu'il a employée. Pour réduire celle-ci en nombres simples, comme nos autres éléments, je lui substitue la fraction contractée $\frac{898}{585}$, qui est à très-peu près équivalente; et, faisant abstraction du facteur $\frac{\mu_1 N}{\mu_1 N - m}$ qui est ici $\frac{N}{N - 0,8}$, je pose l'égalité

$$\frac{898}{585} = m + \frac{\mu_1 \omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega}.$$

Alors, mettant pour m, μ_1 et μ_2 leurs valeurs, il en résulte

$$\omega = \frac{43}{400} = 0,1075,$$

puis après

$$\frac{p''}{p'} = \frac{898}{585} \cdot \frac{N}{(N - 0,8)}.$$

Ces deux déterminations s'associeront très-convenablement aux valeurs précédentes de m, μ_1 et μ_2, tant qu'on s'écartera peu de celle de 21^{mm}, attribuée comme moyenne à $\frac{\Delta'}{N}$. Le nombre trouvé ici pour ω, coïncide aussi presque exactement avec la moyenne des valeurs que Frauenhoffer lui assigne, comme cela devait naturellement résulter de la concordance des données dont il est déduit.

168. Les évaluations que nous venons d'obtenir, étant substituées dans le tableau algébrique de la page 234, conjointement avec celles que nous avions déjà adoptées pour m, μ_1 et μ_2, on aura tous les éléments numériques d'un premier système binaire qui pourra servir de type moyen pour la construction des oculaires quadruples, et dans lequel les valeurs absolues de Δ' et de N resteront seules à assigner pour chaque cas particulier d'application. Ces résultats sont rassemblés dans la troisième et la quatrième colonne du tableau général placé à la fin de ce mémoire, et ils y sont mis en regard des expressions algébriques qui y correspondent. On a joint à tous les nombres leurs logarithmes pour préparer leur emploi. Enfin on y a compris l'expression, et la valeur numérique, du rapport $\frac{p''}{p'}$ que nous n'avions pas déterminé encore quand nous formâmes le tableau de la page 234.

169. Les diverses conditions de nécessité ou de convenance que nous venons successivement d'introduire, ne laissent donc plus à connaître que les deux coefficients principaux

n'' et q'', ou n'' et r'', qui, associés à la valeur déjà fixée de p'', achèveront de constituer le système binaire postérieur. Jusqu'ici nous avons seulement astreint ces deux derniers éléments à des conditions de grandeur relative, et de signes propres, qu'il faudra y réaliser. Nous allons maintenant profiter de ce qui leur reste d'indétermination pour faire participer les deux dernières lentilles dans une proportion égale à la production du grossissement total N; et pour obtenir en outre que l'instrument entier, ainsi complété, satisfasse à l'équation de l'achromatisme en produisant ce même grossissement précis, lorsque l'oculaire sera placé, relativement à l'image objective, dans la position qui lui est assignée par la valeur choisie de D ou de m.

170. D'après ce qui a été démontré page 188, § 108, la part du second système binaire, dans la production du grossissement N, est exprimée en somme, par l'équation

$$\frac{Q_4}{f_4}+\frac{Q_5}{f_5}=N-(n'+p'h_1).$$

Si l'on veut que les deux lentilles de ce système y coopèrent en égale proportion, il faudra que le terme qui est propre à chacune d'elles, dans le premier membre, soit égal à la moitié du second; c'est-à-dire que l'on ait, par exemple,

$$(e) \qquad \frac{Q_4}{f_4}=\frac{1}{2}\left[N-(n'+p'h_1)\right].$$

Et toute addition, ou soustraction, faite à cette moitié, pour la lentille A_4, se reportera, en sens contraire, sur la lentille A_5, puisque la somme de leurs effets doit toujours reproduire la quantité entière $N-(n'+p'h_1)$. Pour simplifier cette expression de Q_4, je fais :

$$Ns'=-(n'+p'h_1),$$

s' étant une nouvelle indéterminée. Alors, dans le cas d'une exacte égalité de partage, on devra avoir

$$\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{2} N(1 + s').$$

Or, en introduisant la même abréviation pour $n' + p'h_1$ dans l'expression explicite de $\frac{Q_4}{f_4}$, rapportée à la troisième ligne du tableau de la page 187, elle devient

$$\frac{Q_4}{f_4} = \frac{N(r'' - 1)(1 + n''s')}{p''q''};$$

ceci, étant égalé à l'expression précédente de $\frac{Q_4}{f_4}$, qui exprime l'égalité de partage, N disparaît, et il reste, entre les éléments des deux systèmes binaires, la relation unique;

$$(e) \qquad \frac{(r'' - 1)(1 + n''s')}{p''q''} = \frac{1}{2}(1 + s').$$

Avant d'aller plus loin il sera utile d'examiner la composition analytique de cette nouvelle auxiliaire s' que nous venons d'introduire, et de fixer la nature ainsi que les limites de ses valeurs.

Pour cela je prends dans notre tableau de la page 234 les expressions transformées de p', et de h_1; puis, les multipliant l'une par l'autre, après avoir éliminé f_2 de la seconde par son expression propre, il en résulte

$$p'h_1 = -(\mu_1 - \mu_2)N.$$

Ceci étant substitué dans l'expression de Ns', et dans l'équation de condition qui lie $\frac{Q_4}{f_4}$ à $\frac{Q_5}{f_5}$, on en déduit rigoureusement

$$s' = \mu_1 - \mu_2 - \frac{n'}{N}; \qquad \frac{Q_4}{f_4} + \frac{Q_5}{f_5} = N(1 + \mu_1 - \mu_2) - n'.$$

D'après les motifs de convenance exposés plus haut, $\mu_1 - \mu_2$

devra toujours être une quantité extrêmement peu supérieure ou inférieure à $+0,3$. Quant au terme suivant de s', son numérateur $-n'$ sera toujours une fraction positive peu différente de $0,2$; et son dénominateur N est au contraire un multiple plus ou moins considérable de l'unité. Ce second terme ne formera donc qu'une très-petite portion de la valeur de s'. Conséquemment, si nous réalisons l'équation (e), en le négligeant, la relation qui en résultera entre les coefficients principaux du second système binaire, ne donnera plus aux deux lentilles A_4, A_5 une part de grossissement rigoureusement égale, mais seulement très-peu différente de l'égalité. Or, une telle approximation suffit très-bien pour la préparation de ces lentilles. Nous pouvons ainsi, sans aucun inconvénient quelconque, adopter la simplification analytique qui la produit, c'est-à-dire réduire s' à son premier terme $\mu_1 - \mu_2$, en résolvant l'équation (e); puis lui donner cette même valeur dans $\frac{Q_4}{f_4}$. Ceci nous donnera d'abord, pour l'égalité de partage approximative,

$$\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{2}N(1 + \mu_1 - \mu_2),$$

et ensuite, rigoureusement :

$$\frac{Q_5}{f_5} = N(1 + \mu_1 - \mu_2) - \frac{Q_4}{f_4} - n' = \frac{1}{2}N(1 + \mu_1 - \mu_2) - n'.$$

171. Il ne reste plus qu'à combiner cette égalité de répartition approximative avec la condition de la dispersion rectiligne des foyers dans l'instrument total; laquelle, réduite à ce qu'elle a de plus essentiel, est exprimée par l'équation (C)' de la page 135. Or, si l'on suppose dans cette équation le système binaire antérieur déterminé, ainsi que la valeur du coefficient p'' qui en dérive, on voit que le système postérieur

y entre seulement par les quantités n'' et $\frac{\varpi''}{p''}$ ou ψ''. Et, même d'après les dispositions générales que nous adoptons, cette dernière surtout y aura une influence sensible, parce que la petitesse propre du coefficient n'' se trouve encore atténuée par celle du coefficient n' qui le multiplie. Nous avons reconnu en outre qu'il convient de rendre la quantité ψ'' négative et de peu supérieure à -1, dans ce sens-là. Je l'introduis donc ici sous cette forme, en la représentant par $-(1+u'')$, u'' étant une petite quantité indéterminée; et, l'associant à l'équation en s' qui établit l'égalité de répartition entre les deux dernières lentilles, j'ai simultanément

$$\frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''}=-(1+u''); \qquad \frac{(r''-1)(1+n''s')}{p''q''}=\frac{1}{2}(1+s').$$

A quoi il faut toujours joindre la relation générale

$$n''r''-p''q''=1.$$

En se servant d'abord de celle-ci pour chasser $p''q''$ des deux premières équations, elles déterminent les deux coefficients numériques n'' et r'', en fonction de u'' et de s'; reprenant ensuite la troisième, elle détermine q'' en fonction de p'', et de ces mêmes quantités. On trouve ainsi :

$$n''=-\frac{(1+2u''-s')}{1+(3+2u'')s'},$$

$$r''=\frac{1-(1+2u'')s'}{3+2u''+s'},$$

$$q''=-\frac{4(1+u'')(1+s')^2}{p''[1+(3+2u'')s'][3+2u''+s']}.$$

Je tire de là tout de suite la fonction de $\frac{n''}{p''q''}$, que nous aurons besoin de considérer tout à l'heure; et, après l'avoir formée, j'en déduis

$$\frac{n''}{p''}=\left[\frac{1+u''}{(1+s')^2}-\frac{1}{4(1+u'')}\right]q''.$$

172. Dans ces expressions, s', devenu égal à $\mu_1 - \mu_2$, est une fraction positive extrêmement peu inférieure ou supérieure à 0,3; quant à u'', pour que son emploi soit d'un bon usage, ce devra être aussi une quantité positive dont les moindres valeurs seront de ce même ordre, et dont les plus grandes surpasseront peu l'unité. Nous avons en effet reconnu, page 93, § 45, que ces conditions sont nécessaires pour que $-(1+u'')$ ou ψ'' balance suffisamment ψ' dans les variations chromatiques de H. En les supposant remplies, il en résultera n'' toujours négatif, et r'' positif ou négatif, selon la grandeur de u'', mais néanmoins toujours fort petit, ce qui constitue les deux caractères généraux que nous désirions donner à ces coefficients. Enfin, q'' se trouvera toujours évidemment positif, puisque p'' a été fait négatif; et ceci était encore une condition nécessaire à remplir, puisque q'' représente l'intervalle h_4 des deux dernières lentilles A_4, A_5.

173. Considérons maintenant la quantité $\frac{n''}{p''}$. Son expression nous montre qu'elle sera aussi essentiellement positive, si u'' est renfermé dans les limites que nous avons tout à l'heure énoncées. Or, $-\frac{n''}{p''}$ est la distance focale principale réciproque du second système binaire, comme on l'a vu page 205. Cette distance sera donc ici négative, c'est-à-dire, postérieure à la lentille A_4. Alors, pour adapter l'appareil à un observateur infiniment presbyte, il faudra que le second système binaire soit approché du premier à un intervalle tel que le plan focal actuel Δ_3 de celui-ci devienne postérieur à la lentille A_4 d'une quantité précisément égale à $\frac{n''}{p''}$. Cela exigera donc que $\frac{n''}{p''}$ soit moindre que la distance de ce plan focal à la lentille A_3, ou $-\Delta_3$. Mais cette condition sera toujours remplie par les élé-

ments que nous donneront les formules précédentes, quand on attribuera aux constantes qu'elles renferment des valeurs qui s'écarteront peu des moyennes que nous avons fixées.

Par ces dispositions, l'image qui devrait se former au foyer Δ_3 du premier système, ne se réalisera point, puisque les rayons qui la composeraient seront arrêtés par la lentille A_4 avant leur réunion. Cette image sera donc seulement virtuelle. Mais nous avons voulu, en effet, qu'il en fût ainsi; et elle est représentée comme telle en $S_3\Sigma_3$, dans la fig. 6, qui nous sert de type.

174. La distance focale réciproque $-\frac{n''}{p''}$ se trouve ici exprimée en q''; et, d'après la nature des valeurs que nous attribuons aux indéterminées u'', s', le facteur annexé à q'' dans le second membre, sera une fraction positive moindre que 1. Ainsi $\frac{n''}{p''}$ sera moindre que q'', c'est-à-dire que dans l'appropriation à un observateur infiniment presbyte, le foyer Δ_3 du premier système binaire tombera entre les deux lentilles du second. C'est encore une des circonstances que nous avions désiré d'établir.

175. Il reste donc uniquement à examiner si, en conservant toutes nos données précédentes, l'équation de l'achromatisme peut être satisfaite en donnant aux deux indéterminées s' et u'', des valeurs de l'ordre que nous venons d'indiquer. Pour cela je reprends cette équation, telle que nous l'avons obtenue page 135, § 77, en la réduisant à ses termes les plus essentiels. Elle est alors :

$$0=(n'-1)p''r'q'-p''q'\left[1+\frac{\varpi''}{p''}-n'\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]$$
$$+\left[n'+1+\frac{\varpi''}{p''}-r'\left\{2n'-1+n'\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)\right\}\right]N''. \qquad (C)'$$

En outre, d'après ce que nous avons trouvé alors page 136, si l'on suppose que son second membre désigné ici par C′ ne soit pas rendu tout à fait nul, il en résulterait dans N la variation chromatique correspondante

$$\delta N = \frac{\Delta'}{n'q'} C'\delta i.$$

Pour n'y employer que les mêmes éléments physiques dont nous avons fait usage dans ce qui précède, j'y remplacerai N″ par sa valeur en D, au moyen de la relation générale établie page 72

$$\frac{N''\Delta'}{N} = D.$$

Or, dans l'ensemble de formes définitives que nous avons données aux éléments du premier système binaire, page 234, nous avons fait :

$$D = -mf_{,} = -\frac{mq''}{r'-1};$$

il en résulte donc :

$$N'' = -\frac{mq'}{(r'-1)}\frac{N}{\Delta'}.$$

Cette expression de N″ étant substituée dans l'équation (C)′, q' disparaît comme facteur commun ; après quoi, en multipliant tous ses termes par $(r'-1)\frac{\Delta'}{N}$, elle devient,

$$0 = (n'-1)(r'-1)p''r'\frac{\Delta'}{N} - p''(r'-1)\frac{\Delta'}{N}\left[1+\frac{\varpi''}{p''} - n'\frac{p'}{p''}\left(1+n''\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]$$
$$-m\left[n' - 2n'r + r' + (1-n'r')\left(1+\frac{\varpi''}{p''}\right)\right]. \qquad (C)''$$

Alors, en désignant par C″ son second membre, sous cette nouvelle forme, s'il n'est pas rendu tout à fait nul, il en résultera la variation chromatique

$$\delta N = \frac{N}{n'(r'-1)} C''\delta i.$$

176. Je vais d'abord appliquer à cette équation les données numériques que nous avons établies comme type d'éléments moyens du système binaire antérieur, et qui sont rassemblées, avec cette désignation, dans le tableau général placé à la fin de ce mémoire. Cet exemple particulier nous fournira des indications très-utiles pour réaliser la même application dans toute sa généralité analytique, avec une simplicité que l'on ne soupçonnerait pas sans leur secours.

Pour opérer ainsi la transformation numérique des différents termes que l'équation contient, il n'est pas nécessaire d'assigner individuellement le rapport $\frac{\Delta'}{\mathrm{N}}$, parce que son association au facteur p'' exempte de cette détermination. En effet, d'après la page 246, l'expression générale de ce dernier coefficient est:

$$p'' = \frac{\mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \Delta'}\left(m + \frac{\mu_1 \omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega}\right),$$

d'où l'on tire

$$p'' \frac{\Delta'}{\mathrm{N}} = (\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{\omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega}\right).$$

Or, adoptant nos éléments moyens, on a, pages 244 et 261 :

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{3}{10}; \qquad \frac{m}{\mu_1} + \frac{\omega}{\mu_2 - \mu_1 \omega} = \frac{898}{585};$$

il en résulte donc

$$p'' \frac{\Delta'}{\mathrm{N}} = \frac{898}{1950}.$$

Un des termes de l'équation, déjà multiplié par n', se trouve avoir pour facteur le rapport $\frac{p'}{p''}$. Or, d'après notre tableau d'évaluations moyennes, on a, page 262 :

$$\frac{p'}{p''} = \frac{585}{898} \frac{(\mathrm{N} - 0{,}8)}{\mathrm{N}},$$

le coefficient qui renferme N différera toujours extrêmement peu de l'unité. On peut donc, en toute sécurité, négliger cette différence dans le produit par $-n'$, qui est lui-même une fraction dont la valeur s'écarte toujours très-peu de $\frac{1}{4}$, et se trouve ici égale à $\frac{129}{585}$. On aura alors

$$n'\frac{p'}{p''} = -\frac{129}{585}\cdot\frac{585}{898} = -\frac{129}{898}.$$

Tous les autres coefficients de l'équation sont purement numériques et peuvent se prendre immédiatement dans notre tableau, à l'exception de n'' et $\frac{\varpi''}{p''}$ ou ψ'', qui appartiennent au second système binaire que nous cherchons ici à déterminer. Substituant donc tous ceux qui sont relatifs au premier système, j'obtiens l'équation numérique suivante, dans laquelle seulement $\frac{\varpi''}{p''}$ ou ψ'' a été remplacé par l'expression transformée $-(1+u'')$ que nous lui avons substituée page 266, § 171.

$$0 = -0{,}4075826 + 0{,}6850128[-u'' + 0{,}1436522 - 0{,}1436522n''(1+u'')] + 0{,}3692051 + 0{,}35700u''$$

ou, en réduisant :

$$0 = -0{,}0383775 + 0{,}6850128[-u'' + 0{,}1436522 - 0{,}1436522n''(1+u'')] + 0{,}35700u''$$

La valeur de n' doit être calculée d'après son expression en u'' et s', qui, d'après la page 266, est :

$$n'' = -\frac{(1 + 2u'' - s')}{1 + (3 + 2u'')s'},$$

dans laquelle s' doit être fait égal à $\mu_1 - \mu_2$ ou 0,3, pour donner aux deux dernières lentilles A_4, A_5, une part sensiblement égale dans la production du grossissement angulaire N, comme nous l'avons reconnu à la fin du § 170, page 265. Supposant donc n'' éliminé par cette expression, l'équation finale

en u'' sera *analytiquement* du second degré. Mais lorsqu'on effectue ces calculs, on trouve que les termes qui contiennent u''^2 s'entre-détruisent jusque dans les six premières décimales de leur coefficient numérique; de sorte que le peu qui manque à leur exacte compensation peut légitimement s'attribuer aux dernières décimales antérieurement négligées. Ceci étant admis, l'équation finale en u'' se réduit au premier degré, et elle est

$$0 = 1{,}8293115 - 3{,}215191\, u'',$$

ce qui donne

$$u'' = +\, 0{,}568960.$$

Si l'on croyait pouvoir répondre des septièmes décimales négligées dans le coefficient de u''^2, l'équation, résolue comme étant du second degré, reproduirait d'abord pour une de ses racines la valeur précédente de u'' sans altération sensible; l'autre racine, qui se trouverait négative et très-grande, devrait être exclue de l'application.

177. Cette disparition du terme en u''^2 n'est pas particulière aux données numériques que nous avons ici employées. Elle a lieu généralement lorsque l'on néglige les termes de l'ordre $\frac{m}{\mu_1 N}$ comparativement à l'unité, ainsi que nous venons de le faire. Ces termes sont introduits par l'expression de p', qui, d'après le tableau de la page 234, est rigoureusement :

$$p' = (\mu_1 - \mu_2)\,\frac{(\mu_1 N - m)}{\mu_1 \Delta'},$$

ce qui donne

$$p'\,\frac{\Delta'}{N} = (\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{\mu_1 N - m}{\mu_1 N}\right) = (\mu_1 - \mu_2)\left(1 - \frac{m}{\mu_1 N}\right).$$

Dans notre évaluation numérique, nous avons pris $p'\,\frac{\Delta'}{N}$ comme

sensiblement égal à $\mu_1 - \mu_2$. C'est ce qui a fait évanouir le terme en u''^2. Car, lorsqu'on effectue l'élimination de n'', *analytiquement,* d'après son expression générale en u'', et sans rien négliger, ce terme se trouve être

$$+\frac{(1-\omega)\mu_1 n'}{1+(3+2u'')s'}\cdot\frac{2m}{\mu_1 N}u''^2.$$

Or, le premier coefficient de ce produit étant pris avec le signe négatif, se trouve affecter tous les autres termes de l'équation. Il disparaît donc comme facteur commun; et alors le terme entier en u''^2 disparaît aussi lorsque l'on néglige son coefficient propre $\frac{2m}{\mu_1 N}$ comparativement à l'unité. Cette supposition deviendra d'autant plus exacte que N sera un plus grand nombre; mais elle pourra toujours être très-légitimement employée comme approximation, parce que le carré de u'' ne devra jamais surpasser que de très-peu l'unité dans les plus grandes valeurs que l'on emploiera pratiquement.

178. Ceci étant admis, l'équation littérale en u'' se réduit au premier degré; et après qu'on l'a débarrassée du facteur commun que je viens d'indiquer, on lui trouve, après toutes les éliminations, la forme suivante, où la lettre s' représente $\mu_1 - \mu_2$, par le même motif d'abréviation qui nous l'a fait introduire plus haut dans ces calculs.

$$\begin{aligned} 0 = 2(1+s') + \left[\frac{ms'}{\mu_1} - (1-m)(1-\omega)\frac{\mu_2}{s'}\right]\left(3+\frac{1}{s'}\right) \\ -\left[\frac{1}{s'} + 2(1-m)(1-\omega)\frac{\mu_2}{s'} - s' - \frac{2ms'}{\mu_1}\right]u''. \qquad (C)''' \end{aligned}$$

Soit C''' le second membre de cette équation, considéré comme pouvant être, ou n'être pas, tout à fait nul. Il dérive du précé-

dent C'', débarrassé du facteur commun que j'ai tout à l'heure indiqué, c'est-à-dire que l'on a

$$C''' = -\frac{[1+(3+2u'')s']}{(1-\omega)\mu_1 n'} C''.$$

Donc, si l'on tire de là C'' en C''', et qu'on substitue cette valeur dans l'expression de δN trouvée plus haut pour l'équation (C)'', page 269, il en résultera pour celle-ci

$$\delta N = -\frac{(1-\omega)\mu_1 N}{(r'-1)[1+(3+2u'')s']} \cdot C''' \delta i.$$

Cette nouvelle équation (C)''' a l'avantage d'avoir tous ses termes explicitement exprimés en fonction des données fondamentales, ce qui la rend immédiatement calculable dans chaque cas où l'on a choisi ces données. Par exemple, si l'on attribue aux différentes lettres les valeurs marquées que nous venons de leur assigner tout à l'heure, c'est-à-dire si l'on prend

$$\mu_1 = 0{,}5;\quad \mu_2 = 0{,}2;\quad s' = \mu_1 - \mu_2 = 0{,}3;\quad \omega = 0{,}1075;\quad m = +0{,}4,$$

on en tirera directement

$$u'' = 0{,}568965.$$

Cette valeur de u'' coïncide en effet avec celle que nous avions obtenue d'abord, page 272, en effectuant l'élimination de n'' par la voie numérique. Car la petite différence qu'on remarque sur la sixième décimale, provient sans doute de l'incertitude que les tables logarithmiques ordinaires comportent dans ce dernier ordre d'évaluation. La même identité de résultat s'obtiendra toujours avec une égale précision dans les autres exemples numériques que l'on pourrait se proposer, ainsi que j'en ai fait moi-même l'épreuve pour constater l'exactitude de l'élimination analytique. Enfin,

comme dernière confirmation, je me suis assuré que les divers oculaires construits avec la valeur de u'' donnée par l'équation précédente, satisfont à l'équation primitive (C)', page 135, d'où celle-ci dérive, quand on applique à cette dernière les mêmes valeurs de D et de N que l'on a ici employées; sauf une différence en moins de quelque petite fraction d'unité sur N, laquelle résulte sans doute du terme $\frac{m}{\mu_1 N} u''^2$ que nous avons négligé dans la transformation. Mais, comme l'équation (C)' n'est elle-même qu'approchée, la différence dont il s'agit n'a aucune importance pour les applications réelles. D'ailleurs, lorsque l'oculaire aura été préparé avec la valeur de u'' obtenue ainsi, par l'équation (C)''', si l'on y calculait la valeur de l'indéterminée N'', par son expression générale $\frac{ND}{\Delta'}$, et qu'on la joignît aux coefficients principaux ainsi déterminés, elle serait toujours assez approchée de l'exactitude pour qu'on pût, si on le jugeait nécessaire, lui appliquer la méthode des rectifications successives, exposée dans le § 79, page 142, comme nous l'avons fait page 145; et cela conduirait aux valeurs rigoureuses de D et de N, pour lesquelles l'oculaire ainsi construit satisfait aux conditions d'achromatisme. Toutefois, je n'indique la possibilité de ces dernières déterminations, que comme complétant l'emploi théorique et analytique de nos formules. Car on n'aura pas besoin d'y recourir pour les applications réelles, le grossissement N qu'un oculaire doit produire n'étant jamais fixé, ou nécessité, à une fraction d'unité, ni même à une unité près.

179. Considérant donc désormais l'indéterminée u'' comme devant être déduite de l'équation (C)''', lorsque tous les éléments du premier système binaire sont choisis et assignés,

tous ceux du second en résultent : soit, par la condition de continuité qui donne p'', § 159, page 246, soit par l'égalité d'influence sur le grossissement total attribuée aux deux dernières lentilles, laquelle a fixé la forme générale des coefficients n'', r'', q'', propres à ce système-là, ainsi qu'on l'a vu, page 266. Je porte donc ces expressions dans les premières colonnes du tableau placé à la fin de ce mémoire, comme faisant suite à celles qui appartiennent au premier système binaire. J'y joins les expressions des distances focales principales f_4, f_5 des deux dernières lentilles, qui s'en déduisent immédiatement, ainsi que quelques autres éléments de construction dont la forme est évidente. L'ensemble de tous ces résultats présente alors le type algébrique le plus général, comme le plus parfait, d'un oculaire achromatique quadruple, donnant des images droites, et produisant le grossissement angulaire N par son application à un objectif de la distance focale Δ', supposé achromatique individuellement.

Ce type est préparé de manière que la distance focale actuelle Δ_f de l'instrument total, devienne infinie quand les pinceaux lumineux qui s'y transmettent sont composés de rayons de moyenne réfrangibilité. Pour en compléter les caractères, il faudra calculer les variations que cette distance focale éprouve quand les pinceaux transmis sont d'une réfrangibilité différente. Nous le ferons plus tard, et nous joindrons à notre tableau les variations chromatiques $\delta\Delta_f$ et δH, en fonction des nouvelles constantes fondamentales que nous avons ici introduites. Il nous suffira pour cela de substituer ces constantes dans les expressions générales des mêmes variations que nous avons formées page 58, § 28, et page 91,

§ 45. Ce sera le dernier objet du présent travail. Mais je vais, auparavant, déduire de notre type quelques cas de construction, pour lesquels les constantes fondamentales seront spécialisées numériquement, afin que l'on voie ainsi le sens et la portée de l'influence que le choix de leurs valeurs exerce sur les dimensions de l'appareil et sur les effets physiques qu'il produit.

180. Dans ce dessein, je reprends d'abord le cas des données moyennes que nous avons déjà employé comme exemple. La valeur que nous avons alors obtenue pour u'', page 272, donne

$$\psi'' = -(1 + u'') = -1{,}568962.$$

Le premier système binaire construit avec ces mêmes données, a, pour élément analogue

$$\psi' = -2{,}034188.$$

La différence $\psi' - \psi''$ n'aura donc qu'une valeur fractionnaire moindre que l'unité. C'est précisément là une condition que nous avons reconnue avantageuse pour atténuer les variations chromatiques de la quantité H qui détermine la place de l'œil. Voyez plus haut, pages 94 et 95.

181. u'' étant connue pour ce cas moyen, je l'associe avec la valeur correspondante $s' = 0{,}3$, et je l'introduis avec elle dans les expressions de n'', r'', q'', $\frac{n''}{p''}$, de la page 266, où elle entre algébriquement. J'obtiens ainsi les valeurs numériques qui en résultent pour ces quatre quantités, et je trouve d'abord

$$n'' = -0{,}819997; \quad r'' = +0{,}08080868; \quad q'' = -\frac{1{,}0662627}{p''}.$$

Le coefficient n'' se présente donc négatif, tandis que r'', au contraire, se trouve positif et très-faible. Ce sont encore

deux particularités dont nous avions reconnu la convenance, et le signe négatif de n'' était même une des conditions de nos raisonnements. On peut aisément constater que ces valeurs vérifient l'équation générale

$$n''r'' - p''q'' = 1;$$

comme cela doit avoir lieu dans tout système optique dont les lettres expriment les quatre coefficients principaux.

182. L'expression absolue de p'' nous a été donnée dans la page 270, par l'équation de continuité qui lie le second et le premier système binaire. Nous avons eu ainsi

$$p'' = \frac{898}{1950}\frac{N}{\Delta'}.$$

Ceci étant introduit dans l'expression de q'' en p'', page 266, il en résulte

$$q'' = -2{,}315381 \, . \frac{\Delta'}{N}.$$

Δ' étant essentiellement négatif et N positif, la valeur de q'' sera positive, comme il le faut, puisqu'elle exprime l'intervalle des deux dernières lentilles A_4, A_5.

183. En faisant les mêmes substitutions dans l'expression générale de $\frac{n''}{p''}$, page 266, il vient

$$\frac{n''}{p''} = +\, 0{,}7690388\, q'',$$

et, par suite, en employant la valeur précédente de q'' :

$$\frac{n''}{p''} = -\, 1{,}780618 \frac{\Delta'}{N}.$$

D'après ce que nous avons déjà remarqué page 205, § 124, le rapport $-\frac{n''}{p''}$ exprime la distance focale réciproque du second système binaire, comptée à partir de la première lentille A_4. Cette distance étant ici négative, puisque q'' est positif, elle est

postérieure à la lentille. En outre, comme elle est moindre que q'', le foyer réciproque du système tombe entre ses deux lentilles A_4, A_5, et à peu près aux trois quarts de l'intervalle qui les sépare. Ainsi, dans l'application de l'instrument à un observateur infiniment presbyte, il faudra amener le foyer actuel Δ_3 du premier système binaire, dans cette position intermédiaire entre A_4 et A_5. C'est encore une circonstance que nous avions reconnue désirable, pour que l'image actuelle produite en Δ_3, mais qui devient ici virtuelle, ne s'éloigne pas beaucoup de la lentille A_4, qui doit en réfracter les pinceaux.

184. La réalisation de cette coïncidence exige que la distance focale négative Δ_3, comptée postérieurement à la lentille A_3 du premier système, surpasse la distance focale réciproque $-\frac{n''}{p''}$, comptée aussi postérieurement à la lentille A_4. C'est là une condition indispensable pour la possibilité matérielle de l'instrument. Or, il est facile de voir qu'elle se trouve remplie par nos dispositions actuelles. Car, si l'on réduit Δ_3 en nombres, d'après son expression générale, page 237, § 149, en y substituant les éléments numériques propres au premier système binaire, on trouve

$$\Delta_3 = 5,613306 \frac{\Delta'}{N - 0,8}.$$

Et puisque nous venons d'obtenir

$$-\frac{n''}{p''} = 1,780618 \frac{\Delta'}{N},$$

il est évident que ces deux quantités sont de même signe, toutes deux négatives, et que la première est, dans ce sens, plus grande que la seconde, conformément à la condition exigée.

185. De là, on conclut tout de suite l'intervalle h_3 qu'il faut établir entre les deux systèmes binaires pour approprier l'instrument à l'usage d'un observateur infiniment presbyte. En effet, les distances focales, directe et réciproque, que nous voulons combiner, étant toutes deux considérées analytiquement comme positives, ainsi que l'intervalle h_3, la coïncidence de leurs foyers respectifs, qui est la condition de cet ajustement, s'exprimera par l'équation

$$\Delta_3 + h_3 = -\frac{n''}{p''},$$

d'où

$$h_3 = -\Delta_3 - \frac{n''}{p''}.$$

C'est ce que nous avions déjà reconnu page 204. Substituant donc ici, dans le second membre, les valeurs trouvées tout à l'heure, on aura

$$h_3 = -5{,}613306\frac{\Delta'}{N-0{,}8} + 1{,}780618\frac{\Delta'}{N};$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$h_3 = -\left[3{,}832688 + \frac{4{,}490645}{N-0{,}8}\right]\frac{\Delta'}{N}.$$

Δ' étant négatif par lui-même, et N positif, on voit que cette valeur de h_3 sera positive, comme il faut que cela ait lieu, pour qu'elle réponde à sa signification.

186. Il ne nous reste plus qu'à calculer la distance H de la dernière lentille A_5 au point oculaire de l'instrument total. Son expression analytique, pour un observateur infiniment presbyte, est, d'après la page 85,

$$H = \frac{r''}{p''} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N} + \frac{\Delta'}{N^2}.$$

Or, les déterminations précédentes donnent

$$\frac{r''}{p''}=0,1753754\,\frac{\Delta'}{N};$$

et nous avons fait, en outre, page 262,

$$\frac{p'_1}{p''}=\frac{585}{898}\,\frac{(N-0,8)}{N};$$

on aura donc

$$H=\left[0,1753754+\frac{585}{898}\,\frac{(N-0,8)}{N}+\frac{1}{N}\right]\frac{\Delta'}{N},$$

ce qui se réduit à

$$H=\left[1,8268231+\frac{0,4788842}{N}\right]\frac{\Delta'}{N}.$$

H sera donc négatif, c'est-à-dire que le point oculaire de l'instrument total sera postérieur à la dernière lentille, conséquemment extérieur. L'œil pourra donc se placer matériellement en ce point, et il s'y trouvera à une distance de la dernière lentille, qui ne sera ni trop grande ni trop petite, étant à peu près les $\frac{83}{100}$ de $\frac{\Delta'}{N}$.

187. J'insère tous les résultats précédents au tableau placé à la fin de ce mémoire, comme faisant suite aux éléments du système binaire, que nous avons établi sur les mêmes données fondamentales moyennes. J'y joins la longueur L de l'oculaire total ainsi composé, laquelle est la somme des intervalles compris entre ses lentilles, c'est-à-dire $q'+h_3+q''$. En résumant les valeurs ici obtenues pour les trois intervalles, je trouve, après une réduction facile

$$L=-\left[9,123069+\frac{7,07645}{N-0,8}\right]\frac{\Delta'}{N}.$$

En faisant un moment abstraction du terme divisé par N—0,8, qui devient très-faible dans les forts grossissements,

la proportion de L à $\frac{\Delta'}{N}$, que cette formule exprime, est intermédiaire entre celles que l'on trouve pratiquement réalisées.

188. L'oculaire quadruple dont nous venons ainsi d'obtenir le type numérique applicable à des valeurs quelconques de N et de Δ', offre la plus grande ressemblance dans les rapports de ses parties, avec les meilleurs de Frauenhoffer, dont les éléments ont été publiés de l'*Optique pratique* dans Sprecht. Et ce grand artiste paraît avoir adopté des proportions, sinon exactement les mêmes, du moins assez peu différentes pour tous les grossissements forts ou faibles. On peut cependant présumer que, dans ce dernier cas, il convient d'augmenter quelque peu le coefficient μ_2, afin que la seconde lentille A_2 contribue au grossissement total N, dans une proportion analogue à celle que nos formules lui assignent lorsque cet élément est un nombre considérable comparativement à l'unité. Pour faire sentir cette distinction, je remarque qu'en vertu de l'expression de N, formée page 159, la part de la seconde lentille oculaire dans le grossissement total, est exprimée généralement par $\frac{Q_3}{f_3}$; et la valeur exacte de ce rapport en fonction des coefficients du premier système est, d'après le tableau de la page 187 :

$$\frac{Q_3}{f_3} = \frac{(n'-1)(q'+r'h_1)}{q'} = \frac{(n'-1)r'h_1}{q'} + n' - 1.$$

Dans les applications, le premier terme du second membre est toujours la partie principale de $\frac{Q_3}{f_3}$; et comme nous l'avons représenté en général par $\mu_2 N$, page 232, on aura aussi rigoureusement

$$\frac{Q_3}{f_3} = \mu_2 N + n' - 1.$$

μ_2 est un coefficient numérique, que l'analyse des appareils réputés les meilleurs, nous a engagé à faire en moyenne égal à $\frac{1}{5}$ ou 0,2, page 244. Or, quand N sera un nombre considérable, par exemple 50, 60 ou 80, $\frac{Q_3}{f_3}$ ainsi exprimé, se trouvera encore conserver, à fort peu près, la proportion μ_2 ou $\frac{1}{5}$ avec le grossissement total N; parce que n' étant une fraction négative de l'ordre $-\frac{1}{4}$, la partie négative $-\left(1+\frac{1}{4}\right)$ n'affaiblira que très-peu cette proportion. Mais il n'en sera plus de même si N doit être assez faible pour que $n'-1$, ou $-\left(1+\frac{1}{4}\right)$ lui devienne sensiblement comparable. Car alors, la proportion réelle exprimée par $\frac{Q_3}{f_3}$ sera notablement moindre que $\mu_2 N$. Par exemple, si N devait être égal à 15, l'indéterminée μ_2 étant toujours prise égale à $\frac{1}{5}$, $\mu_2 N$ serait $+3$; de là, retranchant le terme négatif $n'-1$ évalué approximativement à $-1{,}25$, le rapport $\frac{Q_3}{f_3}$, ainsi établi, se réduirait à $+1{,}75$ ou $\frac{7}{60}$ du grossissement total, proportion bien inférieure à $\frac{1}{5}$ ou $\frac{12}{60}$ que l'on voulait lui attribuer.

189. Aussi, dans l'excellente lunette de Ramsden, qui appartient à l'Observatoire de Padoue, laquelle est préparée pour un grossissement N égal à 27, je trouve que $\frac{Q_3}{f_3}$ est 7,102094, c'est-à-dire plus de $\frac{1}{4}$ du grossissement total; et, pour que le coefficient μ_2 donnât à $\frac{Q_3}{f_3}$ cette même valeur, n' étant supposé $-0{,}25$, il faudrait le faire égal à 0,30934, c'est-à-dire plus que 0,3 du grossissement N, au lieu de 0,2,

ou $\frac{1}{5}$ que nous lui avions généralement attribué. Or, cette augmentation de μ_2 exige qu'on augmente aussi le coefficient μ_1 propre à la première lentille A_1, afin que les éléments linéaires, qui ont en dénominateur la première ou la seconde puissance de $\mu_1 - \mu_2$, ne s'allongent pas démesurément, ce qui rendrait l'instrument incommode pour l'usage. Aussi trouvai-je encore que, dans la lunette de Padoue, la valeur de μ_1 est élevée presque jusqu'à $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$, au lieu de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{6}$ qui est sa valeur la plus habituelle dans les oculaires de Frauenhoffer. Pour imiter cette disposition, que je suppose devoir être particulièrement applicable aux faibles grossissements, j'ai calculé le type numérique d'un oculaire quadruple, dans lequel les constantes μ_1 et μ_2 ont ces valeurs augmentées $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$, les deux autres constantes ω et m restant les mêmes que précédemment. Il a suffi pour cela d'introduire ces nouvelles données dans les expressions algébriques qui les contiennent sous forme littérale. La valeur de u'' déterminée pour ces cas par l'équation $(C)'''$ en est résultée plus forte que précédemment et égale à $+1,151636$. En l'introduisant dans les formules relatives au second système binaire, j'ai obtenu les éléments que celui-ci devait avoir, tant pour l'achromatisme, que pour donner aux deux dernières lentilles une part égale dans le grossissement total N. Alors, j'ai rassemblé tous ces résultats dans deux nouvelles colonnes de notre tableau général, où ils sont placés en regard de leurs analogues, dans le premier exemple, et des expressions algébriques générales dont ils sont dérivés.

190. Ce second type d'oculaire présente les rapports les

plus intimes avec celui que Ramsden a employé dans la lunette de Padoue. Le coefficient r'' s'y trouve de même négatif, par opposition à la construction à laquelle nous avions d'abord été conduits; et ce changement de signe y résulte de la valeur plus forte assignée à l'indéterminée u'' par la condition d'achromatisme qu'exprime l'équation $(\mathfrak{C})'''$. Semblablement aussi à l'oculaire de Ramsden, la quantité ψ'' s'y trouve presque égale à ψ', ce qui tend à affaiblir les variations chromatiques de H. La similitude devient plus frappante encore, lorsqu'on réduit en nombres les expressions analytiques des divers éléments, pour les mêmes valeurs de Δ' et de N que Ramsden a employées. Car les distances focales principales des lentilles et leurs intervalles dans chaque système binaire se trouvent alors presque exactement pareils, surtout pour le système binaire postérieur. La seule différence notable et essentielle à remarquer a lieu dans l'intervalle intermédiaire h_3 des deux systèmes binaires, lequel, selon nos formules, est pour ce cas moindre que l'intervalle fixe q' ou h_2 des deux premières lentilles; tandis que h_3 est au contraire plus grand que le premier intervalle dans la lunette de Padoue, comme dans toutes les autres constructions habituellement usitées; et nous l'avons également trouvé tel dans la première application de nos formules générales. Mais d'abord, à considérer physiquement la question, l'expérience seule peut apprendre si cet excès de longueur attribué ordinairement à l'intervalle intermédiaire est indispensable pour la bonté des effets. Ensuite, dans la comparaison particulière avec l'oculaire de Ramsden, nous avons déjà remarqué, page 148, que celui-ci n'est pas achromatique pour le grossissement 27, auquel Ramsden l'avait destiné, mais pour un autre notablement moindre, qui est 21,78; ce

qui suppose une moindre longueur de l'intervalle intermédiaire h_3, quand l'instrument y est adapté. Or, quand on calcule cette nouvelle longueur de h_3, ainsi que nous l'avons fait alors, on la trouve effectivement moindre que l'intervalle fixe q' ou h_2, comme nos formules actuelles le veulent, et à fort peu près dans la même proportion. Ainsi, l'oculaire de Ramsden, amené à l'état d'achromatisme, s'accorderait avec ces formules, même dans cette dernière circonstance; et la concordance est toute naturelle, puisqu'elles sont spécialement préparées pour un tel état.

191. Au reste, si l'infériorité de l'intervalle h_3, comparativement à l'intervalle q' ou h_2, paraissait avoir quelque inconvénient pratique, ce que l'expérience seule pourra décider, il sera bien aisé de la faire disparaître en diminuant quelque peu la différence $\mu_1 - \mu_2$ dont le carré, ainsi que nous l'avons vu page 237, entre comme dénominateur dans l'expression de la distance focale actuelle du premier système binaire, que nous avons désignée par Δ_3. Car, cette même différence n'entrant que par sa première puissance dans le dénominateur de q', page 234, elle augmentera cet intervalle dans une moindre proportion relative; et l'effet sera encore plus assuré, si l'on accroît aussi quelque peu la valeur de l'idéterminée ω, ce qui affaiblira le numérateur de q' et augmentera relativement celui de Δ_3. Maintenant, si l'on examine l'équation $(C)'''$ sous la forme analytique que nous lui avons donnée page 273, on verra que la diminution de $\mu_1 - \mu_2$ ou s', doit affaiblir la valeur qu'elle fournit pour u'' plutôt que l'accroître; et c'est ce que les applications numériques confirment. Par suite, la valeur de $\frac{n''}{p''}$ deviendra aussi plutôt moindre que plus grande qu'elle n'était aupara-

vant, ce que les applications confirment encore; et de tout cela résultera une augmentation de h_3, qui pourra lui faire aisément surpasser la valeur affaiblie de q' ou h_2. Pour montrer la justesse de ces inductions, j'ai calculé un troisième type d'oculaire, où j'ai introduit dans $\mu_1 - \mu_2$ et ω, de très-légères variations opérées suivant le sens qu'elles supposent, et le résultat a été tel que nous venons de le prévoir. Les éléments de ce troisième type d'oculaire sont aussi annexés à notre tableau général. L'expérience seule pourra faire voir s'il offrira des avantages réels dans l'exécution.

192. Il faut maintenant déterminer l'amplitude du champ efficace $2_\epsilon X$ que nos oculaires embrasseront, et en former l'expression générale. Il faut aussi régler les ouvertures absolues des quatre lentilles, de manière que les axes des pinceaux lumineux qui limitent ce champ les rencontent toujours en dedans de leurs bords, et puissent y être librement transmis. Pour cela, je reprends les valeurs de $\frac{Q_i}{f_i}$ propres à chacune d'elles, non plus sous la forme que nous leur avions donnée d'abord page 187, mais sous celle qui résulte de l'introduction des indéterminées μ_1, μ_2, dans les deux premières, pages 219 et 282; puis de la répartition à peu près égale du grossissement dans les deux autres, pages 263 et 264. Ces valeurs, ainsi transformées, sont:

$$\frac{Q_2}{f_2} = -\mu_1 N,$$

$$\frac{Q_3}{f_3} = +\mu_2 N + n' - 1,$$

$$\frac{Q_4}{f_4} = +\frac{1}{2} N(1 + \mu_1 - \mu_2),$$

$$\frac{Q_5}{f_5} = +\frac{1}{2} N(1 + \mu_1 - \mu_2) - n'.$$

On voit que leur somme reproduit N—1, de même que les expressions primitives de la page 187, ce que je remarque seulement comme vérification. Maintenant, la condition numérique *et pratique* qui limite le champ $\pm {}_{\epsilon}X$, c'est que la *plus grande de ces quatre quantités,* abstraction faite de son signe propre, étant multipliée par sin ${}_{\epsilon}X$, soit faite tout au plus égale à $\frac{1}{4}$, ou même à $\frac{1}{5}$. Or, d'après l'ordre fractionnaire de valeurs, auxquelles il faut toujours restreindre les constantes μ_1, μ_2, les deux premières quantités, $\frac{Q_2}{f_2}$, $\frac{Q_3}{f_3}$, considérées ainsi abstractivement de leurs signes propres, seront évidemment moindres que les deux dernières. Quant à celles-ci, elles seront à très-peu près égales entre elles, la quatrième surpassant seulement la première par le terme $-n'$, qui est une fraction positive, toujours moindre que 1, et généralement peu différente de $\frac{1}{4}$. Négligeant donc cette petite différence, comme insensible comparativement à la partie principale, où N est multiplicateur, nous définirons les bornes du champ d'après celle-ci, en l'assujettissant à la condition *théorique*

$$\frac{1}{2} N \sin {}_{\epsilon}X(1 + \mu_1 - \mu_2) = \frac{1}{4};$$ si nous adoptons la première limite d'amplitude,

ou bien

$$\frac{1}{2} N \sin {}_{\epsilon}X(1 + \mu_1 - \mu_2) = \frac{1}{5};$$ si nous adoptons la seconde qui est plus restreinte.

Or le produit N sin ${}_{\epsilon}X$ est généralement égal au sinus de l'angle final ${}_{\epsilon}X_{n}$ formé avec l'axe central par le rayon émer-

gent à incidence centrale qui borde le champ apparent ${}_cX$. Tirant donc de là ce sinus, on aura pour sa valeur :

Par la première limite $\sin {}_cX_m = \frac{1}{2(1 + \mu_1 - \mu_2)}$,

Par la deuxième limite $\sin {}_cX_m = \frac{2}{5(1 + \mu_1 - \mu_2)}$.

193. Mais il ne suffit pas de fixer ainsi théoriquement ces valeurs de l'angle ${}_cX_m$, il faut encore savoir si l'on peut effectivement les réaliser dans l'exécution pratique. Or c'est ce que l'expérience peut apprendre. Pour la consulter, je donne successivement à la différence des constantes fondamentales $\mu_1 - \mu_2$, les valeurs que nous lui avons attribuées dans les trois constructions d'oculaires que j'ai prises spécialement comme exemples; et en effectuant le calcul de ${}_cX_m$ pour chacune d'elles, j'obtiens le tableau suivant :

VALEURS ATTRIBUÉES A $\mu_1 - \mu_2$ DANS LES DIVERSES CONSTRUCTIONS.	VALEUR RÉSULTANTE DE L'ANGLE FINAL ${}_cX_m$.	
	POUR $\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{4}$.	POUR $\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{5}$.
Première construction $\mu_1 - \mu_2 = 0{,}3$.	22°.37'.11",5	17°.55'.12",8
Seconde construction $\mu_1 - \mu_2 = \frac{5}{12} = 0{,}416667$.	20 .40 . 2 ,3	16 .24 . 2 ,5
Troisième construction $\mu_1 - \mu_2 = 0{,}3523$.	21 .41 .58 ,6	17 .12 .18 ,2

194. Dans la pratique, l'angle ${}_cX_m$ se limite par l'expérience, en ouvrant le diaphragme placé au foyer réciproque de la dernière lentille autant qu'on peut le faire en continuant d'obtenir de bons effets. Lorsqu'on a ainsi atteint le maximum d'ouverture que l'instrument peut supporter avec avan-

tage, si l'on mesure l'amplitude $2\,_{c}X$ du champ qu'il embrasse, et le grossissement angulaire N qu'il produit dans cet état, on en peut conclure la valeur actuelle de l'angle $_{c}X_{m}$ d'après l'expression de son sinus, qui est N sin $_{c}X$. Or, en faisant ce calcul pour toutes les lunettes construites par les plus habiles artistes, où les deux éléments dont il s'agit avaient été mesurés, je n'en ai trouvé aucune où l'angle final $_{c}X_{m}$ *réellement* admis, surpassât 16° ou 17°; et les plus parfaits s'accordaient à lui donner des valeurs peu différentes de 15° 30′, comme j'en ai rapporté plusieurs exemples dans ce qui précède. D'après ces résultats de fait, quoique la limite $\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{4}$ ait été théoriquement admise, on ne peut pas jusqu'à présent la considérer comme réalisable avec les formes de courbure habituellement employées. Il faut restreindre l'angle $_{c}X_{m}$ vers la limite inférieure $\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{5}$, dont les résultats, contenus ici dans notre dernière colonne, se rapprochent de ceux qu'on obtient effectivement. Cela posé, parmi les diverses constructions d'oculaires, résultantes des associations de valeurs que l'on peut convenablement donner aux constantes μ_1, μ_2, la plus avantageuse, *pour l'amplitude du champ*, sera celle dans laquelle l'angle $_{c}X_{m}$ se trouve le plus grand, quand on le calcule pour la limite $\frac{Q_4}{f_4} = \frac{1}{4}$; de sorte qu'ici, par exemple, cet avantage appartiendra à la première de nos trois constructions. Car l'angle $_{c}X_{m}$ ne pouvant guère pratiquement excéder 15° 30′, si sa valeur calculée pour la limite $\frac{1}{5}$ atteint déjà ce maximum ou le surpasse, il faudra abaisser $\frac{Q_4}{f_4}$ au-dessous de $\frac{1}{5}$ pour y revenir. De sorte que la même valeur de

sin $_c$X égale à $\frac{\sin 15^\circ 30'}{N}$ s'obtiendra, pour le même grossissement N, avec de moindres incidences sur les surfaces réfringentes, et avec de moindres obliquités sur l'axe central des normales menées aux points d'incidences extrêmes.

195. Dans les traités d'optique où l'on a décrit des oculaires quadruples tels que ceux que nous considérons, on indique ordinairement pour chaque lentille, les valeurs relatives des ordonnées efficaces propres au rayon à incidence centrale qui borde le champ apparent $\pm$ $_c$X. Nos formules donnent avec la plus grande facilité, non-seulement ces valeurs relatives, mais les grandeurs absolues des diverses ordonnées qui y correspondent. En effet, d'après ce qui a été établi généralement pour les rayons à incidence centrale, page 157, les expressions de ces ordonnées dans les quatre lentilles, sont évidemment Q_2 sin $_c$X; Q_3 sin $_c$X; Q_4 sin $_c$X; Q_5 sin $_c$X. Donc, lorsque l'on connaîtra la demi-amplitude réelle $_c$X du champ apparent que l'instrument embrasse, ou qu'on veut lui faire embrasser, il n'y aura qu'à multiplier respectivement par sin $_c$X, les valeurs des quatre quantités Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, prises sous leurs premières formes page 187, ou sous celle que leur donne le tableau de la page 287, selon l'espèce d'éléments constitutifs dont l'emploi se présentera comme plus commode; et les produits ainsi obtenus seront les ordonnées efficaces demandées.

196. Ce calcul ne peut avoir réellement qu'un but pratique, c'est de connaître les diamètres d'ouverture qu'il faut donner, ou faire excéder, aux lentilles en les construisant, pour qu'elles puissent recevoir effectivement sur leurs surfaces le rayon à incidence centrale qui est supposé introduit sous

l'angle limite ${}_eX$. Mais, quand on restreint la plus grande valeur de $\frac{Q_i \sin {}_eX}{f_i}$ à rester au-dessous de $\frac{1}{4}$, comme nous avons vu qu'on est contraint de le faire, page 162, on peut se passer de ce calcul, et établir pour toutes les lentilles une condition d'ouverture commune, telle que le rayon considéré n'atteindra jamais leurs bords. En effet, d'après ce qui précède, $Q_i \sin {}_eX$ étant l'ordonnée efficace de ce rayon sur la lentille A_i, désignons-la pour abréger par λ_i et posons l'égalité

$$\frac{\lambda_i}{f_i} = \frac{1}{4};$$

déjà ceci donnera λ_i trop fort pour chaque f_i considéré, puisque le rapport véritable ne doit pas être égal à $\frac{1}{4}$, mais beaucoup moindre que cette fraction. Maintenant les lentilles oculaires se font généralement planes-convexes, et avec une espèce de verre dont l'indice de réfraction est toujours peu différent de 1, 5; de sorte que leur distance focale principale f_i a toujours à fort peu près pour valeur $\mp 2\, r_i$, r_i étant le rayon de courbure de leur face convexe, lequel est ici considéré comme positif quand cette face est tournée vers l'œil, et comme négatif quand elle est tournée vers les objets. Nous avons déjà établi cette expression particulière dans le § 91, page 161. D'après cela, si l'on construisait une pareille lentille dont λ_i, déterminée par l'équation précédente, fût l'ordonnée extrême, il en résulterait à fort peu près :

$$\frac{\lambda_i}{r_i} = \frac{1}{2};$$

c'est-à-dire que l'ordonnée dont il s'agit serait la moitié du rayon de la face courbe; et par conséquent, la normale

menée à ce bord ferait un angle de 30° avec l'axe central du système. Or, dans la pratique habituelle, on donne à l'ordonnée λ_i du bord extrême une valeur encore plus grande que celle-là; car on prend pour règle de construction que l'ouverture entière de chaque lentille soit les $\frac{6}{10}$ de la distance focale, comme je l'ai dit page 162. C'est-à-dire qu'on fait :

$$\frac{2\lambda_i}{f_i} = \frac{6}{10},$$

d'où à fort peu près

$$\frac{\lambda_i}{r_i} = \frac{6}{10}.$$

Le rapport $\frac{\lambda_i}{r_i}$ exprime le sinus de l'angle formé avec l'axe central par la normale menée au bord même de la lentille. En le déduisant de cette expression, il se trouve égal à 36° 52′ 11″, 7. Cela dépasse considérablement les 30° qui formeraient sa valeur si l'on prenait $\frac{\lambda_i}{f_i} = \frac{1}{4}$. Or, comme le rapport $\frac{\lambda_i}{f_i}$ est toujours moindre que $\frac{1}{4}$, pour toutes les ordonnées d'incidence que l'ouverture réellement admissible du champ peut réaliser, on est sûr que les lentilles ainsi construites présenteront toujours une ouverture plus que suffisante pour la transmission des rayons les plus écartés de l'axe, dans les applications réelles. Il ne restera donc qu'à restreindre l'angle d'introduction $\pm\, {}_{o}X$ de ces rayons extrêmes autant que cela est nécessaire pour obtenir de l'instrument de bons effets; et l'on y parviendra, comme je l'ai dit, en modifiant convenablement l'ouverture du dernier diaphragme, lequel limite l'angle ${}_{c}X_m$ qui en dérive. Cet angle, ainsi restreint, supposera toujours des ordonnées efficaces bien moindres que

celles des bords des lentilles; et par conséquent le calcul numérique de ces ordonnées, bien que facile, serait tout à fait superflu.

197. Pour apprécier complétement les diverses constructions d'oculaires, dont nous venons de former le type analytique général, il ne reste qu'à évaluer en nombres les dispersions chromatiques qu'éprouvent, dans chacune d'elles, les points oculaires, et les distances focales qui correspondent aux différentes réfrangibilités. Les éléments de ce calcul ont été établis page 58, § 28, et page 91, § 45. Nous n'aurons qu'à en achever le développement.

Dans les formules que nous avons alors préparées, la distance à laquelle l'observateur perçoit le plus nettement les images de réfrangibilité moyenne est désignée par Ω; et l'on suppose le centre de sa pupille placé sur l'axe central, au point oculaire propre à cette même réfrangibilité, lequel est situé à la distance (H) de la dernière lentille. D'après cela, pour adapter l'instrument à son usage, l'observateur devra faire mouvoir l'oculaire total, jusqu'à ce que ces images moyennes se forment au-devant de son œil à la distance assignée Ω. Quand cet ajustement sera opéré, l'expression finie de (H) sera, d'après la page 92 :

$$(\mathrm{H}) = \frac{r''}{p''} - \frac{p'}{p''\mathrm{P}''} - \frac{1}{\mathrm{NP}''};$$

la valeur de P″ étant celle qui convient à la portée de vue de l'observateur, c'est-à-dire,

$$\mathrm{P}'' = -\frac{\mathrm{N}}{\Delta'}\left(1 - \frac{\Delta'}{\mathrm{N}^2\Omega}\right),$$

comme nous l'avons établi page 94; et tous les termes de ces

expressions devront recevoir les valeurs numériques qui répondent à la réfrangibilité moyenne.

Mais les foyers de réfrangibilités différentes se formeront généralement à des distances de l'œil autres que Ω; et les points oculaires qui y correspondent, seront placés à des distances de la dernière lentille différentes de (H); de sorte qu'ils se trouveront dispersés sur une certaine étendue de l'axe central, autour du point oculaire moyen. Soit n l'indice moyen de réfraction dans l'espèce de verre avec lequel les quatre lentilles de l'oculaire sont fabriquées, et désignons par $n+\delta n$ la valeur de ce même indice pour toute autre phase de réfrangibilité propre à des portions de la lumière perceptible à travers l'instrument. Si l'on fait par abréviation $\frac{\delta n}{n-1}=\delta i$, la distance focale Δ_f correspondante à chaque δi, sera telle que nous l'avons déterminée page 60, § 28, c'est-à-dire :

$$\Omega\left(1+\frac{1}{\Omega}\frac{\delta H}{\delta i}.\delta i+N\Omega\frac{\delta P''}{\delta_i}.\delta i\right),$$

et la variation chromatique δH, pour ce même δi, étant comptée à partir du point oculaire moyen, sera par le § 45, page 94 :

$$\delta H=\left[\frac{q''[(1-r'')+(1-n'')r'']}{(n''r''-1)^2}-\frac{p'}{p''P''}(\psi'-\psi'')-\frac{1}{P''^2}\left(\frac{p'}{p''}+\frac{1}{N}\right)\frac{\delta P''}{\delta_i}\right]\delta i.$$

Lorsque le coefficient différentiel $\frac{\delta P''}{\delta i}$ sera formé explicitement, on devra, dans ces formules, remplacer partout H et P″ par les expressions finies rappelées tout à l'heure, lesquelles s'appliqueront à la condition d'observation autour de laquelle s'exerce la caractéristique δ; et il faudra ensuite donner à tous les coefficients leurs valeurs numériques correspondantes à la réfrangibilité moyenne.

198. Pour former $\frac{\delta P''}{\delta i}$, je prends l'expression générale de P'', telle qu'elle a été primitivement établie dans la première section, page 45, § 21, d'après la seule condition de continuité du système total. Cette expression dont nous avons fait depuis un si fréquent usage, est

$$P'' = p'n'' + r''p'' + p'p''h.$$

En appliquant la caractéristique δ, comme signe de variations infiniment petites aux divers termes qui la composent, il faut traiter l'intervalle h, qui est ici h_3, comme constant, et donner aux coefficients variés des autres quantités les formes qui conviennent à des systèmes partiels purement binaires, formes que nous avons établies page 64, § 31. C'est-à-dire qu'il faudra faire

$$\frac{\delta n'}{\delta i} = n' - 1, \qquad \frac{\delta p'}{\delta i} = p' + \varpi' = p'(1 + \psi'), \qquad \frac{\delta r'}{\delta i} = r' - 1,$$
$$\frac{\delta n''}{\delta i} = n'' - 1, \qquad \frac{\delta p''}{\delta i} = p'' + \varpi'' = p''(1 + \psi'').$$

L'opération étant ainsi effectuée, il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{\delta P''}{\delta i} = {} & 2n''p' && + 2r'p'' && + 2p'p''h,\\ & -p'(1 - n''\psi') && -p''(1 - r'\psi'') && + p'p''h(\psi' + \psi'').\end{aligned}$$

La première ligne du second membre compose précisément 2 P''; dans la deuxième, le produit $p'p''h$ peut être éliminé, au moyen de son expression en P'' tirée de l'équation primitive. Lorsque l'intervalle h, ou h_3, a ainsi complétement disparu, on trouve

$$\frac{\delta P''}{\delta i} = P''\left[2 + \psi' + \psi'' - \frac{p'}{P''}\left\{1 + n''\psi'' + \frac{p''}{p'}(1 + r'\psi')\right\}\right].$$

Maintenant, dans le second membre, on devrait remplacer P'' par sa valeur exacte

$$P'' = -\frac{N}{\Delta'}\left(1 - \frac{\Delta'}{N^2\Omega}\right),$$

laquelle a lieu lorsque l'instrument est ajusté pour la distance finie Ω de la vision distincte. Mais nous avons déjà reconnu, page 90, § 44, que le terme divisé ici par Ω, sous la parenthèse, ne sera jamais, dans les applications, qu'une très-petite fraction de l'unité qui l'accompagne. De sorte que la valeur qu'on obtiendrait pour P'' en y ayant égard, différera toujours dans une proportion très-petite de $-\frac{N}{\Delta'}$, qui est sa valeur calculée pour un observateur infiniment presbyte. Je me bornerai donc à employer celle-ci comme plus simple; et l'approximation qu'elle nous fournira sera d'autant plus admissible que les termes de $\frac{\delta P''}{\delta i}$, auxquels P'' s'applique, soit comme multiplicateur, soit comme diviseur, n'ont par eux-mêmes que des valeurs numériques très-restreintes, comme on le verra dans un moment.

199. Prenant donc P'' égal à $-\frac{N}{\Delta'}$, il vient

$$\frac{\delta P''}{\delta i} = -\frac{N}{\Delta'}\left[2 + \psi' + \psi'' + \frac{p'\Delta'}{N}\left\{1 + n''\psi'' + \frac{p''}{p'}(1 + r'\psi')\right\}\right].$$

Or, dans le tableau qui présente le type analytique général de nos oculaires, si l'on prend l'expression du coefficient p' en fonction des constantes fondamentales que nous avons introduites, cela donne immédiatement

$$\frac{p'\Delta'}{N} = (\mu_1 - \mu_2)\frac{(\mu_1 N - m)}{\mu_1 N} = (\mu_1 - \mu_2)\left(1 - \frac{m}{\mu_1 N}\right).$$

Les indéterminées μ_1 et m sont toutes deux des fractions, mais

la première surpasse toujours la seconde. Le terme $\frac{m}{\mu_1 N}$ du second facteur sera donc dans toutes les applications une fraction très-petite, et d'autant moindre que le grossissement angulaire N sera plus considérable. Or le seul but utile du présent calcul, c'est de connaître les limites d'étendue que peuvent embrasser les variations chromatiques, et non pas de déterminer leurs valeurs avec une apparence de rigueur qui n'aurait pas de réalité. Nous pouvons donc fort bien, pour ce but, négliger la très-petite fraction $\frac{m}{\mu_1 N}$, comparativement à l'unité qui l'accompagne, et prendre $\frac{p'\Delta'}{N}$ égal à $\mu_1 - \mu_2$. Alors l'expression de $\frac{\delta P''}{\delta i}$ deviendra définitivement

$$\frac{\delta P''}{\delta i} = -\frac{N}{\Delta'}\left[2 + \psi' + \psi'' + (\mu_1 - \mu_2)\left\{1 + n''\psi'' + \frac{p''}{p'}(1 + r'\psi')\right\}\right].$$

La limitation de la valeur de P'', que nous y avons admise, peut, par les mêmes motifs, s'admettre dans δH. En le faisant on a

$$\delta H = \left[q''\frac{[1 - r'' + (1 - n'')r'']}{(n''r'' - 1)^2} + \frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}(\psi' - \psi'') + \frac{\Delta'^2}{N^2}\left(\frac{p'}{p''} + \frac{1}{N}\right)\frac{\delta P''}{\delta i}\right]\delta i.$$

On voit que le coefficient différentiel $\frac{\delta P''}{\delta i}$ n'y entre que multiplié par $\frac{\Delta'}{N}$. Je prends donc l'expression de ce produit dans l'équation formée tout à l'heure, et j'ai :

$$\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i} = -\left[2 + \psi' + \psi'' + (\mu_1 - \mu_2)\left\{1 + n''\psi'' + \frac{p''}{p'}(1 + r'\psi')\right\}\right].$$

200. Si l'on examine dans notre tableau général, la forme analytique des quantités ψ', ψ'', r', n'', qui entrent ici dans le second membre, on reconnaîtra aisément que, dans

chaque construction d'oculaire, elles dépendent uniquement des constantes fondamentales m, μ_1, μ_2, ω, et u'', sans que les valeurs absolues de Δ' et de N y aient aucune influence. Le rapport $\frac{p''}{p'}$ est aussi une fonction de ces mêmes constantes; mais leur ensemble y est multiplié par le facteur $\frac{\mu_1 N}{\mu_1 N - m}$, où N entre explicitement. Toutefois l'intervention de cette quantité disparaît ici, dans l'ordre d'approximation auquel nous nous bornons. Car le facteur dont il s'agit est précisément l'inverse de celui que nous avons discuté tout à l'heure en formant le produit $\frac{p'\Delta'}{N}$, et que nous avons reconnu pouvoir être remplacé par l'unité. Appliquant donc ici le même mode d'évaluation, l'expression de $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$ devient entièrement numérique, pour chaque système d'oculaires où les constantes fondamentales sont définies, quelle que soit d'ailleurs la longueur de la distance focale de l'objectif auquel on l'applique, et quelle que soit la force du grossissement N qu'on lui fait produire actuellement.

Nous pouvons en conséquence évaluer ce produit pour les trois constitutions d'oculaires qui sont présentées comme exemple dans notre tableau général. Il suffit de donner aux lettres que la formule renferme, les valeurs que le tableau leur assigne dans chacune de ces constructions. Mais on peut déjà remarquer que le produit cherché y sera toujours composé de deux sommes numériques ayant des signes contraires; la première $2 + \psi' + \psi''$ étant constamment négative, et le reste de l'expression toujours positif. Ces denx sommes, déjà individuellement restreintes à de petits nombres, s'affaibliront davantage encore par leur mutuelle opposition, de sorte

que la valeur résultante du produit considéré se trouvera réduite à une fraction fort petite et presque insensible. C'est ce que montre le calcul même, effectué pour ces trois cas sur les données numériques que fournit notre tableau, et que je rassemble ici pour faciliter cette vérification. J'y joins les valeurs du produit $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$, qui en résultent dans les limites d'approximation que nous venons d'adopter.

DÉSIGNATION des DONNÉES NUMÉRIQUES.	ψ'	ψ''	r'	n''	$\frac{p''}{p'}$	$\mu_1 - \mu_2$	$\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$ CONCLU.
1re construction. . . .	— 2,034188	— 1,168562	— 0,487500	— 0,819997	+ 1,535043	+ 0,3	— 0,000303
2e construction. . . .	— 2,001869	— 2,151636	— 0,428000	— 0,899339	+ 1,202804	$+\frac{5}{12}$	— 0,000002
3e construction. . . .	— 2,356686	— 1,495183	— 0,605421	— 0,680880	+ 1,334467	+ 0,3525	— 0,000001

201. Le produit $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$ est donc excessivement faible dans la première de ces combinaisons, et tout à fait insensible dans les deux dernières; car les valeurs qu'on lui trouve sont de l'ordre des décimales négligées dans le calcul. De là on peut tout de suite conclure que, dans ces trois systèmes d'oculaires, les foyers de diverses couleurs dérivés d'un même pinceau incident composé, se formeront tous à des distances de l'œil excessivement peu différentes de celle où l'on a amené le foyer de réfrangibilité moyenne. En effet, d'après ce que nous avons trouvé page 60, § 28, leur écart longitudinal autour de ce foyer, a pour valeur absolue

$$\delta H = N\Omega^2 . \frac{\delta P''}{\delta i} . \delta i,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\delta H - \frac{N^2\Omega^2}{\Delta'} \cdot \frac{\Delta'}{N} \cdot \frac{\delta P''}{\delta i} \cdot \delta i.$$

Nous prouverons tout à l'heure que, dans nos trois constructions, δH n'a qu'une étendue très-restreinte, qui est une fraction extrêmement petite de la distance focale moyenne Ω. Ainsi le seul terme qui pourrait agrandir notablement l'expression précédente de la dispersion longitudinale, est celui qui s'y trouve avoir pour facteur $\frac{N^2\Omega^2}{\Delta'}$. Mais son influence est ici presque anéantie par l'excessive petitesse du produit $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$ qui l'affecte comme multiplicateur; et cet effet est complété par le dernier facteur δi, dont la valeur pour les rayons les plus éloignés de la réfrangibilité moyenne, n'est jamais qu'une très-petite fraction qui ne s'élève pas à $\frac{2}{100}$, même dans un spectre formé par un trait direct de la lumière solaire la plus vive; de sorte qu'elle doit être bien moindre encore pour la lumière incomparablement plus faible que les objets terrestres peuvent introduire dans les instruments que nous considérons. Le concours de toutes ces circonstances devra donc y rendre insensible la dispersion longitudinale des foyers de diverses couleurs, du moins dans les limites d'appréciation que nos formules approximatives peuvent atteindre.

On doit en effet s'attendre que si le grossissement N devenait très-faible, il ne s'opérerait pas une compensation tout à fait si exacte, entre les termes de signes contraires qui composent $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$. Car la fraction $\frac{m}{\mu_1 N}$ que nous avons négligée comparativement à l'unité, pourrait bien alors exer-

cer sur les résultats une légère influence qui se décèlerait dans un calcul complétement rigoureux. J'ai vérifié ce soupçon sur les exemples mêmes que nous venons de traiter, en y faisant N égal à 16 pour une longueur focale d'objectif égale à 362 millimètres, ce qui était les éléments d'une lunette que M. Rossin a construite, et pour laquelle j'ai calculé trois systèmes d'oculaires conformes aux types que nous venons de considérer. Les valeurs de $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$, déterminées exactement pour ces données, se sont trouvées être de l'ordre des centièmes; ce qui toutefois suffisait pour rendre la dispersion longitudinale des foyers très-petite encore, comparativement à la distance focale moyenne Ω, dans les cas habituels d'observation.

202. On rendrait nos formules approximatives mieux adaptées à ces faibles valeurs de N en prenant la fraction m un peu moindre dans les exemples calculés plus haut. Et cette modification qui rapprocherait l'image objective de la première lentille oculaire, aurait encore un autre avantage dans la même circonstance. Car les faibles grossissements ne s'appliquent jamais qu'à des objectifs dont la longueur focale Δ' est peu considérable, et dont l'ouverture est proportionnellement un peu plus grande que pour les distances focales plus longues. Il convient donc alors d'amener l'image objective un peu plus près de l'oculaire, pour que les pinceaux qui en émanent rencontrent la première lentille dans un état d'épanouissement un peu plus restreint.

203. Je passe maintenant à l'appréciation numérique de δH, que je prends sous la forme approximative que nous lui avons donnée page 298, en y remplaçant P'' par $-\frac{N}{\Delta'}$. Je re-

marque d'abord que l'on peut supprimer son dernier terme comme étant rendu insensible par la petitesse du facteur $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$. En effet, le coefficient littéral auquel ce facteur s'applique dans les parenthèses et qui est $\frac{\Delta'}{N}\left(\frac{p'}{p''}+\frac{1}{N}\right)$, n'a jamais, dans les applications, une valeur numérique qui s'élève jusqu'à 50 millimètres. Il ne donnera donc qu'un produit tout à fait négligeable après avoir été multiplié par $\frac{\Delta'}{N}\frac{\delta P''}{\delta i}$ et par δi. Notre expression approchée de δH ne peut avoir ainsi de valeur sensible que par ses deux premiers termes. Et en l'y bornant elle devient

$$\delta H = \left[q''\frac{[1-r''+(1-n'')r'']}{(n''r''-1)}+\frac{p'}{p''}\frac{\Delta'}{N}(\psi'-\psi'')\right]\delta i.$$

Dans nos types analytiques d'oculaires, le coefficient q'' est exprimé par le produit de deux facteurs; l'un numérique est fonction des seules constantes fondamentales, l'autre littéral est $\frac{\Delta'}{N}$; de sorte que celui-ci devient commun à toute l'expression de δH. Le rapport $\frac{p'}{p''}$ contient aussi le facteur littéral $\frac{\mu_1 N-m}{\mu_1 N}$ ou $1-\frac{m}{\mu_2 N}$; mais nous le remplacerons par l'unité comme précédemment, en négligeant la petite fraction par laquelle il en diffère. Alors toute la partie numérique de δH qui sert de multiplicateur à $\frac{\Delta'}{N}$, peut se calculer et se déduire des données suivantes que j'extrais de notre tableau général, pour les trois types de construction que nous avons jusqu'ici considérés.

DÉSIGNATION des DONNÉES NUMÉRIQUES.	COEFFICIENT NUMÉRIQUE de q''.	n''	r''	$\frac{p'}{p''}$	$\psi' - \psi''$	VALEUR de δH CONCLUE.
1re construction.......	— 2,315381	— 0,819997	+ 0,0808087	+ 0,651448	— 0,465626	$-2,474821 . \frac{\Delta'}{N} \delta i$
2e construction.......	— 1,877263	— 0,899339	— 0,0657985	+ 0,831391	+ 0,149767	$-1,870814 \frac{\Delta'}{N} \delta i$
3e construction.......	— 2,226706	— 0,680880	+ 0,0688044	+ 0,749363	— 0,861503	$-2,762866 \frac{\Delta'}{N} \delta i$

204. En comparant les produits contenus dans la dernière colonne, on voit que, pour des valeurs égales de $\frac{\Delta'}{N}$ et de δi, la dispersion δH des points oculaires sera moindre dans la seconde construction que dans les deux autres. Cela résulte de deux circonstances. L'une est la petitesse relative du facteur numérique de q''; l'autre est le signe positif de $\psi' - \psi''$ qui rend le second terme de δH de signe contraire au premier. La plus grande valeur de δH se trouve dans la troisième construction; et elle vient de ce que $\psi' - \psi''$ y a une plus grande valeur négative que dans la première même, ce qui accroît relativement le second terme de δH en le rendant de même signe que le premier. La forme explicite de la formule permet ainsi de lire aisément les causes qui influent sur cet élément important des appareils.

205. Pour apprécier l'étendue absolue de ces δH, il faut d'abord attribuer une valeur numérique au facteur $\frac{\Delta'}{N}$. Supposons-le égal à — 21 millimètres, ce qui est sa valeur moyenne dans les constructions. Alors les expressions contenues dans

la dernière colonne deviendront respectivement

$$+51^{mm},971.\delta i;\quad +39^{mm},287.\delta i;\quad +58^{mm},020.\delta i.$$

D'après le signe qui les affecte, lorsque la réfrangibilité considérée surpassera la réfrangibilité moyenne, ce qui rendra δi positif, H, considéré comme positif, s'accroîtra; ce qui, dans notre notation, signifie que les points oculaires correspondants s'écarteront du point oculaire moyen en se rapprochant de l'objectif. Au contraire, la réfrangibilité devenant moindre que la moyenne, δi sera négatif, H décroîtra, et les points oculaires correspondants se formeront plus près de l'objectif que le point oculaire moyen.

Admettons maintenant que, dans le cas d'intensité de la lumière qui émane des objets observés à travers l'instrument, les plus grandes valeurs sensibles de δi soient égales à $\pm 0,01$, ce qui est la moitié de celles qu'on leur trouve dans la lumière solaire directe la plus vive. L'étendue absolue des δH, dans les deux sens que nous venons de fixer, sera alors

$$\pm 0^{mm},51971;\quad \pm 0^{mm},39287;\quad \pm 0^{mm},580200.$$

Les points oculaires extrêmes ne s'écarteront ainsi que d'une fraction de millimètre, du point oculaire moyen où le centre de la pupille est placé; de sorte que les axes des pinceaux qui s'y croisent, seront reçus et embrassés par cet organe presque aussi complétement que s'il coïncidait avec chacun d'eux.

206. D'après la marche à la fois théorique et expérimentale, que nous avons suivie dans toute cette discussion, il était présumable que le type analytique général d'oculaire quadruple, exprimé dans le tableau qui la résume à la fin de ce mémoire, donnerait toujours directement des combinaisons

très-avantageuses pour la pratique, lorsqu'on y introduirait les valeurs particulières de grossissement et de distance focale totale, que l'on désirerait réaliser. Il s'est présenté une occasion de faire cette épreuve, et j'ai cru ne pas devoir la négliger, quoiqu'elle ne dût s'appliquer qu'à un cas fort restreint. L'administration de la marine française ayant demandé à M. Rossin une fourniture de lunettes à oculaire quadruple, pour le service des bâtiments de l'État, j'ai engagé cet artiste à essayer, pour ce travail, le premier système de construction que notre type général fournit. Et comme les données assignées étaient un grossissement de vingt-quatre fois, avec une distance focale d'objectif égale à -565^{mm}, j'ai introduit ces valeurs de N et de Δ' dans le type analytique, ce qui a donné les résultats suivants :

Éléments d'un oculaire achromatique quadruple, produisant un grossissement angulaire $N = +24$, *dans son application à un objectif individuellement achromatique, ayant une distance focale principale* $\Delta' = -565^{mm}$, *et une ouverture efficace* $2A_1 = 50^{mm}$.

			mm.
Distance de l'objectif à la première lentille oculaire A_2	h_1	=	+584,483
Distance de l'image objective en avant de cette première lentille	D	=	+ 19,483
Distance focale principale de la première lentille oculaire A_2	f_2	=	− 48,707
Distance de cette lentille au diaphragme qui la suit	H_2	=	− 53,135
Demi-diamètre de ce diaphragme pour la demi-ouverture A_1	δ_2	=	± 2,273
Distance de la première lentille oculaire A_2, à la deuxième A_3	h_2	=	+ 72,451
Distance focale principale de la deuxième lentille oculaire A_3	f_3	=	− 59,361
Distance de la deuxième lentille A_3 à la troisième A_4	h_3	=	+ 94,785
Distance focale principale de la troisième lentille A_4	f_4	=	− 59,300
Distance de la troisième lentille A_4 à la quatrième A_5	h_4	=	+ 54,508
Distance focale principale de la quatrième lentille A_5	f_5	=	− 29,949
Demi-diamètre du diaphragme placé à son foyer réciproque en supposant ${}_cX_m = 15°,30'$	δ_5	=	± 8,000
Distance du point oculaire au delà de la dernière lentille A_5	H	=	− 19,937
Longueur totale de l'oculaire quadruple	L	=	221,744
Demi-amplitude du champ apparent, en supposant ${}_cX_m = 15°,30'$	${}_cX$	=	38′,16″,79

La presque égalité de f_3 et de f_4 tient à la valeur particulière du grossissement N. Cette égalité serait rigoureuse si l'on avait pris $N = 24,746$. Mais il est avantageux pour l'exécution qu'il reste comme ici une très-petite différence entre f_3 et f_4. En effet, ayant en rigueur

$$f_3 = f_4 - 0^{mm},061,$$

on voit que, abstraction faite de son signe propre, f_3 est plus long que f_4 d'une quantité dont on peut à peine répondre dans l'exécution pratique. D'après cela, on n'aura qu'à travailler les deux lentilles sur une longueur de distance focale commune et égale à $-59^{m},330$ ou $-59^{m}\frac{1}{3}$ qui est la moyenne de leurs valeurs. Puis, quand elles seront exécutées et que les erreurs du travail auront établi presque inévitablement une petite inégalité entre elles, on choisira celle qui a la distance focale la plus longue pour en faire A_3, et celle qui l'a la plus courte pour en faire A_4. Mais cela suppose que l'artiste a un instrument avec lequel il peut mesurer ces distances focales avec précision.

207. Pour réaliser exactement les distances focales assignées par le calcul aux quatre lentilles, M. Rossin s'est astreint à prendre les mesures exactes de ces distances avec un instrument très-précis, qui a été imaginé à Paris par M. Silbermann, et que j'ai décrit dans le tome I[er] de mon Astronomie, page 646. Il a pu ainsi les rectifier successivement jusqu'à ce qu'elles fussent très-approximativement conformes aux nombres indiqués par le tableau. Il les a ensuite assemblées aussi bien que possible, aux intervalles fixés par le calcul, et il a également tâché de s'y conformer pour les places ainsi que pour les ouvertures des diaphragmes. Mais j'ai vu avec regret que les moyens pratiques, habituellement employés par les opticiens

pour régler ces trois sortes d'éléments, sont fort au-dessous de la précision qu'il serait à désirer qu'on apportât dans des déterminations pareilles; ce qui tient en partie au bas prix de ces instruments, mais beaucoup aussi, je crois, à ce qu'on ne les a jamais construits jusqu'ici que par des imitations routinières, et non d'après les indications du calcul.

M. Rossin a exécuté ainsi, sur ces mêmes données numériques, deux systèmes d'oculaires, les uns en cristal, les autres en crown-glass, le plus incolores qu'il a été possible de se les procurer. Voici quels ont été les résultats :

Chaque système d'oculaire, appliqué à la longueur focale d'objectif qui avait été assignée, a produit immédiatement un achromatisme aussi satisfaisant qu'on pouvait le désirer; et les lignes droites vues jusque sur les bords du champ restaient sans courbure sensible, quoiqu'il embrassât toute l'ouverture exprimée par la valeur de $\pm\, {}_{e}X$. Le grossissement, mesuré au dynamètre, s'est trouvé ne différer du nombre assigné 24 que par des fractions d'unité négligeables. Ces lunettes, comparées aux meilleures de même dimension que l'on ait pu se procurer, se sont trouvées au moins les égaler, si ce n'est leur être occasionnellement supérieures par la clarté et la netteté, même quand on avait soin d'échanger les objectifs, pour éviter les effets différents de leur influence propre. Mais, à identité de construction, les oculaires dont les lentilles étaient faites en cristal de roche se sont montrés indubitablement supérieurs à ceux où elles étaient construites en crown; soit que la duplication des rayons qui doit certainement s'y produire devienne insensible dans ces petits grossissements, soit qu'elle se trouve affaiblie, et en partie compensée, par l'opposition des angles prismatiques que chaque rayon ren-

contre en passant de la première lentille de l'oculaire aux trois dernières. Néanmoins il est bien vraisemblable que l'emploi des substances biréfringentes deviendrait dangereux dans la construction des oculaires à deux lentilles, destinés aux grands instruments astronomiques; tant à cause de la plus forte courbure de ces lentilles pour les grossissements considérables, que parce que dans le système le plus habituel de ces oculaires, celui de Campani, chaque rayon traverse les deux lentilles du même côté de l'axe central, de sorte que leurs effets prismatiques s'ajoutent, et enfin parce que le moindre écart des rayons transmis à l'œil, troublerait toutes les mesures des petits angles auxquels ces instruments sont destinés. Toutefois il serait utile que ce point fût vérifié par l'expérience. Les résultats de comparaison que je viens de rapporter m'ont été d'abord communiqués par M. Rossin et par M. Cauchoix. Mais je les ai constatés ensuite par des observations faites en commun avec M. Daussy, ingénieur du dépôt de la marine. De sorte que je ne puis douter que l'on n'arrive ainsi, en général, à réaliser directement d'excellents oculaires quadruples, pour des valeurs assignées de grossissement et de distance focale, en les calculant par les expressions contenues dans notre tableau. C'est là le but que je m'étais proposé d'atteindre, dans le long et pénible travail que l'on vient de lire.

Achevé d'imprimer le 6 mars 1843.

TICULARISÉES, 2[e] CONSTRUCTION.	EXPRESSIONS PARTICULARISÉES, 3[e] CONSTRUCTION.
S CONSTANTES FONDAMENTALES.	VALEURS DES CONSTANTES FONDAMENTALES.
$=\frac{1}{7}$; $\omega=0,1075$; $s'=\frac{5}{[illegible]}$; $u''=1,151636$.	$m=+0,42$; $\mu_1=0,6654$; $\mu_2=0,3131$; $s'=0,3523$; $\omega=0,15$; $u''=0,4051825$

ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DES OCULAIRES QUADRUPLES, OPÉRANT LA DISPERSION RECTILIGNE DES FOYERS DANS L'INSTRUMENT DONT ILS FONT PARTIE

	EXPRESSIONS GÉNÉRALES. Désignations des constantes fondamentales : m, μ_1, μ_2, ω, s' ou $\mu_1-\mu_2$, u		EXPRESSIONS PARTICULARISÉES, 1re CONSTRUCTION. Valeurs moyennes des constantes fondamentales : $m=+0{,}4$, $\mu_1=+\frac{1}{2}$, $\mu_2=+\frac{1}{5}$, $\omega=0{,}1075$, $s'=\frac{3}{10}$, $u''=+0{,}568962$		EXPRESSIONS PARTICULARISÉES, 2e CONSTRUCTION. Valeurs des constantes fondamentales : $m=+0{,}4$; $\mu_1=\frac{2}{3}$, $\mu_2=\frac{1}{3}$, $\omega=0{,}1075$; $s'=\frac{5}{12}$, $u''=1{,}151630$		EXPRESSIONS PARTICULARISÉES, 3e CONSTRUCTION. Valeurs des constantes fondamentales : $m=+0{,}42$, $\mu_1=0{,}6654$, $\mu_2=0{,}3131$, $s'=0{,}3523$, $\omega=0{,}15$, $u''=0{,}4951825$.	
Système binaire antérieur. Coefficients numériques..	$n=\frac{\omega\mu_1-\mu_2}{\mu_1\omega-\mu_2}$	$r=\frac{\mu_1\omega-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$	$n=-0{,}2205128$; $\log=\bar{1},3434338$	$r=-0{,}487500$; $\log=\bar{1},6879746$	$n=-0{,}2511682$; $\log=\bar{1},3999647$	$r=-0{,}428$ [illegible]; $\log=\bar{1},6314438$	$n=-0{,}2477012$; $\log=\bar{1},3940334$	$r=-0{,}6054215$; $\log=\bar{1},7820579$
Coefficients linéaires. Intervalle des deux lentilles.	$p=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{\mu_1 N-m}{\Delta}$	$q=-\frac{\mu_2(1-\omega)}{\mu_1-\mu_2}\cdot\frac{\Delta}{\mu_1 N-m}$; $q=h$	$p=\frac{3}{10}\frac{N-0{,}8}{\Delta}$; $\log=\bar{1},4771213$	$q=-\frac{119}{40}\frac{\Delta}{N-0{,}8}$; $\log=0{,}4734870$	$p=\frac{5}{12}\frac{N-0{,}6}{\Delta}$; $\log=\bar{1},6197887$	$q=-2{,}142\frac{\Delta}{N-0{,}6}$; $\log=0{,}3308195$	$p=0{,}3523\frac{N-0{,}63120}{\Delta}$; $\log=\bar{1},5469126$	$q=-2{,}412717\frac{\Delta'}{N-0{,}63120}$; $\log=0{,}3825063$
Distances focales principales des lentilles ..	$f_1=+\frac{\Delta}{\mu_1 N-m}$	$f_2=-\frac{\mu_2(\mu_1\omega-\mu_2)\Delta}{\mu_1(\mu_1-\mu_2)(\mu_1 N-m)}$	$f_1=\frac{2\Delta}{N-0{,}8}$; $\log=0{,}3010300$	$f_2=\frac{39}{16}\frac{\Delta'}{N-0{,}8}$; $\log=0{,}3869446$	$f_1=\frac{3}{2}\frac{\Delta}{N-0{,}6}$; $\log=0{,}1760913$	$f_2=1{,}712\frac{\Delta}{N-0{,}6}$; $\log=0{,}2335038$	$f_1=1{,}502855\frac{\Delta}{N-0{,}63120}$; $\log=0{,}1769172$	$f_2=1{,}933636\frac{\Delta}{N-0{,}63120}$; $\log=0{,}2863748$
Autre expression de f_2 en f_1........	....	$f_2=-\frac{\mu_2(\mu_1\omega-\mu_2)}{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}f_1$	....	$f_2=\frac{39}{32}f_1$; $\log=0{,}0859146$	....	$f_2=\frac{3{,}424}{3}f_1$; $\log=0{,}0574125$	....	$f_2=1{,}286642\,f_1$; $\log=0{,}1094576$
D, distance de l'image objective au-devant de la 1re lentille oculaire A_1	....	$D=-mf_1$	....	$D=-\frac{4}{10}f_1$; $\log=\bar{1},6020600$	....	$D=-\frac{4}{10}f_1$; $\log=\bar{1},6020600$	....	$D=-0{,}42\,f_1$; $\log=\bar{1},6232493$
h_1; intervalle compris entre l'objectif et cette 1re lentille.	....	$h_1=-\mu_1 Nf_1$	....	$h_1=-\frac{1}{2}Nf_1$; $\log=\bar{1},6989700$	....	$h_1=-\frac{2}{3}Nf_1$; $\log=\bar{1},8239087$	....	$h_1=0{,}6654\,Nf_1$; $\log=\bar{1},8230828$
H_1; distance de la lentille A_1 au diaphragme qui la suit...	....	$H_1=\frac{\mu_1 N}{\mu_1 N-1}f_1$	....	$H_1=\frac{N}{N-2}f_1$	....	$H_1=\frac{N}{\left(N-\frac{3}{2}\right)}f_1$	....	$H_1=\frac{N}{(N-0{,}1502855)}f_1$
δ_1; demi-ouverture de ce diaphragme, A, étant la demi-ouverture efficace de l'objectif.....	....	$\delta_1=\pm\frac{A_1}{\mu_1 N-1}$	....	$\delta_1=\pm\frac{2A_1}{N-2}$	....	$\delta_1=\pm\frac{3}{2}\frac{A_1}{\left(N-\frac{3}{2}\right)}$; $\log=0{,}1760913$	....	$\delta_1=\pm1{,}502855\frac{A_1}{N-1{,}502855}$; $\log=0{,}1769172$
Δ_1; distance focale *actuelle* du système binaire antérieur	....	$\Delta_1=-\frac{\mu_1(\mu_1\omega-\mu_2)\Delta}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1 N-m)}$ [illegible]	....	$\Delta_1=5{,}613306\frac{\Delta}{N-0{,}8}$; $\log=0{,}74921$[illegible]	....	$\Delta_1=3{,}761611\frac{\Delta}{N-0{,}6}$; $\log=0{,}5753792$	....	$\Delta_1=4{,}319154\frac{\Delta'}{N-0{,}63120}$; $\log=0{,}6353988$
Valeur de la quantité auxiliaire $\frac{n-1}{p}\frac{r-1}{q}$ ou ψ...	....	$\psi=\frac{\mu\mu_1(1-\omega)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1\omega-\mu_2)}$	....	$\psi'=-2{,}034188$; $\log=0{,}308391$[illegible]	....	$\psi'=-2{,}001869$; $\log=0{,}3014357$	....	$\psi=-2{,}356686$; $\log\psi=0{,}3723017$
Passage du système antérieur au système postérieur, conclu de la condition de continuité	....	$\frac{p''}{p'}=\frac{\mu_1 N}{(\mu_1 N-m)}\left(\frac{m}{\mu_1}+\frac{\omega}{\mu_2-\mu_1\omega}\right)$	....	$\frac{p''}{p'}=\frac{898}{585}\frac{N}{(N-0{,}8)}$; $\log=0{,}1861204$	....	$\frac{p''}{p'}=1{,}2028037\frac{N}{(N-0{,}6)}$; $\log=0{,}0801947$	....	$\frac{p''}{p'}=1{,}3344672\frac{N}{N-0{,}63120}$; $\log=0{,}1253079$
Système binaire postérieur. Coefficients numériques	$n''=-\frac{(1+2u''-s')}{1+(3+2u'')s'}$	$r''=\frac{[1-(1+2u'')s']}{3+2u''+s'}$	$n''=-0{,}819997$; $\log=\bar{1},9138125$	$r''=+0{,}08080868$; $\log=\bar{2},9074580$	$n''=-0{,}8993386$; $\log=\bar{1},9539233$	$r''=-0{,}0657985$; $\log=\bar{2},8182160$	$n''=-0{,}6808800$; $\log=\bar{1},8330706$	$r''=+0{,}0688044$; $\log=\bar{2},8376162$
Coefficients linéaires. Intervalle des deux lentilles.	$p''=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\left[m+\frac{\mu_1\omega}{\mu_2-\mu_1\omega}\right]\frac{N}{\Delta}$	$q''=-\frac{4(1+u'')(1+s')}{p''(1+s')(3+2u''+s')}$; $q=h$	$p''=\frac{898}{1950}\frac{N}{\Delta}$; $\log=\bar{1},6632417$	$q''=-2{,}315381\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}3646225$	$p''=0{,}5011682\frac{N}{\Delta}$; $\log=\bar{1},6999836$	$q''=-1{,}877263\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}2735251$	$p''=+0{,}4701328\frac{N}{\Delta'}$; $\log=\bar{1},6722205$	$q''=-2{,}226706\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}3476629$
Distances focales principales des lentilles	$f_3=\frac{q''}{r''-1}$	$f_4=\frac{q''}{n''-1}$	$f_4=2{,}518933\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}4012166$	$f_3=1{,}272189\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}1045518$	$f_4=1{,}761368\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}2458500$	$f_3=0{,}988377\frac{\Delta'}{N}$; $\log=\bar{1},9949226$	$f_4=2{,}391233\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}3786219$	$f_3=1{,}324727\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}1221263$
Autre expression de f_3 en f_4....	....	$f_3=\frac{[1+(3+2u'')s']}{3+2u''+s'}f_4$	....	$f_3=0{,}505051\,f_4$; $\log=\bar{1},7033352$	....	$f_3=0{,}561142\,f_4$; $\log=\bar{1},7490726$	....	$f_3=0{,}553993\,f_4$; $\log=\bar{1},7435042$
$-\frac{n''}{p''}$ Distance focale principale réciproque du système binaire postérieur........	....	$\frac{n''}{p''}=\left[\frac{1+u''}{1+s'}-\frac{1}{4(1+u'')}\right]q''$	....	$\frac{n''}{p''}=0{,}7690388\,q'$; $\log=1{,}8859484$	....	$\frac{n''}{p''}=0{,}9559048\,q$; $\log=\bar{1},9804147$	....	$\frac{n''}{p''}=0{,}6504100\,q''$; $\log=\bar{1},8131872$
Valeur absolue de la même......	....	....	....	$\frac{n''}{p''}=-1{,}780618\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}2505709$	....	$\frac{n''}{p''}=-1{,}794484\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}2539398$	....	$\frac{n''}{p''}=-1{,}4482720\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}1608501$
h_2; intervalle compris entre le système binaire antérieur et le système postérieur	....	$h_2=-\Delta_1-\frac{n''}{p''}$	....	$h_2=-\left(3{,}832688+\frac{[illegible]}{N-0{,}8}\right)\frac{\Delta}{N}$; $\log=$ [illegible]	....	$h_2=-\left(1{,}967127+\frac{2{,}256967}{N-0{,}6}\right)\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}3635252$	....	$h_2=-\left(3{,}870882+\frac{2{,}726248}{N-0{,}63120}\right)\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}4355653$
H; distance de la dernière lentille A_4 au point oculaire de l'instrument total......	....	$H=\frac{n''}{p''}+\frac{p'}{p''}\frac{\Delta}{N}+\frac{\Delta'}{N}$	....	$H=\left(0{,}8269231+\frac{0{,}4788842}{N}\right)\frac{\Delta'}{N}$; $\log=\bar{1},6801921$	....	$H=\left(0{,}70010093+\frac{0{,}5011654}{N}\right)\frac{\Delta'}{N}$; $\log=\bar{1},6999812$	....	$H=\left(0{,}8957137+\frac{0{,}527003}{N}\right)\frac{\Delta'}{N}$; $\log=\bar{1},7218131$
Valeur de la quantité auxiliaire $\frac{(n''-1)(r''-1)}{p''q''}$ ou ψ''......	....	$\psi=-(1+u'')$	....	$\psi''=-1{,}568562$; $\log=0{,}1955016$	....	$\psi'=-2{,}151635$; $\log=0{,}3327688$	....	$\psi''=-1{,}4951825$; $\log=0{,}1746942$
L; longueur de l'oculaire total......	....	$L=q'+h_2+q''$	....	$L=-\left(9{,}123069+\frac{6{,}8[illegible]}{N-0{,}8}\right)\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}8369976$	....	$L=-\left(5{,}986390+\frac{3{,}542166}{N-0{,}6}\right)\frac{\Delta}{N}$; $\log=0{,}7492689$	....	$L=-\left(7{,}510305+\frac{4{,}249153}{N-0{,}63120}\right)\frac{\Delta'}{N}$; $\log=0{,}6283025$
H_3; distance du dernier diaphragme en avant de la dern. lentille A_4.	....	$H_3=-f_3$						
δ_3; demi-diamètre de ce diaphragme en suppos. ${}_1X_n=\pm15°,30'$.	....	$\delta_3=\mp f_3\sin(15°.30')$; $\log\sin=\bar{1},4268988$						
${}_1X$; demi-amplitude du champ apparent en suppos. ${}_1X_n=\pm15°,30'$.	....	$\sin{}_1X=\pm\frac{\sin 15°.30'}{N}$; $\log\sin=\bar{1},4268988$						

Dans les diverses applications du type général exprimé par la première colonne, la valeur de l'indéterminée u'', qui assure l'achromatisme de l'oculaire, doit être déterminée par l'équation (C)'' de la page 273, § 178, en la réduisant en nombres pour les valeurs particulières attribuées aux constantes m, μ_1, μ_2 et ω, ainsi que nous en avons donné alors l'exemple numérique. Quoique ces constantes soient complétement arbitraires, en théorie, la nécessité d'approprier l'instrument aux convenances pratiques, et de rendre son emploi stable, exige qu'on les prenne toujours peu différentes des valeurs moyennes $m=0{,}4$; $\mu_1=0{,}5$, $\mu_2=0{,}2$; $\omega=0{,}1075$ que je leur ai attribuées dans la 1re construction de notre tableau.

Z

Fig. 1.

A

Z

Fig. 3.

A

Z

Fig. 2.

A

Fig. 6

MÉMOIRE

SUR LES APPARENCES

DES CORPS LUMINEUX EN REPOS

OU EN MOUVEMENT,

Par M. POISSON (1).

1. Soient M un point de la surface du corps lumineux A, et M′ un point de la surface d'un autre corps A′, sur lequel vient tomber une partie de la lumière émanée de A. Soient ds et ds' les éléments différentiels de ces deux surfaces, qui répondent respectivement à ces deux points. Par M et M′ menons, en dehors de A et A′, des normales MN et M′N′ à ces mêmes surfaces, et faisons

$$M'MN = \varphi, \quad MM'N' = \varphi', \quad MM' = r.$$

D'après la loi de l'émission, commune à la lumière et à la chaleur rayonnante, on aura

$$\frac{\lambda}{r^2} \cos\varphi \cos\varphi' \, ds \, ds',$$

(1) Ce mémoire a été trouvé dans les papiers de monsieur Poisson, et adressé à l'Académie par son fils aîné monsieur Charles Poisson officier d'artillerie.

pour l'expression de la quantité de lumière envoyée par l'élément *ds* à l'élément *ds'*, pendant un temps donné, que nous désignerons par τ, et durant lequel l'état lumineux de A au point M ne changera pas; λ étant une quantité positive, dépendante de cet état, et dont voici la signification :

Si l'on considère deux surfaces planes et parallèles, égales entre elles et à l'unité de surface, séparées l'une de l'autre par une distance égale à l'unité linéaire, comprises toutes deux dans un même cylindre perpendiculaire à leur direction commune; et, de plus, si l'on suppose que chacun des points de l'une de ces surfaces émette de la lumière, mais seulement dans cette direction normale, et en même quantité que celle qui est émise par le point M, suivant la direction MN, le coefficient λ exprimera la quantité de lumière émise par l'une des deux surfaces planes, et reçue par l'autre pendant le temps τ. Nous prendrons pour τ l'intervalle de temps suffisant et nécessaire pour que la lumière qui tombe sur la *rétine* produise la *vision*. Cet intervalle de temps n'est pas bien connu ; on sait seulement qu'il est très-court et n'excède pas une fraction de seconde extrêmement petite : il ne faut pas le confondre avec le temps pendant lequel l'impression de la lumière sur la rétine se prolonge, qui est aussi très-court, mais beaucoup moins que τ, et qui se manifeste par les cercles d'une lumière continue, que l'on produit en faisant tourner rapidement les corps incandescents. Cela étant, la quantité de lumière λ sera la mesure de l'intensité lumineuse ou de l'*éclat* de A au point M. Elle se compose d'une ou de plusieurs lumières simples : dans le cas d'une seule, la lumière sera celle de A au point M ; dans le cas de plusieurs, leur proportion déterminera la *teinte* de A à ce même point.

Quand cette proportion sera celle qui entre dans la composition de la couleur blanche, A sera *blanc* au point M, il sera *noir* quand on aura $\lambda = 0$. Si l'état lumineux de A au point M varie avec le temps, que je représenterai par t dans tout ce mémoire, λ sera une fonction de t; à cause de la petitesse de T, on pourra regarder cette fonction comme une quantité proportionnelle à T; et si alors l'on veut connaître la quantité de lumière envoyée par ds à ds', pendant le temps donné t', à partir de l'instant qui répond à t, il faudra multiplier la formule précédente par $\frac{dt}{T}$, et ensuite l'intégrer depuis t jusqu'à $t + t'$.

2. Par des intégrations relatives aux coordonnées de M et M', on déduira de cette même formule la quantité finie de lumière, que je désignerai par γ, et qui sera envoyée pendant le temps τ, par une portion S de la surface de A à une portion S' de celle de A'. Les limites des intégrales seront déterminées par les contours de S et S'. Dans toute leur étendue, les angles φ et φ' devront être aigus, et la droite MM' ne devra rencontrer S et S' qu'aux seuls points M et M'.

Afin de pouvoir effectuer ces intégrations dans chaque exemple, représentons par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de M, par x', y', z' celles de M', rapportées, les unes et les autres, aux mêmes axes, et dont l'origine commune sera un point O, choisi pour fixer les idées, dans l'intérieur de A'; nous aurons

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 ;$$

et en considérant r comme une quantité positive, les cosinus des angles que fait la droite MM' à chacune de ses extrémités, avec les prolongements de leurs coordonnées,

seront

$$\pm\frac{x'-x}{r},\quad \pm\frac{y'-y}{r},\quad \pm\frac{z'-z}{r};$$

les signes supérieurs ayant lieu à l'extrémité M, et les signes inférieurs à l'autre bout M'. Représentons aussi par

$$F(x,y,z)=0,\quad F'(x',y',z')=0,$$

les équations données des surfaces de A et A'; les cosinus des angles que font leurs normales en M et M' auront, comme on sait, pour expressions

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{u}\frac{DF}{dx}, & \frac{1}{u}\frac{DF}{dy}, & \frac{1}{u}\frac{DF}{dz}, \\ \frac{1}{u'}\frac{DF'}{dx'}, & \frac{1}{u'}\frac{DF'}{dy'}, & \frac{1}{u'}\frac{DF'}{dz'}, \end{array}$$

en faisant, pour abréger,

$$u^2=\left(\frac{DF}{dx}\right)^2+\left(\frac{DF}{dy}\right)^2+\left(\frac{DF}{dz}\right)^2,$$
$$u'^2=\left(\frac{DF'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{DF'}{dy'}\right)^2+\left(\frac{DF'}{dz'}\right)^2,$$

et donnant à chacune des quantités u et u' le signe nécessaire pour que ces angles se rapportent aux parties extérieures MN et M'N' des normales. Par conséquent, d'après une formule connue, nous aurons

$$\cos\varphi=\frac{1}{ru}\left[(x'-x)\frac{dF}{dx}+(y'-y)\frac{dF}{dy}+(z'-z)\frac{dF}{dz}\right],$$
$$\cos\varphi'=\frac{1}{ru'}\left[(x-x')\frac{dF'}{dx'}+(y-y')\frac{dF'}{dy'}+(z-z')\frac{dF'}{dz'}\right].$$

De plus, si l'on transforme les coordonnées rectangulaires de M et M' en coordonnées polaires dans les fonctions F

et F', et si l'on désigne par ρ et ρ' les rayons vecteurs OM et OM' de ces deux points, on aura

$$x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}=\rho\frac{dF}{d\rho},$$
$$x'\frac{dF'}{dx'}+y'\frac{dF'}{dy'}+z'\frac{dF'}{dz'}=\rho'\frac{dF'}{d\rho'};$$

et si l'on désigne, en outre, par q et q' deux quantités telles que l'on ait

$$x\frac{dF'}{dx'}+y\frac{dF'}{dy'}+z\frac{dF'}{dz'}=q\frac{dF'}{d\rho'},$$
$$x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=q'\frac{dF}{d\rho},$$

il en résultera plus simplement

$$\cos\varphi=\frac{1}{ru}(q'-\rho)\frac{dF}{d\rho},$$
$$\cos\varphi'=\frac{1}{ru'}(q-\rho')\frac{dF'}{d\rho'}.$$

Du point O comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère; soient $d\omega$ et $d\omega'$ les éléments de sa surface, compris entre les cônes qui ont le point O pour sommet, et les éléments ds et ds' pour bases; $\rho^2 d\omega$ et $\rho'^2 d\omega'$ seront les projections de ds et ds', sur les plans perpendiculaires à OM et OM' menés par les points M et M'; et l'on aura, en conséquence,

$$\rho^2 d\omega = ds\,.\cos \mathrm{OMN},$$
$$\rho'^2 d\omega' = -ds'.\cos \mathrm{OM'N'};$$

en observant que, d'après la position attribuée au point O, le premier des deux angles OMN et OM'N' sera aigu et le second obtus. Pour les expressions de leurs cosinus, nous

aurons d'ailleurs,

$$\cos \mathrm{OMN} = \frac{1}{u}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\,\frac{x}{\rho} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,\frac{y}{\rho} + \frac{d\mathrm{F}}{dz}\,\frac{z}{\rho}\right) = \frac{1}{u}\,\frac{d\mathrm{F}}{d\rho},$$

$$\cos \mathrm{OM'N'} = \frac{1}{u'}\left(\frac{d\mathrm{F}'}{dx'}\,\frac{x'}{\rho'} + \frac{d\mathrm{F}'}{dy'}\,\frac{y'}{\rho'} + \frac{d\mathrm{F}'}{dz'}\,\frac{z'}{\rho'}\right) = \frac{1}{u'}\,\frac{d\mathrm{F}'}{d\rho'}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, nous aurons

$$\gamma = \frac{\lambda}{r^2}\cos\varphi\cos\varphi'\,ds\,ds' = \frac{\lambda\rho^2\rho'^2}{r^4}(\rho - q')(q - \rho')\,d\omega\,d\omega';$$

et pour obtenir la valeur de γ, ce sera cette formule qu'il faudra intégrer, et dont il faudra étendre les intégrales à tous les points M et M′ des portions de surface S et S′. Si la surface de A n'est pas partout dans le même état lumineux, la quantité λ variera d'un point à un autre, et devra être donnée en fonctions des coordonnées de M′. Les intégrations dépendront de la loi de cette variation et des formes de A et A′, dans l'étendue de S et S′. Elles seront généralement très-compliquées; mais elles deviendront beaucoup plus simples, et l'on pourra effectuer entièrement celle qui se rapporte à S′, lorsque les dimensions de cette portion de surface seront très-petites par rapport à la distance qui sépare A de A′.

3. Dans ce cas, si l'on suppose que le point O fasse partie de S′, ou qu'il en soit très-rapproché, les coordonnées du point quelconque M′ de S′ seront aussi très-petites par rapport à chaque point M de S. Alors on aura à très-peu près $r = \rho$; et, d'après les expressions de $q\frac{d\mathrm{F}'}{d\rho'}$ et $q'\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}$, on pourra négliger, dans la formule précédente, q' à l'égard de ρ et ρ' relativement à q; ce qui la réduira d'abord à

$$\frac{\lambda\rho'^2 q}{\rho}\,d\omega\,d\omega'.$$

A ce degré d'approximation, on pourra aussi considérer S′ comme une portion de surface plane. Je représenterai l'équation de son plan par

$$\alpha' x' + \mathcal{E}' y' + \gamma' z' - l = 0,$$

en désignant par l une ligne donnée, et par $\alpha', \mathcal{E}', \gamma'$ les cosinus également donnés des angles que fait la normale M′N′ avec des droites menées par le point M′, suivant les prolongements des coordonnées x', y', z'. En égalant son premier membre à la fonction $F(x', y', z')$, on en conclura, par la différentiation,

$$\frac{dF'}{dx'} = \alpha', \quad \frac{dF'}{dy'} = \mathcal{E}', \quad \frac{dF'}{dz'} = \gamma',$$

et conséquemment

$$\rho' \frac{dF'}{d\rho'} = \alpha' x' + \mathcal{E}' y' + \gamma' z' = l,$$

$$q = (\alpha' x + \mathcal{E}' y + \gamma' z) \frac{\rho'}{l}.$$

De là, il résultera

$$\gamma = \frac{1}{l} (\alpha' G + \mathcal{E}' H + \gamma' K) \int \rho'^3 d\omega',$$

en faisant, pour abréger,

$$\int \frac{\lambda x}{\rho} d\omega = G, \quad \int \frac{\lambda y}{\rho} d\omega = H, \quad \int \frac{\lambda z}{\rho} d\omega = K.$$

Si l'on désigne par a l'aire de S′, la quatrième intégrale $\int \rho'^3 d\omega'$, comprise dans cette expression de γ et relative aux points de cette portion de surface, aura pour valeur le produit al. En effet, soit α l'angle compris entre le prolongement de OM′ et la normale M′N′, c'est-à-dire, le supplément de l'angle obtus OM′N′, on aura

$$\rho' \cos \alpha = \alpha' x' + \mathcal{E}' y' + \gamma' z';$$

d'où l'on tire

$$\rho' = \frac{l}{\cos\alpha},$$

d'après l'équation du plan de S'. Par le point O, menons à ce plan une perpendiculaire OO' qui le rencontre en O', puis un plan parallèle, et dans celui-ci une droite fixe OO_1. Désignons par η l'angle compris entre cette droite et la projection de OM' sur le plan parallèle à S'. L'élément différentiel $d\omega'$ de la surface sphérique, décrite du point O comme centre et d'un rayon égal à l'unité, aura $\sin\alpha d\alpha d\eta$; et de cette manière nous aurons

$$\int \rho'^3 d\omega' = l^3 \iint \frac{\sin\alpha d\alpha d\eta}{\cos^3\alpha}.$$

Faisons, en outre,

$$O'M' = u;$$

dans le triangle rectangle O'M'O', on aura

$$u = \rho' \sin\alpha = \frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

d'où l'on déduit

$$du = \frac{l d\alpha}{\cos^2\alpha},$$

et, par conséquent,

$$\int \rho'^3 d\omega' = l \iint u du d\eta.$$

Or, sous cette forme, on reconnaît que l'intégrale dont il s'agit, étendue à tous les points M' de S', est égale à la; ce qu'on voulait démontrer.

L'expression de γ se réduira donc à la formule

$$\gamma = a(\alpha' G + \beta' H + \gamma' K),$$

qui ne contient plus d'intégrales relatives aux points de S', et qui montre que, toutes choses d'ailleurs égales, la quan-

tité de lumière reçue par cette portion de surface est proportionnelle à son étendue a, et varie, à raison de α', $6'$, γ', avec la direction. En désignant par i l'angle aigu compris entre l'axe des z et la perpendiculaire au plan de S', extérieure par rapport à A'; et par α l'angle que fait la projection de cette droite sur le plan des x et y avec l'axe des x, on aura

$$\alpha' = \sin i \cos \alpha, \quad 6' = \sin i \sin \alpha, \quad \gamma' = \cos i,$$

au moyen de quoi la formule précédente se change en celle-ci :

$$\gamma = a[(G \cos \alpha + H \sin \alpha) \sin i + K \cos i], \qquad (1)$$

dans laquelle entrent explicitement les deux angles α et i, qui fixent la direction du plan de S'.

4. Relativement aux intégrales qui se rapportent aux points de S, je désigne par θ l'angle compris entre l'axe des z et le rayon vecteur ρ, et par l l'angle que fait la projection de ρ sur le plan des x et y avec l'axe des x; les variables ρ, θ, ψ, seront trois coordonnées polaires du point M; et l'on aura, en conséquence,

$$x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Je suppose que l'axe des z traverse S. Les équations de la surface de A et du contour de S donneront alors une seule valeur en fonction de ψ, soit pour l'angle θ, soit pour le rayon ρ; ce rayon disparaissant sous les signes S par la substitution des valeurs de x, y, z dans les intégrales G, H, K, dont il s'agit, on n'aura pas besoin de connaître sa valeur; je représente par ε celle de θ; on devra indiquer d'abord depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \varepsilon$, et ensuite, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$, en désignant à l'ordinaire par π le rapport de la

circonférence au diamètre ; et, de cette manière, on aura

$$\left.\begin{aligned} G &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \lambda \sin^2\theta \cos\psi\, d\theta\, d\psi, \\ H &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \lambda \sin^2\theta \sin\psi\, d\theta\, d\psi, \\ K &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \lambda \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Par un point C pris sur l'axe des z, dans l'intérieur de A pour fixer les idées, menons un plan parallèle à celui des x et y, et dans ce plan une parallèle CB à l'axe des x. L'angle compris entre la projection de OM sur ce plan et cette droite CB sera toujours l'angle ψ ; faisons, en outre,

$$\mathrm{CM} = \rho_1, \quad \mathrm{OCM} = \theta_1 ;$$

les trois coordonnées polaires du point M, dont l'origine est au point C, seront ρ_1, θ_1, ψ ; et l'équation de la surface de A donnera ρ_1 en fonctions des angles θ_1 et ψ. Si cette surface n'est pas partout également lumineuse, la quantité λ sera aussi donnée dans chaque cas, en fonction continue ou discontinue de ces deux angles. D'ailleurs, en faisant

$$\mathrm{OC} = c,$$

et considérant le triangle OCM, on aura

$$c \sin\theta_1 = \rho_1 \sin(\theta + \theta_1). \quad (3)$$

De cette équation, jointe à celle de la surface de A, on tirera donc la valeur de θ_1 en fonctions de θ et ψ ; par conséquent, on pourra regarder λ comme une fonction de ces deux variables ; au moyen de quoi les valeurs de G, H, K pourront être calculées, dans chaque cas, exactement ou par les quadratures doubles.

5. Si l'état lumineux de A est le même en tous les points

de sa surface, λ sera une quantité constante, les intégrations relatives à θ s'effectueront immédiatement, et il en résultera

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}\lambda\int_0^{2\pi}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\right)\cos\psi d\psi, \\ H &= \frac{1}{2}\lambda\int_0^{2\pi}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\right)\sin\psi d\psi, \\ K &= \frac{1}{2}\lambda\int_0^{2\pi}\sin^2\varepsilon d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dans ce cas, le calcul de la valeur de γ ne dépendra donc que de trois intégrales simples. Deux d'entre elles se réduiront à zéro, lorsque le corps A, également lumineux en tous ses points, sera, de plus, un solide de révolution, concave ou convexe, vers le point O, dont l'axe de figure tombera sur la droite CO, et que S aura pour contour la circonférence d'un cercle perpendiculaire sur CO. En effet, en prenant son centre pour le point C, et désignant son rayon par b, nous aurons

$$\sin\varepsilon = \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}};$$

l'angle ε étant donc constant, G et H seront zéro, et K aura pour valeur

$$K = \frac{\pi b^2\lambda}{c^2 + b^2}.$$

En vertu de la formule (1), il en résultera

$$\gamma = \frac{\pi a b^2 \lambda \cos i}{c^2 + b^2},$$

valeur indépendante de la forme de A, et qui ne changerait pas si son axe de figure se réduisait à zéro; en sorte qu'elle exprime, quelle que soit cette forme révolutive, la quantité de lumière qui serait envoyée à la surface a, par un cercle du rayon b, dont le centre est au point C, et le plan perpen-

diculaire à la droite CO qui va de ce point à cette petite surface, c'est-à-dire, par la projection de S sur ce plan. Elle est, comme on voit, proportionnelle au cosinus de l'inclinaison i du plan de a sur celui du cercle; mais cette loi est soumise à une restriction : elle suppose que le plan de a prolongé ne va pas traverser le cercle du rayon b, sans quoi l'angle φ' du n° 1 ne serait plus, comme il doit l'être, aigu pour tous les points M de S; cela exige que l'angle i ne surpasse pas ε, ou qu'on n'ait pas

$$\cos i < \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}.$$

Quand cette condition ne sera pas remplie, la valeur précédée de γ exprimera l'excès de la quantité de lumière envoyée par S à l'une des deux faces de a, sur la quantité que S envoie à l'autre face : dans le cas de $i = 90°$, on aura $\gamma = 0$; ce qui tient à ce que le plan de a prolongé, passant alors par le point C, et coupant S en deux parties égales, les deux faces de a seront également éclairées.

6. En général, les intégrales contenues dans les formules (4) ne contenant que l'angle ψ relatif au contour de S, on en conclut qu'elles auront les mêmes valeurs pour deux portions de surface lumineuses terminées à une même courbe, et appartenant néanmoins à des corps de formes différentes. Par conséquent, si la quantité λ est la même pour ces deux portions de surface, que chacune d'elles ne soit pas rencontrée plus d'une fois par toute ligne droite menée du point O, et que ni l'une ni l'autre ne soit traversée par le plan de a prolongé, elles enverront l'une et l'autre des quantités égales de lumière à a. C'est ce qui aura lieu, par exemple, pour une portion quelconque de surface courbe, satisfaisant à ces

conditions, et pour la projection sur un plan perpendiculaire à la droite CO; résultat qui tient à la loi de l'émission de la lumière semblable à celle de l'émission de la chaleur, dont nous sommes partis. Ainsi, pour appliquer les formules (4) et la formule (1) à un exemple, il nous suffira de prendre pour S une surface plane dont le plan soit perpendiculaire à CO.

Je supposerai, de plus, que la courbe qui termine S soit une ellipse, qui ait un de ses foyers au point C; son équation en coordonnées polaires sera

$$\rho_1 = \frac{b(1-e^2)}{1+e\cos\psi},$$

b désignant son demi-grand axe, e son excentricité, et en prenant la droite CB à partir de laquelle on compte l'angle ψ, dans la direction du plus petit rayon vecteur $b\,(1-e)$.

On aura, en même temps,

$$\sin\varepsilon = \frac{\rho_1}{\sqrt{c^2+\rho_1^2}} = \frac{b(1-e^2)}{\Delta},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{c^2+\rho_1^2}} = \frac{c(1+e\cos\psi)}{\Delta},$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta^2 = b^2(1-e^2)^2 + c^2(1+e\cos\psi)^2.$$

On tire de là

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2bc(1-e^2)\,(1+e\cos\psi)}{\Delta^2},$$

$$\cot\varepsilon = \frac{c(1+e\cos\psi)}{b(1-e^2)},$$

$$d\varepsilon = \frac{bce(1-e^2)\sin\psi d\psi}{\Delta^2}.$$

L'angle ε étant le même pour deux valeurs de ψ qui dif-

fèrent entre elles de 2π, puisque ces valeurs répondent à un même rayon vecteur de l'ellipse, il s'ensuit qu'en intégrant par partie, on aura

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \cos\psi d\psi = -\int_0^{2\pi} \sin\psi d\varepsilon.$$
$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \sin\psi d\psi = \int_0^{2\pi} \cos\psi d\varepsilon.$$

Car les termes, relatifs aux limites zéro et 2π, qui seraient compris en dehors des signes $\int$, disparaissent, ou parce qu'ils sont zéro, ou parce qu'ils se détruisent comme étant égaux et de signes contraires. Cela étant, les formules (4) deviendront

$$G = -\frac{1}{2}\lambda bc(1-e^2)\int_0^{2\pi}\frac{(e+\cos\psi)d\psi}{\Delta^2},$$
$$H = -\frac{1}{2}\lambda bc(1-e^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin\psi d\psi}{\Delta^2},$$
$$K = \frac{1}{2}\lambda b^2(1-e^2)^2\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\Delta^2}.$$

Cette valeur de H se réduit à zéro, à cause que l'intégrale qu'elle renferme se compose d'éléments qui sont deux à deux égaux et de signes contraires. Les éléments des deux autres intégrales étant deux à deux et de mêmes signes, on pourra réduire leurs limites à zéro et π, sauf à doubler les résultats; et comme on a identiquement

$$e + \cos\psi = \frac{1}{e}(1 + e\cos\psi - 1 + e^2),$$

les valeurs de G et H pourront s'écrire ainsi :

$$G = \frac{\lambda}{e}(1-e^2)\left(c\int_0^{\pi}\frac{b(1-e^2)d\psi}{\Delta^2} - b\int_0^{2\pi}\frac{c(1+e\cos\psi)d\psi}{\Delta^2}\right),$$
$$K = \lambda b(1-e^2)\int_0^{\pi}\frac{b(1-e^2)d\psi}{\Delta^2};$$

par la décomposition en fractions simples, on a

$$\int_0^\pi \frac{b(1-e^2)d\psi}{\Delta^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi}{b(1-e^2)+c(1+e\cos\psi)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi}{b(1-e^2)-c(1+e\cos\psi)\sqrt{-1}},$$

$$\int_0^\pi \frac{c(1+e\cos\psi)d\psi}{\Delta^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi}{b(1-e^2)+c(1+e\cos\psi)\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi}{b(1-e^2)-c(1+e\cos\psi)\sqrt{-1}}$$

or, si nous faisons

$$\tang \frac{1}{2}\psi = u,$$

nous aurons

$$\cos\psi = \cos^2\frac{1}{2}\psi - \sin^2\frac{1}{2}\psi = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$d\psi = \frac{2du}{1+u^2};$$

les valeurs de u correspondantes aux limites $\psi = 0$ et $\psi = \pi$ seront $u = 0$ et $u = \frac{1}{0}$; et il en résultera

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{b(1-e^2)\pm c(1+e\cos\psi)\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \frac{2du}{b(1-e^2)\pm(1+e)c\sqrt{-1}+u^2[b(1-e^2)\pm(1-e)c\sqrt{-1}]}.$$

En effectuant l'intégration relative à u, on aura

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{b(1-e^2)\pm c(1+e\cos\psi)\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{b^2(1-e^2)-c^2\pm 2bc\sqrt{-1}}};$$

d'où l'on conclura

$$\sqrt{1-e^2}\int_0^\pi \frac{b(1-e^2)d\psi}{\Delta^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{b^2(1-e^2)^2-c^2-2bc\sqrt{-1}}} + \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{b^2(1-e^2)-c^2+2bc\sqrt{-1}}},$$

$$\sqrt{1-e^2}\int_0^\pi \frac{c(1+e\cos\psi)d\psi}{\Delta^2} = \frac{\frac{1}{2}\varpi\sqrt{-1}}{\sqrt{b^2(1-e^2)-c^2+2bc\sqrt{-1}}} - \frac{\frac{1}{2}\varpi\sqrt{-1}}{\sqrt{b^2(1-e^2)-c^2+2bc\sqrt{-1}}},$$

ou bien en faisant disparaître les imaginaires par les transformations connues,

$$\sqrt{1-e^2}\int_0^\pi \frac{b(1-e^2)d\psi}{\Delta^2} = \frac{\pi\sqrt{r-p}}{r\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{1-e^2}\int_0^\pi \frac{c(1+e\cos\psi)d\psi}{\Delta^2} = \frac{\pi\sqrt{r+p}}{r\sqrt{2}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$c^2 - b^2(1 - e^2) = p,$$
$$[c^2 - b^2(1 - e^2)]^2 + 4b^2c^2 = r^2.$$

Au moyen de ces valeurs, celles de G et H deviennent

$$G = \frac{\pi\lambda\sqrt{1-e^2}}{er\sqrt{2}}(c\sqrt{r-p} - b\sqrt{r+p}),$$
$$K = \frac{\pi\lambda b\sqrt{1-e^2}}{r\sqrt{2}}\sqrt{r-p}.$$

En les substituant dans la formule (1) et observant que $H = 0$, il vient

$$\gamma = \frac{\pi a\lambda\sqrt{1-e^2}}{r\sqrt{2}}\left[b\sqrt{r-p}\cos i + (c\sqrt{r-p} - b\sqrt{r+p})\frac{\sin i \cos \alpha}{e}\right]$$

pour la valeur de γ qu'il s'agissait d'obtenir.

Pour $e = 0$, l'ellipse se change en un cercle, on a

$$r = c^2 + b^2, \quad \sqrt{r-p} = b\sqrt{2}, \quad \sqrt{r+p} = c\sqrt{2}.$$

La seconde partie du facteur renfermée entre les crochets se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, sa véritable valeur est zéro, et l'expression de γ coïncide, comme cela doit être, avec celle du numéro précédent. Pour toute autre valeur de la quantité e, γ varie avec l'*azimut* du plan de l'angle i, c'est-à-dire, avec l'angle α compris entre ce plan et celui des droites OC et CB; et dans chaque *azimuth* γ varie aussi avec la grandeur de cet angle, mais ce n'est pas quand $c = 0$, ou quand le plan de a est parallèle à celui de l'ellipse que γ atteint son *maximum*.

7. Quelle que soit la variation de l'état lumineux de A dans l'étendue de S, si les dimensions de cette portion de surface, comme celle de S', sont très-petites relativement à la distance qui sépare A de A', la variable θ et sa limite ε seront

de très-petits angles dans les formules (2), ce qui rendra les quantités G et H aussi très-petites relativement à K, et permettra de les négliger dans la formule (1). Dans ce cas, la quantité de lumière reçue par S′ sera donc proportionnelle au cosinus de l'angle d'*incidence* i sur son plan aussi bien qu'à l'étendue a de cette petite surface, en supposant toujours, comme précédemment, que le plan de a prolongé n'aille pas traverser S.

Si l'état lumineux de A est partout le même, ou que λ ne varie pas d'un point à un autre; si, de plus, on néglige le carré de θ, et que l'on mette l'unité au lieu de $\cos\theta$ dans la troisième formule (2); et si l'on fait

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \sin\theta d\theta d\psi = \Omega,$$

il en résultera

$$\gamma = a\lambda\Omega.$$

Or, en concevant un cône qui ait son sommet au point O et soit circonscrit au contour de S, et une sphère décrite du point O comme centre et d'un rayon égal à l'unité, Ω sera la partie de la surface comprise dans le cône, ou ce qu'on pourrait appeler l'*ouverture* de ce cône, laquelle est, par hypothèse, une très-petite partie de la surface sphérique entière, ou de 4π. Par conséquent, dans le cas d'un corps A dont tous les points sont également lumineux, la quantité de lumière envoyée par chaque portion S, de peu d'étendue sur la surface, à l'aire a, est indépendante, non-seulement de la forme de A, mais aussi du contour de S, et simplement proportionnelle à l'ouverture conique Ω; en sorte que toutes les petites portions de B, de forme et d'étendue différentes, qui répondent à des ouvertures coniques équivalentes, envoient, sous une même incidence i, des quantités égales de lumière

à une petite surface de grandeur donnée ; ce qui tient, comme le résultat énoncé au commencement du numéro précédent, à la loi d'émission de la lumière sur laquelle nos calculs sont fondés. On néglige ici l'inégalité de l'incidence i relativement aux rayons lumineux émanés de différents points de S ; inégalité qui serait une fraction très-petite, de l'ordre du rapport des dimensions de S et de S' à la distance de A à A', et dont on peut, en conséquence, faire abstraction.

Il est bien entendu que ce résultat, appliqué aux quantités de lumière envoyées par les différentes parties du disque solaire aux diverses régions du globe, suppose que l'on n'a point égard à l'absorption du fluide lumineux, soit dans l'atmosphère du soleil, soit dans celle de la terre.

8. En supprimant G et H dans la formule (1), mettant θ au lieu de $\sin\theta$ dans l'intégrale que K représente, et négligeant aussi le carré de θ dans la valeur de θ donnée par l'équation (1), on aura

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= a\cos i\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\lambda\theta\, d\theta\, d\psi,\\ \rho_1 \sin\theta_1 &= c\theta, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

pour le cas d'un état lumineux quelconque de la surface S, dont les dimensions sont très-petites par rapport à la distance c qui la sépare de S'.

Si le cône qui a son sommet au point O est tangent à la surface de A, et qu'on prenne pour S la portion de cette surface comprise dans ce cône, ou qui aura pour contour la ligne de contact du cône et du corps lumineux, γ sera toute la quantité de lumière envoyée par A à S'. Sa détermination dépendra de l'état lumineux des différents points de S' exprimé par la fonction λ de θ_1 et ψ, du contour de cette

surface ou de la fonction ε de ψ, et de la forme même de A ou de l'expression de ρ, en fonction de θ_1 et ψ.

En faisant $i = 0$, et supposant que A′ soit l'œil d'un observateur qui regarde A, et S′ l'ouverture de sa *pupille*, γ sera la quantité de lumière qui atteindra sa *rétine*, sous l'incidence perpendiculaire et dans le temps T nécessaire à la vision ; et si A est assez éloigné pour que l'observateur n'en puisse pas distinguer les diverses parties, comme cela a lieu, par exemple, à l'égard d'une étoile vue de la terre, γ exprimera, par sa grandeur, l'intensité lumineuse ou l'éclat de A, et par la proportion des couleurs simples dont se compose cette quantité de lumière, la *teinte* de ce même corps ; en sorte que si cette proportion est celle qui entre dans la composition de la lumière blanche, A paraîtra blanc, quelles que soient la diversité et la distribution des couleurs à sa surface. Lorsque ce corps s'éloignera ou se rapprochera de A′, le contour de S′ demeurera sensiblement le même sur la surface de A, et il est facile de voir que la valeur de γ, donnée par la première formule (5), variera, toute autre chose d'ailleurs égale, en raison inverse du carré de la distance c ; par conséquent l'éclat de A variera en intensité suivant la même loi, en conservant toujours la même teinte.

Soit que l'état lumineux des points de A change graduellement, soit que ce corps, en tournant sur lui-même, présente successivement des surfaces différentes à A′, la valeur de γ sera une fonction du temps t, et généralement l'éclat et la teinte de A ou de A′ variera sans cesse ; nous examinerons dans la suite, en ayant égard à la vitesse de propagation de la lumière, ces variations continuelles de l'apparence lumineuse d'un corps très-éloigné de l'observateur ; l'exemple

suivant de l'application des formules (5), se rapportera encore au cas d'un corps en repos, et dont l'état lumineux est invariable.

9. Supposons que A soit un ellipsoïde, qui a son centre au point C. Par ce point élevons une droite CD perpendiculaire au plan de CO et CB; supposons aussi que A ait ses trois axes de figure dirigés suivant ces trois droites; et désignons leurs demi-longueurs par $\frac{b}{\sqrt{m}}$, $\frac{b}{\sqrt{n}}$, b, correspondant respectivement à CB, CD, CO. En représentant par x_1, y_1, z_1, les trois coordonnées d'un point quelconque de la surface de A, rapportées à ces mêmes droites, elle aura pour équation

$$mx_1^2 + ny_1^2 + z_1^2 = b^2.$$

D'après le n° 4, les coordonnées polaires de M, dont l'origine est au point C, sont le rayon vecteur ρ_1, et les deux angles θ_1 et ψ comptés à partir de CO et de CB, qui déterminent la direction ; on aura donc

$$x_1 = \rho_1 \sin\theta_1 \cos\psi, \quad y_1 = \rho_1 \sin\theta_1 \sin\psi, \quad z_1 = \rho_1 \cos\theta,$$

et par conséquent

$$\rho_1^2 \sin^2\theta_1 (m\cos^2\psi + n\sin^2\psi) + \rho_1^2 \cos^2\theta_1 = b^2;$$

d'où l'on déduira, au moyen de la seconde formule (5)

$$c^2\theta^2 (m\cos^2\psi + n\sin^2\psi - 1)\sin^2\theta_1 + c^2\theta^2 = b^2 \sin^2\theta_1, \quad (6)$$

pour l'équation qui fera connaître l'angle θ_1 en fonction de θ et ψ.

Quant à la valeur de ε, pour la déterminer, je transporte l'origine des coordonnées du point C au point O, sans

changer leur direction ; celles du point M seront x, y, z ; et en mettant θ et l'unité au lieu de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, nous aurons (n° 4)

$$x_1 = x = \rho\theta\cos\psi, \quad y_1 = y = \rho\theta\sin\psi, \quad z_1 = c - z = c - \rho.$$

En substituant ces valeurs de x_1, y_1, z_1, dans l'équation de la surface de A, il vient

$$\rho^2[(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)\theta^2 + 1] - 2c\rho + c^2 = b^2;$$

d'où l'on tirera, en général, deux valeurs réelles ou imaginaires du rayon vecteur ρ ou OM. Mais relativement à la ligne de contact de A et du cône qui a son sommet au point O, elles devront se réduire à une seule ; et cette ligne étant le contour de S, il faudra qu'elles soient égales pour $\theta = \varepsilon$; ce qui exige que l'on ait

$$c^2 + (b^2 - c^2)[(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)\theta^2 + 1] = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\varepsilon^2 = \frac{b^2}{c^2(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)},$$

en mettant au dénominateur de cette fraction, c^2 au lieu de $c^2 - b^2$.

Il faut aussi faire une hypothèse sur la variation de λ d'un point à un autre de S. Je prendrai pour cette quantité une fonction des cosinus des angles que fait le rayon vecteur CM avec les trois axes de l'ellipsoïde, la voici :

$$\lambda = g\frac{x_1^2}{\rho_1^2} + h\frac{y_1^2}{\rho_1^2} + k\frac{z_1^2}{\rho_1^2};$$

g, h, k, désignant trois constantes positives, afin que la valeur de λ ne soit négative pour aucun point de S, et dont

chacune représente une quantité de lumière d'une grandeur et d'une teinte données.

Cet exemple est choisi, relativement à la forme de A et à son état lumineux, de manière que les intégrations indiquées dans la première formule (5) puissent s'effectuer sous forme finie.

En effet, d'après les premières valeurs de x_1, y_1, z_1, citées dans ce numéro, nous aurions

$$\lambda = (g\cos^2\psi + h\sin^2\psi - k)\sin^2\theta_1 + k,$$

ou bien, en vertu de l'équation (6),

$$\lambda = \frac{(g\cos^2\psi + h\sin^2\psi - k)c^2\theta^2}{b^2 + (1 - m\cos^2\psi - n\sin^2\psi)c^2\theta^2} + k.$$

Après avoir substitué cette valeur de λ dans la première formule (5), je fais

$$\theta^2 = \varepsilon^2 u^2 = \frac{b^2u^2}{c^2(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)},$$

$$\theta d\theta = \frac{b^2 u du}{c^2(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)};$$

les limites relatives à la nouvelle variable u seront $u = 0$ et $u = 1$; celles qui se rapportent à ψ pourront être réduites à $\psi = 0$ et $\psi = \frac{1}{2}\pi$, sauf à quadrupler le résultat; et, de cette manière, on aura

$$\gamma = \frac{2kb^2 a\cos i}{c^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{m\cos^2\psi + n\sin^2\psi} + \frac{4b^2 a\cos i}{c^2}\int_0^1 Uu^3 du,$$

en faisant, pour abréger,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(g\cos^2\psi + h\sin^2\psi - k)d\psi}{[u^2 + (1 - u^2)(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)](m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)} = U.$$

Par les règles connues, on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{m\cos^2\psi + n\sin^2\psi} = \frac{\pi}{2\sqrt{mn}},$$

$$\mathrm{U} = \frac{\pi}{2u^2(n-m)}\left(\frac{f}{\sqrt{mn}} - \frac{u^2f'+f}{\sqrt{(u^2m'+m)(u^2n'+n)}}\right),$$

où l'on a fait, aussi pour abréger,

$$1-m=m', \quad 1-n=n', \quad n-m=m'-n'$$
$$n(g-k)-m(h-k)=f, \quad n'(g-k)-m'(h-k)=f'.$$

En prenant d'abord l'intégrale indéfinie, on aura, par les règles ordinaires,

$$\int \mathrm{U}u^3du = \mathrm{C} + \frac{\pi}{4(n-m)}\left[\frac{fu^2}{\sqrt{mn}} - \frac{f'\sqrt{(u^2m'+m)(u^2n'+n)}}{m'n'}\right.$$
$$\left.+\frac{f'(mn'+m'n)-2fm'n'}{2m'n'\sqrt{m'n'}}\log\left(2u^2\sqrt{m'n'}+mn'+m'n+2\sqrt{(u^2m'+m)(u^2n'+n)}\right)\right];$$

C étant la constante arbitraire. Et si l'on passe à l'intégrale définie, il vient

$$\int_0^1 \mathrm{U}u^3du = \frac{\pi}{4(n-m)}\left[\frac{f}{\sqrt{mn}} + \frac{f'(\sqrt{mn}-1)}{m'n'}\right.$$
$$\left.+\frac{f'(mn'+m'n)-2fm'n'}{m'n'\sqrt{m'n'}}\log\frac{\sqrt{m'}+\sqrt{n'}}{\sqrt{mn'}+\sqrt{m'n}}\right].$$

Au moyen de ces valeurs, on aura donc finalement

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{\pi b^2 a\cos i}{c^2}&\left[\frac{k}{\sqrt{mn}} + \frac{f}{(n-m)\sqrt{mn}} + \frac{f'(\sqrt{mn}-1)}{(n-m)m'n'}\right.\\ &\left.+\frac{f'(mn'+m'n)-2fm'n'}{(n-m)m'n'\sqrt{m'n'}}\log\frac{\sqrt{m'}+\sqrt{n'}}{\sqrt{mn'}+\sqrt{m'n}}\right],\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

pour la valeur de γ qu'il s'agissait d'obtenir.

On voit que cette quantité de lumière est, comme on l'a

dit dans le numéro précédent, en raison inverse du carré de la distance c de A à A'. On voit aussi qu'elle se réduit à

$$\gamma = \lambda \Omega a \cos i,$$

comme dans ce numéro, lorsque A est partout également lumineux. Car pour appliquer la formule (7) à ce cas particulier, il faut faire les trois constantes g, h, k, égales entre elles dans la valeur qu'on a prise pour λ; d'où il résulte

$$\lambda = k, \quad f = 0, \quad f' = 0.$$

De plus, les deux demi-axes de la section de A passant par le point c et perpendiculaire à CO, étant égaux à $\frac{b}{\sqrt{m}}$ et $\frac{b}{\sqrt{n}}$, l'aire de cette ellipse est $\frac{\pi b^2}{\sqrt{mn}}$; et comme son contour, vu la grandeur de c par rapport à b, peut être pris pour la ligne de contact de A et du cône qui a son sommet au point O, il s'ensuit que l'ouverture conique, désignée précédemment par Ω, a le rapport de $\frac{\pi b^2}{\sqrt{mn}}$ à c^2 pour valeur; ce qui fait coïncider la valeur citée de γ avec celle qui se déduit de la formule (7).

10. Dans le cas de $n = m$, c'est-à-dire, dans le cas où A est un ellipsoïde de révolution dont l'axe de figure prolongé vient passer par le point O, la partie de cette formule (7) dépendante de f et f' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En faisant alors

$$n - m = \delta, \quad n' - m' = -\delta,$$

il en résultera

$$f = m(g - h) + (g - k)\delta,$$
$$f' = m'(g - h) - (g - k')\delta;$$

et en traitant δ comme un infiniment petit, on en conclura

$$\frac{1}{n-m}\left(\frac{f}{\sqrt{mn}}+\frac{f'(\sqrt{mn}-1)}{m'n'}\right)=\frac{g+h-2k}{2mm'},$$

$$\frac{f'(mn'+m'n)-2fm'n'}{(n-m)m'n'\sqrt{m'n'}}=\frac{2k-g-h}{m'^2},$$

$$\log\frac{\sqrt{m'}+\sqrt{n'}}{\sqrt{mn'}+\sqrt{m'n}}=-\frac{1}{2}\log m.$$

Par conséquent, la formule (7) deviendra

$$\gamma=\frac{\pi b^2 a\cos i}{c^2}\left[\frac{k}{m}+\frac{g+h-2k}{2m'}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\log m\right)\right].$$

En mettant $1-m'$ au lieu de m, et développant suivant les puissances de m', on a

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\log m=1+m'+\text{etc.}-1-\frac{1}{2}m'-\text{etc.};$$

et si l'on substitue cette valeur dans la formule précédente, et qu'on fasse ensuite $m'=0$, il vient,

$$\gamma=\frac{\pi b^2 a\cos i}{4c^2}(g+h+2k);$$

expression qui se rapporte au cas où A est une sphère du rayon b.

En désignant par e une constante positive, et supposant, par exemple, qu'on ait successivement

$$\lambda=e\cos^2\theta,\quad \lambda=e\sin^2\theta,$$

les valeurs correspondantes de γ se déduiront de celle qu'on vient d'écrire, en y faisant d'abord $g=h=0$, et $k=e$; puis $g=h=e$ et $k=0$; elles seront l'une et l'autre

$$\gamma=\frac{\pi e b^2 a\cos i}{2c^2},$$

c'est-à-dire, égales entre elles et à moitié de celle qui au-

rait lieu, si la sphère était partout également lumineuse, et que e fût la valeur constante de h, ou que les quantités f, g, h, fussent toutes les trois égales à e.

Si l'on fait $n = 1$ dans la formule (7), elle se rapportera encore à un ellipsoïde de révolution, mais dont le plan de l'équateur prolongé, et non le prolongement de l'axe de figure, comprendra le point O. Une partie de cette formule se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$; en développant suivant les puissances de $\sqrt{n'}$ le logarithme qu'elle renferme, on aura

$$\log \frac{\sqrt{m'} + \sqrt{n'}}{\sqrt{mn'} + \sqrt{m'n}} = (1 - \sqrt{m}) \sqrt{\frac{n'}{m'}}$$
$$+ \frac{1}{6}(2 + \sqrt{m})(1 - \sqrt{m})^2 \frac{n'}{m'} \sqrt{\frac{n'}{m'}} + \text{etc}\ldots$$

et en substituant cette dernière, réduisant et faisant ensuite $n' = 0$ et $n = 1$, on trouve

$$\gamma = \frac{\pi b^2 a \cos i}{c^2} \left[\frac{k}{\sqrt{m}} + \frac{f}{(1+\sqrt{m})^2 \sqrt{m}} - \frac{f'}{(1+\sqrt{m})m'} - \frac{f'}{b(1+\sqrt{m})^3} \right]$$

pour la valeur de γ relative à l'ellipsoïde dont il s'agit, et dans laquelle les valeurs de f et f' seront

$$f = g - k - m(h - k), \quad f' = m'(k - h).$$

En y faisant $m = 1$ et $m' = 0$, la quantité comprise entre les crochets se réduira à $\frac{1}{4}(g + h + 2k)$, et l'expression de γ coïncidera, comme cela doit être, avec celle qu'on a déjà déduite de la formule (7), pour le cas de la sphère, ou de $n = m = 1$.

11. Dans ce qui va suivre, nous appliquerons spécialement les formules (5) au cas où tous les points de chaque section de A par un plan passant par la droite CD sont dans

un même état lumineux, qui varie d'ailleurs d'une manière quelconque d'une section à une autre, et nous supposerons que ce corps A soit une sphère, dont le centre sera au point C et dont on représentera par b le rayon.

Pour faciliter cette application, il faudra transformer les variables θ et ψ, auxquelles se rapportent les intégrations, en deux autres, savoir, l'angle DCM que fait le rayon vecteur CM d'un point quelconque M de la surface de A avec la droite CD, et l'angle compris entre le plan de DCM et celui des deux droites CD et CO. Nous représenterons par u cet angle dièdre et par v l'angle DCM. Par hypothèse, la quantité de lumière λ sera une fonction de u; nous la désignerons par Fu. Les cosinus des angles que fait CM avec les trois droites CO, CB, CD, seront

$$\cos \mathrm{OCM} = \sin v \cos u, \quad \cos \mathrm{BCM} = \sin v \sin u, \quad \cos \mathrm{DCM} = \cos v.$$

Mais d'après ce que les angles θ_1 et ψ représentent (n° 4), ces cosinus auront aussi pour valeurs :

$$\cos \mathrm{OCM} = \cos \theta_1, \quad \cos \mathrm{BCM} = \sin \theta_1 \cos \psi, \quad \cos \mathrm{DCM} = \sin \theta_1 \sin \psi.$$

En égalant l'une à l'autre les deux valeurs de chaque cosinus, on formera donc trois équations entre u, v, θ, ψ, dont une sera la suite des deux autres, pour lesquelles nous prendrons

$$\cos v = \frac{c\theta}{b} \sin \psi, \quad \sin v \sin u = \frac{c\theta}{b} \cos \psi, \tag{8}$$

où l'on a mis à la place de $\sin \theta_1$ la valeur $\frac{c\theta}{b}$, donnée par la seconde formule (5).

Dans l'intégrale double que renferme l'autre formule (5), je considère d'abord l'intégrale relative à θ, et j'y mets pour θ sa valeur en fonction de la nouvelle variable v et de la

quantité ψ qui sera alors considérée comme une constante. D'après la première équation (8), on a

$$\theta^2 = \frac{b^2 \cos^2 v}{c^2 \sin^2 \psi},$$

et en différentiant par rapport à v et θ successivement,

$$\theta d\theta = - \frac{b^2 \sin v \cos v dv}{c^2 \sin^2 \psi}.$$

Par cette première transformation, l'intégrale double, relative à θ et ψ, se trouvera transformée en une autre qui se rapportera à v et ψ. Dans celle-ci, je considère l'intégrale relative à ψ, et j'y substitue pour ψ la valeur en fonction de la nouvelle variable u et de la quantité v regardée actuellement comme une constante. Les équations (8) donnent

$$\cot \psi = \operatorname{tang} v \sin u,$$

et par la différentiation, relative à ψ et u, on aura

$$\frac{d\psi}{\sin^2 \psi} = - \operatorname{tang} v \cos u du.$$

De cette valeur et de celle de $\theta d\theta$, on déduit

$$\lambda \theta d\theta d\psi = \frac{b^2}{c^2} \mathrm{F}u \sin^2 v \cos u dv du,$$

pour l'expression de la formule différentielle qu'il s'agissait de transformer. Cette expression multipliée par $a \cos i$ doit être la quantité de lumière envoyée par l'élément différentiel de la surface de A correspondant au point M, à la partie a considérée aussi comme infiniment petite, de la surface de A'; c'est ce que l'on vérifie facilement d'après la formule du n° 1, en observant que $b^2 \sin v\, dv\, du$ est la valeur de cet élément, et que l'on peut prendre c et i pour la distance et l'angle dé-

signés par r et φ' dans cette formule, et OCM, dont le cosinus est $\sin v \cos u$, pour l'angle φ.

Dans le cas de la sphère que nous considérons, la valeur de ε du n° 9 se réduit à $\frac{b}{c}$; ce qui montre que l'intégrale double, indiquée dans la première formule (5), doit s'étendre à tous les points de l'hémisphère terminé au plan des deux droites CD et CB; par conséquent, elle devra être prise depuis $v = 0$ jusqu'à $v = \pi$, et depuis $u = -\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $u = \frac{1}{2}\pi$, si l'on regarde l'angle u comme positif en allant de CO vers CB, comme négatif en allant de CO vers le prolongement de CB. L'intégration relative à v s'effectuera immédiatement; on aura

$$\int_0^{\pi} \sin^2 v dv = \frac{1}{2}\varpi;$$

et la première formule (5) deviendra

$$\gamma = \frac{\pi b^2 a \cos i}{2c^2} \int_{-\frac{1}{2}\varpi}^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{F}u \cos u . du. \tag{9}$$

L'expression de γ ne contiendra donc plus, dans le cas que nous considérons, qu'une intégrale simple, qui dépendra de l'hypothèse que l'on fera sur la fonction Fu. Si l'on désigne par g et h deux constantes positives, et que l'on suppose, par exemple,

$$\mathrm{F}u = g \sin^2 u + h \cos^2 u,$$

il en résultera

$$\gamma = \frac{\pi b^2 a \cos i}{3c^2}(g + 2h);$$

valeur qui coïncide avec celle qu'on a déjà trouvée pour le

cas d'une sphère partout également lumineuse, quand on y fait les constantes g et h égales entre elles.

Cette fonction $\mathrm{F}u$ peut être continue ou discontinue : si l'on désigne par $6'$ et $6''$ deux angles compris entre $\pm \frac{1}{2}\varpi$, et par K une constante positive, on pourra prendre, par exemple, $\mathrm{F}u = \mathrm{K}$, depuis $u = 6$ jusqu'à $u = 6'$, et $\mathrm{F}u = 0$, pour toute autre valeur de u; ce sera le cas où la sphère A serait complétement obscure dans toute son étendue, excepté dans un angle dièdre $6' - 6$, dont tous les points seraient également lumineux; les limites de l'intégrale relative à u se réduiront alors à $u = 6$ et $u = 6'$, et il en résultera

$$\gamma = \frac{\pi b^2 a \mathrm{K} \cos i}{2c^2} (\sin 6' - \sin 6).$$

12. Soit que la fonction $\mathrm{F}u$ soit continue, ou qu'elle soit discontinue, il faudra toujours, par sa nature, qu'elle satisfasse à cette condition

$$\mathrm{F}(u + 2\pi) = \mathrm{F}u,$$

puisque ces deux valeurs répondront, quel que soit l'angle u, à une même section de A.

Cela étant, on aura, d'après une formule connue (*),

$$\mathrm{F}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum\int_0^{2\pi} \mathrm{F}\alpha \cos n(u - \alpha) d\alpha;$$

n étant un nombre entier et positif, et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs de n, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

Je substitue cette expression de $\mathrm{F}u$ dans la formule (9); après quoi j'effectue l'intégration relative à u; et comme on a

(*) Théorie mathématique de la chaleur, page 278.

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos n(u-\alpha)\cos u\,du = \frac{2\cos\frac{1}{2}n\pi\cos u\alpha}{1-u^2},$$

cette formule devient

$$\gamma = \frac{b^2 a\cos i}{2c^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}\alpha d\alpha - \frac{b^2 a\cos i}{c^2}\Sigma\int_0^{2\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}n\varpi\cos u\alpha}{n^2-1}\mathrm{F}\alpha d\alpha.$$

Tous les termes de rang impair dans cette somme Σ sont zéro, excepté celui qui répond à $n=1$, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et dont la valeur est $-\frac{1}{4}\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{F}\alpha\cos\alpha d\alpha$. En mettant $2n$ au lieu de n dans les autres termes, nous aurons

$$\gamma = \frac{b^2 a\cos i}{2c^2}\left[\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\pi\cos\alpha\right)\mathrm{F}\alpha d\alpha - 2\Sigma\int_0^{2\pi}\frac{(-1)^n\cos 2u\alpha}{4n^2-1}\mathrm{F}\alpha d\alpha\right]\cdot(10)$$

la somme Σ s'étendant toujours à toutes les valeurs du nombre entier n, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$.

Si l'on prend pour $\mathrm{F}\alpha$ une constante K, tous les termes de cette somme s'évanouiront, d'après les limites des intégrales qu'ils contiennent, et la valeur de γ coïncidera avec celle qui a paru au cas où l'état lumineux de A est le même en tous les points. Si la valeur de $\mathrm{F}\alpha = \mathrm{K}$ a lieu seulement depuis $\alpha=6$ jusqu'à $\alpha=6'$, et que cette fonction soit zéro pour toute autre valeur de α, les limites zéro et 2π des intégrales se réduiront à 6 et $6'$, et en effectuant les intégrations, on aura

$$\gamma = \frac{\mathrm{K}b^2 a\cos i}{2c^2}\left[6'-6+\frac{1}{2}\pi(\sin 6'-\sin 6)-\Sigma\frac{(-1)^n}{n(4n^2-1)}(\sin 2n6'-\sin 2n6)\right]\cdot(11)$$

Pour que l'angle α, en allant de 6 à $6'$, ne passe pas plusieurs fois par une même valeur, il est nécessaire et il suffit qu'on ait $6'-6<2\pi$; en sorte que l'expression de γ que nous trouvons a lieu pour toutes les valeurs positives ou négatives de 6 et $6'$ qui satisfont à cette condition, et dont

la différence $\beta' - \beta$ est positive. Dans l'exemple du numéro précédent, ces angles ne doivent pas surpasser $\frac{1}{2}\pi$, abstraction faite du signe; ce n'est donc que quand ils ne sortiront pas des limites $\pm\frac{1}{2}\pi$, que la valeur précédente de γ et celle de ce numéro devront coïncider. Alors, en les égalant entre elles, et observant que β et β' sont deux quantités indépendantes l'une de l'autre, on en conclura deux équations semblables, l'une relative à β, savoir

$$\frac{1}{2}\pi\sin\beta = \beta - \sum\frac{(-1)^n \sin 2n\beta}{n(4n^2-1)}, \tag{12}$$

et l'autre qui répondrait à β' et qu'il sera inutile d'écrire.

Il est facile de voir que cette équation n'a pas lieu pour des valeurs de β plus grandes que $\frac{1}{2}\pi$, et par exemple, pour $\beta = \pi$. Elle se vérifie d'elle-même pour $\beta = 0$ et pour $\beta = \pm\frac{1}{2}\pi$. On la vérifie aussi dans toute la généralité, en la différentiant par rapport à β; ce qui donne

$$\frac{1}{2}\pi\cos\beta = 1 - 2\sum\frac{(-1)^n\cos 2n\beta}{4n^2-1},$$

et s'accorde avec une formule connue (*).

Si les angles β et β' sont compris entre $\pm\frac{1}{2}\pi$ et $\pm\frac{3}{2}\pi$, et

---

(*) Cette formule est comprise dans l'équation (21) du n° 30 du *Mémoire sur les intégrales définies* (18e cahier du *Journal de l'École polytechnique*), en y faisant

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \theta = 2\beta.$$

que la différence $\beta' - \beta$ soit toujours positive et ne surpasse pas 2π, la formule (11) devra encore subsister; mais dans ce cas, l'hémisphère de A, tourné vers A', étant complétement obscur, A' ne devra recevoir aucune quantité de lumière. En désignant par η et η' des angles compris entre $\pm \frac{1}{2}\pi$, et faisant

$$\beta = \pi + \eta, \quad \beta' = \pi + \eta',$$

dans la formule (11), il faudra donc qu'elle se réduise à zéro, et cela séparément pour la partie dépendante de η et pour celle qui dépend de η'; d'où il résultera deux équations semblables, dont il suffira d'en écrire une, savoir :

$$\eta - \frac{1}{2}\pi \sin\eta - \sum \frac{(-1)^n \sin 2n\eta}{n(4n^2 - 1)} = 0;$$

ce qui s'accorde avec l'équation (12) qui vient d'être vérifiée.

Il n'était pas inutile de vérifier ces diverses conséquences de la formule (10), avant d'appliquer cette expression de γ à des cas où la variable u se trouve remplacée par un angle qui pourra diminuer et croître indéfiniment.

13. Si A tourne autour de la droite CD et que l'on désigne par ζ l'angle décrit pendant le temps t par chaque section de ce corps passant par cette droite, celle qui fera l'angle u, au bout du temps t, avec le plan fixe des droites CD et CO, sera évidemment la même qui faisait l'angle $u - \zeta$ avec ce plan à l'époque de $t = 0$; par conséquent, lorsque l'état lumineux de chaque point de A n'éprouvera aucun changement pendant cette rotation, la quantité λ relative au point quelconque M sera une fonction donnée de $u - \zeta$. Mais quand l'état lumineux des points de A variera pendant ce mouvement, de manière, toutefois, qu'il soit encore le même, comme

précédemment, en tous les points d'une même section, la quantité λ dépendra en outre du temps t (1). On aura donc, dans ce cas général,

$$\lambda = f(u - \zeta, t);$$

f étant une fonction donnée, continue ou discontinue, par rapport à chacune des deux variables $u - \zeta$ et t, qui devra toujours satisfaire, quel que soit t, à la condition

$$f(u + 2\pi - \zeta, t) = f(u - \zeta, t).$$

Comme la fonction $F\alpha$ représente, dans la formule (10), ce que devient λ quand on y met α au lieu de u, il faudra donc remplacer $F\alpha$ par $f(\alpha - \zeta, t)$ dans cette expression de γ. Or, cette fonction et toutes les autres quantités comprises sous les signes $\int$, reprenant les mêmes valeurs toutes les fois que la variable α augmente ou diminue de 2π, il s'ensuit qu'on y pourra augmenter α d'une constante quelconque, sans changer les limites zéro et 2π des intégrales. Donc, après la substitution de $f(\alpha - \zeta, t)$ à $F\alpha$, on pourra remplacer α par $\alpha + \zeta$, et intégrer toujours depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = 2\pi$; au moyen de quoi, la formule (10) deviendra

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{b'a\cos i}{2c^2}\Big[\int_0^{2\pi} f(\alpha,t)\,d\alpha + \frac{1}{2}\pi\int_0^{2\pi}\cos(\alpha+\zeta)\,f(\alpha,t)\,d\alpha \\ - 2\sum\int_0^{2\pi}\frac{(-1)^n\cos 2n(\alpha+\zeta)}{4n^2-1}f(\alpha,t)\,d\alpha\Big].\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Elle fera connaître, à un instant quelconque, la quantité de lumière émanée pendant un temps τ extrêmement petit (n° 1) de l'hémisphère de A tourné à cet instant vers A'; laquelle quantité serait aussi celle qui atteindrait, au bout du temps τ, la quantité a de la surface de A', si la transmission de la lumière était instantanée. Vu l'extrême rapidité de cette

transmission, on n'aura aucune modification à faire subir à cette formule, dans les cas ordinaires où la distance c qui sépare A de A' n'est pas très-grande ; mais il n'en sera plus de même lorsqu'il s'agira d'un corps A excessivement éloigné de A', comme une étoile, par exemple, de l'œil d'un observateur placé à la surface de la terre ; et alors, ainsi qu'on a pu le voir, il faudra avoir égard, dans le calcul de la quantité de lumière qui parvient de A à A' au bout d'un temps donné, aux vitesses des divers rayons dont la lumière se compose, qui peuvent être inégales pour les rayons diversement colorés.

14. L'équation (1), d'où la formule (13) est dérivée, suppose les dimensions de A très-petites par rapport à la distance ; je les regarderai même comme insensibles, ce qui a effectivement lieu à l'égard des étoiles, dont le diamètre apparent, vu de la terre, échappe, par son extrême petitesse, à tous les moyens de le mesurer. Dans ce cas, on pourra admettre que les rayons de lumière, animés d'une même vitesse et qui partent en même temps de tous les points de l'hémisphère de A tourné vers A', parviennent aussi en même temps à A'. Cela étant, soit θ le temps qu'un rayon de lumière simple, ou composé de molécules qui ont toutes une même vitesse, emploie à aller de A à A', c'est-à-dire, le rapport de la distance c à cette vitesse. Il est évident que la quantité de cette lumière qui atteindra A' au bout du temps t est celle qui est partie, à l'époque correspondante au temps $t - \theta$, de l'hémisphère de A tourné à cette même époque vers A' et dans l'état lumineux où il se trouvait alors. Par conséquent, la quantité de lumière dont il s'agit se déduira de la formule (13), en y mettant $t - \theta$ au lieu de t. Afin de rendre les ré-

sultats plus simples, je supposerai uniforme la rotation de A autour de CD; pour fixer les idées, je supposerai aussi qu'elle ait lieu dans le sens où l'on compte les valeurs positives de l'angle u à partir du plan de CD et CO; la vitesse angulaire de ce mouvement sera une constante positive; je la désignerai par ω, ou par $\frac{2\pi}{\omega}$ la durée de chaque révolution de A autour de CD; et la quantité de lumière reçue par A' étant toujours désignée par γ, son expression sera

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{b^2 a \cos i}{2c^2}\Bigg[\int_0^{2\pi} f(\alpha, t-\theta)\,d\alpha + \frac{1}{2}\pi\int_0^{2\pi}\cos(\alpha+\omega t-\omega\theta)f(\alpha, t-\theta)\,d\alpha \\ - 2\sum \frac{(-1)^n \cos 2n(\alpha+\omega t-\omega\theta)}{4n^2-1} f(\alpha, t-\theta)\,d\alpha\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Je représenterai, pour plus de généralité, par μ, au lieu de sept, le nombre des rayons simples dont chacun aura une vitesse et une couleur déterminées, et je désignerai par $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_\mu$, les valeurs de θ qui leur correspondent, rangées par ordre de grandeur croissante, de sorte que θ_1 soit le plus petit et θ_μ le plus grand de ces μ intervalles de temps; la surface de A pouvant être diversement colorée dans les différentes parties, il faudra supposer que la fonction désignée par f ne soit pas la même pour les μ rayons simples; j'indiquerai par les caractéristiques $f_1, f_2, f_3, \ldots f_\mu$, les μ expressions différentes, c'est-à-dire, μ fonctions continues ou discontinues et données dans chaque exemple des deux variables $u - \omega t$ et t. Enfin, j'appellerai $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\mu$, ce que devient la formule précédente, lorsqu'on y remplace les lettres θ et f successivement par θ_1 et f_1, θ_2 et f_2, .. θ_μ et f_μ. Soit alors Γ la quantité totale de lumière qui tombera sur a au bout du temps t, nous aurons

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_\mu. \qquad (15)$$

Si la surface de A est d'abord complétement obscure, qu'à l'époque dont nous comptons le temps t elle devienne lumineuse, et qu'ensuite l'état lumineux de chacun de ses points demeure constant, il faudra prendre pour $f_1, f_2, f_3, \ldots f_\mu$ des fonctions qui soient zéro pour toutes les valeurs négatives de t, et dépendantes, pour les valeurs positives, successivement de $u - \omega t$, c'est-à-dire, de α dans la formule (14). En les désignant par $F_1\alpha$, $F_2\alpha$, $F_3\alpha$, .. $F_\mu\alpha$, pour $t > 0$, et l'une quelconque d'entre elles par $F\alpha$, cette formule deviendra

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{b^2 a \cos i}{2c^2}\Bigg[\int_0^{2\pi} F\alpha d\alpha + \frac{1}{2}\pi\int_0^{2\pi}\cos(\alpha + \omega t - \omega\theta)F\alpha d\alpha \\ - 2\Sigma\int_0^{2\pi}\frac{(-1)^n\cos 2n(\alpha + \omega t - \omega\theta)}{4n^2 - 1}F\alpha d\alpha\Bigg],\end{aligned}\right\}(16)$$

pour toutes les valeurs de t qui surpassent θ, tandis que l'on aura $\gamma = 0$ pour toutes celles qui seront moindres que θ.

Il en résulte qu'en déduisant les quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\mu$, de cette expression de γ, par les changements successifs de θ et F, en θ_1 et F_1, en θ_2 et F_2, .. en θ_μ et F_μ, la valeur de Γ sera nulle, tant qu'on aura $t < \theta_1$; égale à γ_1, depuis $t = \theta_1$ jusqu'à $t = \theta_2$; égale à $\gamma_1 + \gamma_2$, depuis $t = \theta_2$ jusqu'à $t = \theta_3$; ... et enfin à $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots \gamma_\mu$, ou à la formule (15), pour toutes les valeurs de t plus grandes que θ_μ. La formule (16) reprenant la même valeur toutes les fois que ωt augmente de 2π, c'est-à-dire, étant une quantité périodique, dont la période est égale à $\frac{2\pi}{\omega}$, ou à celle des révolutions de A, il s'ensuit qu'à partir de $t = \theta_\mu$, la quantité Γ de lumière qui tombe sur a sera aussi périodique et de cette même période.

Au bout d'un temps $t' > \theta_\mu$, supposons qu'il survienne,

par une cause quelconque, un changement subit dans l'état lumineux de A, de sorte que les fonctions $F_1\alpha$, $F_2\alpha$, .. $F_\mu\alpha$, se changent en $F'_1\alpha$, $F'_2\alpha$, .. $F'_\mu\alpha$; désignons par $F'\alpha$ l'une quelconque de ces nouvelles fonctions, et par γ' ce que γ devient quand on y met $F'\alpha$ au lieu de $F\alpha$; représentons aussi par γ'_1, γ'_2, γ'_μ, les quantités qui se déduiront de γ' par les changements successifs de θ et F', en θ_1 et F'_1, en θ_2 et F'_2, ... en θ_μ et F'_μ. La quantité Γ sera encore exprimée par la formule (15), depuis $t = \theta_\mu$ jusqu'à $t = t' + \theta_1$; elle le sera, depuis $t = t' + \theta_1$ jusqu'à $t = t' + \theta_2$, par cette formule, en y mettant γ'_1 au lieu de γ_1; depuis $t = t' + \theta_2$ jusqu'à $t = t' + \theta_3$, par cette même formule, en y substituant γ'_1 et γ'_2 à γ_1 et γ_2..; et enfin par la formule

$$\Gamma = \gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \ldots + \gamma'_\mu,$$

pour toutes les valeurs de t plus grandes que $t' + \theta_\mu$. Il en sera de même pour tous les autres changements qui pourront survenir ultérieurement dans l'état lumineux de A; mais, au reste, les effets de tous les changements brusques de cet état, aussi bien que ceux de ses variations graduelles, sont renfermés dans la formule (14), à raison de la discontinuité possible de la fonction f, par rapport à la variable t.

Remarquons encore que si au bout d'un temps donné t, la rotation de A autour de CD venait à changer, et que la vitesse angulaire en devînt subitement ω_1, il faudrait, pour avoir égard à cette circonstance, reprendre l'arc ζ au lieu de ωt, et mettre, en conséquence, ζ' à la place de $\omega(t-\theta)$ dans la formule (16), en désignant par ζ' ce que devient ζ quand on change t en $t-\theta$; puis considérer ζ comme une fonction discontinue de t, dont l'expression serait $\zeta = \omega t$, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_1$, et $\zeta = \omega t_1 + \omega_1(t - t_1)$, pour $t > t_1$: les valeurs

de ζ' se déduiraient de la première ou de la seconde de ces deux expressions, selon qu'on aurait $t - \theta < t_1$, ou $t - \theta > t_1$.

En multipliant les différentes hypothèses sur les formes des fonctions F_1, F_2, .. F_μ, on déduira des formules (15) et (16) des résultats très-variés ; mais les exemples suivants suffiront, je crois, pour montrer, sous le double rapport de l'éclat et de la coloration, les effets produits par sa rotation, dans les apparences lumineuses d'un corps observé d'une très-grande distance.

15. Je désigne par K_1, K_2, K_3, ... K_μ, des constantes positives qui expriment des quantités de lumière simple respectivement de la même couleur et de la même vitesse de propagation que $F_1\alpha$, $F_2\alpha$, $F_3\alpha$, ... $F_\mu\alpha$, et qui seront les valeurs de ces fonctions entre des limites données, en dehors desquelles chacune de ces fonctions sera supposée égale à zéro. Ainsi, on aura $F_1\alpha = K_1$ depuis $\alpha = 6_1$ jusqu'à $\alpha = 6'_1$, et $F_1\alpha = 0$ pour toutes les autres valeurs de α; de même $F_2\alpha = K_2$ depuis $\alpha = 6_2$ jusqu'à $\alpha = 6'_2$, et $F_2\alpha = 0$ en dehors de ces limites ; et ainsi de suite. Chacune des différences $6'_1 - 6_1$, $6'_2 - 6_2$, $6'_\mu - 6_\mu$, devra être positive et ne pas excéder 2π. Dans le cas où tous les angles 6_1, 6_2, .. 6_μ, seront égaux entre eux, ainsi que $6'_1$, $6'_2$, .. $6'_\mu$, la surface de A ne contiendra qu'une seule partie lumineuse, dont l'étendue angulaire sera l'excès de l'un des angles de la seconde série sur un de ceux de la première. En chaque point de cette portion de surface, la quantité γ aura $K_1 + K_2 + .. + K_\mu$ pour valeur ; et si l'on veut que A soit incolore, il faudra que les quantités données K_1, K_2, .. K_μ, entrent dans cette somme suivant les proportions nécessaires pour former de la lumière blanche ; mais, en général, cela n'empêchera pas, comme on va le voir, que

par l'effet de l'inégalité de vitesse des rayons de différentes couleurs, combinée avec la rotation de A, ce corps, vu à une grande distance, ne paraisse coloré.

Soient K, β, β', les quantités analogues aux précédentes, et relatives à la lumière représentée par $F\alpha$ dans la formule (16). On y fera donc $F\alpha = K$, depuis $\alpha = \beta$ jusqu'à $\alpha = \beta'$, et $F\alpha = 0$ pour toutes les autres valeurs de α; les limites zéro et 2π des intégrales se réduiront alors à β et β' ; et, en effectuant les intégrations, on aura

$$\gamma = \frac{Kb^2 a \cos i}{2c^2}\Big[\beta' - \beta + \frac{1}{2}\pi \sin(\beta' + \omega t - \omega\theta) - \frac{1}{2}\pi \sin(\beta + \omega t - \omega\theta)$$
$$- \sum \frac{(-1)^n \sin 2n(\beta' + \omega t - \omega\theta)}{n(4n^2 - 1)} + \sum \frac{(-1)^n \sin 2n(\beta + \omega t - \omega\theta)}{n(4n^2 - 1)}\Big].$$

En représentant par m et m' deux nombres entiers, et par ξ et ξ' deux angles positifs ou négatifs, mais plus petits que $\frac{1}{2}\pi$, abstraction faite du signe, on pourra toujours faire

$$\beta + \omega(t - \theta) = m\pi + \xi,$$
$$\beta' + \omega(t - \theta) = m'\pi + \xi'.$$

Le temps t étant, par hypothèse, plus grand que la plus grande θ des quantités qu'on devra mettre successivement à la place de t, et la vitesse angulaire ω étant regardée comme une quantité positive assez grande pour que les premiers membres de ces équations soient positifs, les nombres m et m' le seront aussi. Si les valeurs ξ et ξ' sont positives, m et m' exprimeront les plus grands multiples de π contenus dans ces premiers membres; quand ces valeurs seront négatives, ce sont $m - 1$ et $m' - 1$ qui exprimeront ces plus grands multiples; m et m' croîtront indéfiniment avec le temps t; mais il est bon d'observer que leur différence $m - m'$ ne pourra jamais avoir

que l'une des trois valeurs o, 1, 2; en effet, en retranchant l'une de l'autre les équations précédentes, il vient

$$6' - 6 = (m' - m)\pi + \xi' - \xi; \qquad (17)$$

or, l'angle $6' - 6$ doit être compris entre zéro et 2π, et $\xi' - \xi$ entre $\pm\pi$; d'où l'on conclut que dans le cas de $6' - 6 < \pi$, cette différence $m - m'$ sera zéro ou 1, selon que l'on aura $\xi' - \xi > 0$ ou < 0, et que dans le cas de $6' - 6 > \pi$, cette même différence sera égale à un ou à deux, selon que $\xi' - \xi$ aura une valeur négative ou positive.

Cela posé, nous aurons

$$\sin 2n(6 + \omega t - \omega\theta) = \sin 2n\xi,$$
$$\sin 2n(6' + \omega t - \omega\theta) = \sin 2n\xi';$$

et si nous mettons successivement ξ et ξ' au lieu de 6 dans la formule (12), nous en déduirons

$$\sum \frac{(-1)^n \sin 2n(6 + \omega t - \omega\theta)}{n(4n^2 - 1)} = \xi - \frac{1}{2}\pi \sin \xi,$$
$$\sum \frac{(-1)^n \sin 2n(6' + \omega t - \omega\theta)}{n(4n^2 - 1)} = \xi' - \frac{1}{2}\pi \sin \xi'.$$

On aura, en outre

$$\sin \xi = (-1)^m \sin(6 + \omega t - \omega\theta),$$
$$\sin \xi' = (-1)^{m'} \sin(6' + \omega t - \omega\theta).$$

Par conséquent, la valeur précédente de γ deviendra

$$\gamma = \frac{K\varpi b^2 a \cos i}{2c^2} T,$$

en faisant, pour abréger,

$$T = m' - m - \frac{1}{2}[1 + (-1)^m]\sin(6 + \omega t - \omega\theta) + \frac{1}{2}[1 + (-1)^{m'}]\sin(6' + \omega t - \omega\theta).$$

On vérifie sans peine que T est une quantité périodique qui reprend la même valeur, toutes les fois que t augmente

de $\frac{2\pi}{\omega}$; car, d'après ce que m et m' représentent, chacun de ces deux nombres augmente de deux unités, lorsque ωt s'accroît de 2π; au moyen de quoi la valeur de T est la même après et avant cet accroissement.

Nous examinerons en détail, dans les numéros suivants, les valeurs successives de T, pendant une période de temps égale à $\frac{2\pi}{\omega}$, et pour les différentes valeurs de ϵ, ϵ', t; ce qui nous fera connaître, pendant la durée de chaque rotation de A autour de CD, les variations des quantités de lumière $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\mu$, et conséquemment de Γ, en intensité et en coloration.

16. Supposons en premier lieu que toutes les différences $\epsilon'_1 - \epsilon_1$, $\epsilon'_2 - \epsilon_2$, etc., soient égales à 2π; ce qui est le cas où l'état lumineux de A est partout le même, et où la quantité λ relative à un point quelconque M de la surface de ce corps est une constante h qui a pour valeur

$$h = K_1 + K_2 + \ldots + K_\mu.$$

On fera alors $\epsilon' = \epsilon + 2\pi$ dans l'expression de T; il en résultera

$$2\pi = (m' - m)\pi + \xi' - \xi;$$

et comme $\xi' - \xi$ ne sort pas des limites $\pm \varpi$, il faudra que cette quantité soit nulle et que la différence $m - m'$ soit égale à deux, ou qu'on ait $m' = m + 2$. Ces valeurs de ϵ' et m' feront disparaître les deux derniers termes de l'expression de T, et réduiront celle de γ à

$$\gamma = \frac{\varpi K b^2 a \cos i}{c^2}.$$

On en déduira les valeurs de γ_1, γ_2, etc., par le chan-

gement de K en K_1, K_2, etc.; et l'on aura ensuite

$$\Gamma = \frac{\pi h b^2 a \cos i}{c^2};$$

ce qui est effectivement, d'après le numéro 10, la quantité constante de lumière qui tombe sur a dans le cas dont il s'agit.

17. Si toutes les différences $6'_1 - 6_1$, $6'_2 - 6_2$, etc., sont égales à π, et que de plus tous les angles 6_1, 6_2, etc., soient égaux entre eux, ainsi que tous les angles $6'_1$, $6'_2$, etc., ce sera le cas où l'un des hémisphères de A est complétement obscur, et l'autre également lumineux et de la même couleur dans toute son étendue, de sorte qu'en tous les points de la surface de celui-ci, on ait $\lambda = h$, comme dans le cas précédent. En faisant alors $6' = 6 + \pi$ dans l'expression de T, les deux sinus qu'elle renferme seront égaux et de signes contraires; d'après l'équation (17) on aura

$$\pi = (m' - m)\pi + \xi' - \xi;$$

pour cela il faudra qu'on ait $\xi' - \xi = 0$, et que la différence $m' - m$ soit égale à 1; il en résultera

$$T = 1 - \sin(6 + \omega t - \omega\theta);$$

et la valeur de γ pourra s'écrire ainsi :

$$\gamma = \frac{\pi K b^2 a \cos i}{2c^2}[1 - \cos\omega\theta \sin(6 + \omega t) + \sin\omega\theta \cos(6 - \omega t)].$$

On prend ici 6 pour la valeur commune des angles 6, 6_1, 6_2, etc., de manière que 6 soit à l'époque de $t = 0$, la distance angulaire de la section de A où commence la partie lumineuse, au plan fixe des droites CD et CO.

Les valeurs de γ_1, γ_2, etc., se déduiront donc de cette formule par le changement de K et θ en K_1 et θ_1, en K_2 et θ_2, etc.;

et si nous faisons, pour abréger,

$$K_1 \cos \omega\theta_1 + K_2 \cos \omega\theta_2 + \ldots + K_\mu \cos \omega\theta_\mu = H,$$
$$K_1 \sin \omega\theta_1 + K_2 \sin \omega\theta_2 + \ldots + K_\mu \sin \omega\theta_\mu = H,$$

on en conclura

$$\gamma = \frac{\pi b^2 a \cos i}{2c^2} [h - H \sin(6 + \omega t) + H' \cos(6 + \omega t)].$$

Or, on pourra toujours trouver un angle réel et une quantité réelle et positive, que je désignerai par χ et h', et tels que l'on ait

$$H = h' \cos \chi, \quad H' = h' \sin \chi,$$

au moyen de quoi la valeur de Γ prendra la forme

$$\gamma = \frac{\pi h b^2 a \cos i}{2c^2} - \frac{\pi h' b^2 a \cos i}{2c^2} \sin(6 + \omega t - \chi). \qquad (18)$$

Elle montre que la quantité de lumière qui tombe à une époque quelconque sur a, dans le cas que nous considérons, se compose de deux parties : l'une constante, et la même que si tous les points des deux hémisphères étaient également lumineux, mais que l'intensité lumineuse, mesurée par la constante λ, ne fût que moitié de h, ou de celle qui a lieu sur l'hémisphère éclairé ; l'autre additive ou soustractive, variable en intensité, qui passera deux fois par zéro et atteindra deux fois son *maximum*, pendant la durée de chaque révolution de A, tandis que la teinte demeurera toujours la même, et dépendra des proportions des lumières simples K_1, K_2, etc., dans la valeur de h'. Si A est une étoile vue de la terre, cette teinte pourra changer par l'effet d'un mouvement propre de A, qui augmentera ou diminuera tous les temps θ_1, θ_2, etc., ou même par suite du déplacement de la terre dans son orbite, mais fort peu dans ce second cas,

à moins que la vitesse ω de la rotation de A ne soit extrêmement rapide.

Pour que la portion de lumière d'intensité variable soit de la même couleur que celle dont l'intensité ne varie pas, et que la teinte de A paraisse, en conséquence, constamment la même, il faudra qu'on ait $h' = h$; ce qui ne peut avoir lieu exactement à moins que les temps θ_1, θ_2, etc., ne soient tous égaux, c'est-à-dire, à moins que tous les rayons simples de diverses couleurs ne se propagent avec la même vitesse. Toutefois, d'après les valeurs de H et de H', il est aisé de voir que l'on a

$$h'^2 = h^2 - g^2,$$

en désignant par g^2 une somme de termes analogues à $4\,K_1\,K_2 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$, et dont le nombre est $\frac{1}{2}\mu(\mu - 1)$, pour les μ lumières simples, prises deux à deux. Or, sans que les temps θ_1, θ_2, etc., soient égaux, sans même qu'ils diffèrent très-peu entre eux, il y a une infinité de cas dans lesquels g sera une partie assez peu considérable de h, et où conséquemment h' différera trop peu de h, pour que les changements de teinte de A puissent être observés; en sorte que si h est, par exemple, de la lumière blanche, ce corps paraîtra toujours à peu près blanc; ce qui n'empêchera pas que pendant la durée de chacune de ses révolutions, son intensité ne varie dans un très-grand rapport, et presque de zéro à un éclat plus ou moins considérable, selon la grandeur de h.

18. En conservant l'hypothèse du numéro précédent, supposons que A cesse de tourner et devienne subitement immobile, au bout d'un temps t_1 plus grand que t.

D'après ce qui a été dit à la fin du n° 14, la valeur de T

qu'on vient de trouver subsistera pour toutes les lumières simples K_1, K_2,... K_μ, jusqu'à l'époque qui répond à $t = t_1 + \theta$, et par conséquent, jusqu'à cette époque, la quantité de lumière Γ continuera d'être exprimée par la formule (18). Mais au delà cette valeur de T n'aura plus lieu pour la lumière K_1, dont la vitesse de propagation est la plus rapide; d'après le numéro cité, dans lequel il faudra faire $\omega =_1 0$, cette valeur devra être remplacée par celle-ci :

$$T = 1 - \sin(6 + \omega t_1);$$

on aura, en même temps,

$$\gamma_1 = \frac{\pi K_1 b^2 a \cos i}{2c^2}[1 - \sin(6 + \omega t_1)];$$

il faudra donc, à partir de $t = t_1 + \theta_1$, supprimer dans la formule (17) la partie dépendante de K_1; puis ajouter à cette formule, ainsi réduite, cette valeur de γ_1, pour avoir l'expression complète de γ, qui subsistera jusqu'à $t = t_1 + \theta_2$.

Au delà et jusqu'à $t = t_1 + \theta_3$, la valeur de Γ se déduira de la formule (18), en y supprimant les parties relatives à K_1 et K_2, ou provenant de γ_1 et γ_2, et les remplaçant par la valeur précédente de γ_1, et par

$$\gamma = \frac{\pi K_2 b^2 a \cos i}{2c^2}[1 - \sin(6' + \omega t_1)].$$

En continuant ainsi, on voit que l'intervalle de temps $\theta_\mu - \theta_1$ compris depuis $t = t_1 + \theta_1$ jusqu'à $t = t_1 + \theta_\mu$, se divisera en $\mu - 1$ parties $\theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_2, \ldots \theta_\mu - \theta_{\mu-1}$, pour lesquelles l'expression analytique de Γ ne sera pas la même, mais de manière cependant que la valeur de cette quantité de lumière n'éprouve aucun changement brusque, en passant d'une partie à la suivante. Au delà de $t = t_1 + \theta_\mu$, la quantité Γ sera constante,

et aura pour valeur

$$\Gamma = \frac{\pi h b^2 a \cos i}{2c^2}\left[1 - \sin(\beta + \omega t_1)\right].$$

Or, au bout du temps t_1, époque à laquelle la rotation de A a cessé et ce corps est devenu immobile, $\beta + \omega t_1$ est l'angle compris entre la section de A où commence la partie lumineuse de sa surface et le plan des droites CD et CO.

MÉMOIRE

SUR LA LATITUDE

DE L'EXTRÉMITÉ AUSTRALE

DE L'ARC MÉRIDIEN

DE FRANCE ET D'ESPAGNE,

Lu à la séance du 15 mai 1843,

PAR M. BIOT.

Lorsque, sur la demande du Bureau des longitudes, je fus envoyé, dans l'année 1825, en Italie, en Illyrie et en Espagne, pour compléter les observations du pendule sur le 45e parallèle, et sur la partie espagnole de notre arc méridien, un des objets de ma mission, et celui qui m'imposait le plus de responsabilité, c'était de profiter de mon séjour dans l'île de Formentera, le point le plus austral de notre arc, pour réobserver la latitude de cette station. A la vérité, dans le premier voyage que nous avons fait, M. Arago et moi, en Espagne, dans les années 1807 et 1808, cette

latitude avait été mesurée avec des soins et une persévérance qui devaient bien sembler suffire, et que je ne pouvais espérer d'égaler par mes seuls efforts. Car, pendant un séjour, où nous opérâmes d'abord en commun avec le commissaire espagnol, M. Chaix, et que M. Arago prolongea encore après mon départ pour la France, il avait été fait soixante-huit séries des deux passages, tant de la polaire que de β de la petite Ourse, comprenant ensemble près de quatre mille observations, dont la moyenne donnait 38°. 39′. 56″02 pour la latitude du point le plus austral de notre arc méridien; et l'on pouvait bien croire qu'un résultat ainsi établi avait toute la certitude désirable. Mais, malheureusement, à cette époque, on n'avait pas encore reconnu que les cercles répétiteurs les plus parfaits sont susceptibles d'erreurs constantes, en vertu desquelles le même cercle, érigé avec tous les soins possibles, peut donner, dans une même station, des distances zénithales toujours un peu trop fortes, ou toujours un peu trop faibles. De sorte que, si toutes ces distances sont mesurées d'un seul côté du zénith, l'erreur constante qui leur est commune reste tout entière dans leur moyenne, quel que soit leur nombre, sans qu'on puisse la détruire, ou seulement l'affaiblir, en les multipliant. Une pareille erreur pouvait donc exister dans notre latitude de Formentera, puisque, selon la pratique alors usitée, nous n'avions observé que des étoiles circompolaires, afin que leurs passages méridiens, étant pris successivement au-dessus et au-dessous du pôle, le résultat moyen devînt indépendant des petites incertitudes que l'on aurait pu craindre dans leurs déclinaisons absolues. Or, une fois notre cercle enlevé de la station, nous n'avions aucun moyen d'apprécier l'étendue de

l'erreur qu'il avait pu jeter dans notre latitude, ni même dans quel sens il l'avait affectée; et, quoique l'on dût présumer qu'elle devait être fort petite, la seule possibilité de son existence sur une station aussi importante que l'extrémité australe de l'arc mesuré, introduisait une incertitude du même ordre dans l'évaluation de son amplitude totale qui était le but final de toutes les opérations entreprises.

Le moyen de corriger cette erreur se tire de sa nature même. Puisque le cercle donne des distances zénithales constamment trop grandes ou trop petites, si on l'applique à des étoiles situées au sud du zénith, et dont la distance polaire soit bien connue, il fera paraître le zénith trop rapproché ou trop éloigné du pôle; mais il produira l'apparence inverse si on l'applique à des étoiles situées au nord de ce point. Opérant donc successivement dans ces deux sens sur des étoiles dont les hauteurs et l'éclat soient à peu près pareils, afin de rendre plus probable l'égalité des erreurs de l'instrument pour des couples ainsi choisis, leur influence se compensera par opposition dans les résultats moyens, et la latitude déduite de leur somme sera exacte. Mais on ne sera plus alors indépendant des incertitudes qui peuvent rester dans les déclinaisons absolues rapportées dans les catalogues d'étoiles, comme on pouvait espérer de l'être en n'employant que des étoiles circompolaires observées au-dessus et au-dessous du pôle. Cet inconvénient, toutefois, est incomparablement moindre que ne le serait le soupçon d'une erreur constante dont l'étendue, ainsi que le sens, seraient absolument inconnus, si l'on se bornait à observer d'un seul côté du zénith. Car, outre la petitesse des incertitudes que l'on peut aujourd'hui admettre sur les positions des étoiles qui

ont été déterminées dans les principaux observatoires de l'Europe, avec des instruments fixes de grandes dimensions, les astronomes paraissent être en voie de méthodes nouvelles qui les feraient complétement disparaître; et, lorsque les éléments rigoureux des positions auront été obtenus, rien ne sera plus facile que de les introduire dans le calcul des latitudes déjà observées, pour leur donner le dernier degré de précision que ne comportaient pas des données moins rigoureuses.

Mais, en supposant des observations de distances faites ainsi des deux côtés du zénith, il se présente encore un autre doute d'une importance très-considérable. Les cercles répétiteurs que l'on peut emporter, dans des voyages géodésiques, sont nécessairement de dimensions restreintes. Celui qui m'a servi avait été construit par M. Gambey pour le dépôt de la guerre : son diamètre était de quatorze pouces, ancienne mesure; il était muni d'une lunette remarquable par l'excellence de son objectif, lequel, avec une ouverture notablement plus grande qu'on n'a coutume de l'admettre pour ces instruments, supportait aussi un grossissement plus fort que l'ordinaire. Mais, malgré ces avantages réunis à la bonté de la construction que l'habileté de l'artiste devait faire supposer, peut-on espérer que des instruments d'un si petit diamètre donneront la latitude terminale d'un grand arc de méridien, avec le degré de précision qu'exige une opération pareille, et que l'on doit atteindre pour présenter des résultats acceptables dans l'état actuel de l'astronomie? Je crois que l'on peut répondre affirmativement à cette question, d'après une épreuve comparative que nous avons faite, M. Arago et moi, en 1818, à Dunkerque, où nous

avions été envoyés pour déterminer définitivement la latitude de cette extrémité boréale de l'arc méridien de France, concurremment avec les astronomes anglais, attachés à la mesure de l'arc d'Angleterre, qui en est le prolongement. Ces astronomes, d'ailleurs fort habiles, observaient les distances méridiennes des étoiles avec un grand secteur zénithal de Ramsden, le plus parfait, le plus admirable des instruments connus, et qui a été malheureusement détruit dans le dernier incendie de la Tour de Londres. Nous n'avions, nous, qu'un ancien cercle répétiteur de Lenoir, qui était, à la vérité, d'assez grande dimension, mais dont les détails nous désespéraient par leur manque de perfection, ou même par des accidents qu'il nous fallait aussitôt réparer, avec l'assistance des simples horlogers de la ville. Néanmoins, à force de multiplier les mesures de distances des deux côtés du zénith, en variant le plus possible le choix des étoiles, et les circonstances des observations, nous parvînmes à obtenir une latitude qui, échangée avec celle des observateurs anglais, sans aucune communication préalable, se trouva lui être absolument identique; résultat que, dans la trop juste défiance que nous inspirait notre instrument, nous aurions peut-être aussi difficilement espéré, qu'eux-mêmes s'y seraient peu attendus. Je sens, mieux que personne, la grande part qu'il faut attribuer, dans ce succès, à la rare sagacité d'observation du collègue auquel j'étais associé; mais, si rien ne saurait remplacer un pareil secours, l'excellence de l'instrument employé peut du moins en offrir quelque compensation, en rendant les difficultés moindres, et c'est le cas où je me suis trouvé à Formentera.

Toutefois, ne pouvant pas méconnaître la responsabilité

que j'allais encourir, soit que je trouvasse une latitude identique à celle de 1808, ou différente, je cherchai à m'aider de toutes les précautions qui pouvaient assurer le nouveau résultat, quel qu'il pût être; et, tant par le système d'observations auxquelles je m'arrêtai, que par divers perfectionnements que je pense avoir apportés à l'usage pratique de l'instrument, j'ai l'espérance d'y être parvenu.

J'étais assisté dans ce voyage par mon fils. Le gouvernement du roi avait mis à la disposition de l'opération la goëlette *la Torche,* commandée par M. Le Goarant de Tromelin, aujourd'hui capitaine de vaisseau, qui nous combla de prévenances, et nous aida de tout son pouvoir. Ce secours nous donna la possibilité de transporter, sans dommage, de France à Lipari, puis à Formentera, non-seulement nos appareils du pendule, notre cercle, notre lunette méridienne, mais jusqu'à de gros piliers de pierre qui lui servaient de supports, et une petite cabane disposée pour les opérations astronomiques, laquelle, érigée sur le sol de chaque station, nous offrait, en quelques heures, un excellent observatoire tout préparé. Arrivé dans l'île de Formentera, je retrouvai bientôt les mêmes bonnes gens chez lesquels nous avions séjourné, M. Arago et moi, dix-sept ans auparavant. Ils nous cédèrent aussi volontiers leur humble demeure, un peu étonnés que nous eussions eu besoin d'y revenir; et grâce à l'activité de notre commandant, ainsi qu'à la bonne volonté de tout l'équipage, dès le lendemain nous étions installés chez eux. On commença aussitôt les observations de la mesure du temps; puis, dès que les horloges furent réglées, on entreprit les mesures du pendule et de la latitude, qui se continuèrent sans interruption pendant tout le mois

de juin 1825. Un des officiers de la goëlette, M. Denans, aujourd'hui capitaine de corvette, vint partager notre solitude, et nous prêter son assistance, qui nous fut très-utile. Une escouade de matelots, dont faisaient partie le charpentier et l'armurier de la goëlette, resta près de nous sous une tente, non comme protection, ce qui eût été tout à fait inutile, mais pour nous aider dans nos manœuvres, et pour effectuer les réparations que notre observatoire nomade pouvait exiger. Les résultats donnés par les expériences du pendule ont été exposés dans le tome VIII des Mémoires de l'Académie, conjointement avec ceux qui avaient été obtenus dans les autres stations, soit du parallèle, soit du méridien prolongé jusqu'aux îles Shetland. Les nouvelles observations faites pour déterminer la latitude extrême de notre arc méridien sont donc les seules dont il me reste à parler.

Le point central de notre ancienne station, celui au-dessus duquel le cercle répétiteur avait été érigé, était marqué par une croix de fer, consacrée par l'évêque d'Ivice, et qui était restée intacte sous cette protection. Le nouveau cercle fut établi tout près de ce point, dans une situation plus boréale de $0''044$; de sorte qu'il faudra retrancher cette quantité de la nouvelle latitude pour la réduire à l'ancienne station. Après que toutes les rectifications nécessaires eurent été effectuées avec le plus grand soin, on procéda aux mesures de distances méridiennes avec diverses précautions que je vais indiquer.

D'après l'exactitude que j'avais reconnue aux divisions de notre cercle, dix ou douze observations d'un même arc se suivant sur son limbe, avec la lecture initiale et finale des quatre verniers, devaient évidemment donner des me-

sures angulaires moyennes aussi précises qu'on pouvait espérer de les obtenir par une application plus prolongée de l'instrument, dans les mêmes circonstances atmosphériques. Je m'astreignis donc à ne pas étendre les séries partielles beaucoup au delà de ce nombre de couples, en profitant de leur brièveté, pour les réitérer davantage sur des étoiles différentes, dans des circonstances diverses, tant de nuit que de jour, de manière qu'elles se trouvassent chaque fois en correspondance des deux côtés du zénith. Pour les observations de jour, je calculais d'avance les positions azimutales du limbe, et les directions zénithales de la lunette qui correspondaient aux diverses époques auxquelles j'espérais saisir l'étoile; et la lunette était si perçante que j'ai pu ainsi observer Rigel et Sirius au méridien, le 1er juillet, lorsque le second de ces astres précédait à peine le soleil à midi. Je n'avais tenté cette épreuve insolite que pour constater la puissance de l'instrument, et pour connaître les amplitudes extrêmes d'erreur que l'on pouvait avoir à craindre en se plaçant dans les circonstances d'observation les plus défavorables ; car, à ces heures du jour, le thermomètre s'élevait, dans notre cabane, jusqu'à 30° ou même 32° cent. Et, quoique l'on prît toutes sortes de soins pour faire communiquer aussi librement que possible l'air intérieur avec celui du dehors, les étoiles observées alors étaient agitées et voltigeantes comme une fumée; aussi ne pus-je obtenir, pour chacune d'elles, qu'un seul couple d'observations, ou deux au plus, dans quatre essais ainsi tentés. C'est pourquoi je ne les ai pas fait concourir à la détermination de la latitude; mais je les ai cependant calculées et rapportées avec les autres pour le but que j'ai tout à l'heure indiqué. Car, lorsque l'on compare

ces courtes séries entre elles, pour une même étoile, leurs écarts ne sont pas tels qu'on dût les exclure dans des observations ordinaires, puisqu'ils atteignent à peine 2″ autour de leur moyenne; et je ne me crois en droit de les rejeter que parce que toutes les séries faites dans des circonstances moins exceptionnelles, n'ont offert que des écarts beaucoup moindres, par l'effet de précautions que j'expliquerai dans un moment. Le nombre total de séries obtenues, tant de nuit que de jour, permet d'ailleurs ce choix ; car elles s'élèvent à 86 comprenant 1094 observations, dont je néglige seulement 14 de ce genre. Les déclinaisons des étoiles circompolaires offrant aujourd'hui peu d'incertitude, on n'en a observé que trois, savoir : la polaire inférieure de jour, avec β et γ de la petite Ourse supérieures de nuit. Mais, les déclinaisons au sud du zénith étant moins certaines, on a fait concourir de ce côté à la détermination de la latitude huit étoiles différentes, savoir : δ, η et ζ d'Ophiacus, α de la Vierge, β′ du Scorpion, θ du Centaure, Antarès, et α du Verseau, les unes observées de nuit, les autres de jour. Pour celles-ci, on les prenait toujours à de grands intervalles avant ou après midi, de manière que le soleil ne frappât point le cercle, et qu'il se fût établi préalablement une libre circulation entre l'air intérieur de la cabane et l'air du dehors.

La pratique habituelle du cercle répétiteur est sujette à deux genres d'erreurs, à la vérité très-petites, que l'on tâche toujours soigneusement d'éviter, et dont l'effet accidentel est de nature à s'entre-détruire dans un grand nombre d'observations faites des deux côtés du zénith. Mais je suis parvenu à les rendre tout à fait nulles individuellement; et il en est résulté, entre les séries relatives aux mêmes étoiles, une con-

cordance telle qu'on ne l'obtient pas, je crois, plus parfaite, en opérant avec des instruments fixes d'une grande dimension; car l'écart de ces séries autour de leur moyenne atteint très-rarement 1″.

La première de ces causes d'erreur, et la plus facile à éluder, provient du défaut d'horizontalité du fil transversal sur lequel on amène l'étoile dans les deux observations consécutives qui composent chaque couple. Quelque soin que prenne l'artiste pour rendre ce fil perpendiculaire au limbe, il lui est toujours quelque peu oblique. Cela oblige à placer l'étoile sur un même point physique de sa longueur dans les deux observations; ce que l'on réalise avec une approximation suffisante, en l'amenant toujours très-près du centre du réticule, et du même côté de ce centre, relativement au limbe. Mais il est difficile de ne pas faillir quelquefois à cette condition de correspondance dans un très-grand nombre d'observations pareilles, surtout lorsque les accidents de l'atmosphère y jettent des intermittences, ou forcent à les précipiter; et alors l'inégalité de hauteur des deux points du fil sur lesquels on a placé l'étoile dans un même couple, se reporte tout entière comme erreur dans l'arc parcouru sur le limbe divisé. On peut éviter ce danger en rendant le fil transverse rigoureusement perpendiculaire au limbe. Pour cela, mettez d'abord l'axe de rotation de l'instrument, et le limbe lui-même, dans une parfaite verticalité, de sorte qu'en tournant celui-ci dans tous les azimuts autour de l'axe, les niveaux et le fil à plomb suspendu aux pinces régulatrices (1) ne ma-

---

(*) Ces pinces doivent être à retournement, et munies de rappels, qui

nifestent aucune variation appréciable. Ceci constaté, dirigez la lunette du limbe vers un point fixe très-distant, situé près de l'horizon, et placez ce point sur le fil transversal tout près du centre du réticule d'un côté ou de l'autre; puis, faites mouvoir azimutalement le limbe par ses vis de rappel, de droite à gauche et de gauche à droite, de manière que le point de mire parcoure successivement les deux moitiés du champ apparent. Si le fil transverse est exactement horizontal, et si, en outre, il est compris dans un plan diamétral commun à l'oculaire et à l'objectif, comme il devrait l'être à la rigueur, l'objet le suivra toujours, et continuera de s'y projeter dans toute l'étendue du champ. Si le fil est seulement horizontal, mais situé hors d'un plan diamétral du système optique, ce qui est le cas le plus ordinaire, le point de mire, amené d'abord en coïncidence avec lui au centre du réticule, le quittera dans le mouvement azimutal, et s'en écartera progressivement de quantités égales à des distances égales du centre; au lieu que ces écarts seront iné-

---

permettent de transporter le point de suspension du fil à plomb, et le point où il vient battre, l'un et l'autre perpendiculairement au plan du limbe, de manière à vérifier l'exacte verticalité de celui-ci, en échangeant ces points après l'avoir fait tourner sur lui-même, comme je l'ai expliqué dans la deuxième édition de mon *Astronomie*, tome Ier, page 284. Pour rendre cette épreuve plus exacte, je fais porter les divisions auxquelles le fil s'applique, sur un appareil excentrique en forme de double I, qui permet de mettre, entre les points de suspension et de battement, un intervalle au moins double du diamètre du limbe. J'emploie aussi pour fil un simple fil de cocon, auquel est suspendu un très-petit poids. De cette manière on peut apprécier jusqu'à des secondes par le retournement réitéré.

gaux et de sens contraire des deux côtés du centre, lorsque le fil aura quelque obliquité. On pourra donc le rendre horizontal en tournant peu à peu le réticule jusqu'à ce que les caractères de symétrie soient réalisés. Alors, si l'on place le point de mire sur une des extrémités du fil, située à l'un des bords du champ, il devra se retrouver encore sur le fil quand on le fera passer au bord opposé; et, entre ces coïncidences extrêmes, il s'écartera progressivement du fil dans un même sens, suivant une courbe symétrique autour du centre du réticule, laquelle courbe deviendra conséquemment horizontale de part et d'autre de ce point, jusqu'à une distance d'autant plus grande que son maximum d'écart sera moindre. Donc, si la plaque qui porte le réticule admet un petit mouvement dans le sens vertical, il n'y aura qu'à rendre cet écart tout à fait nul, après avoir établi l'horizontalité du fil par la condition de symétrie que je viens d'expliquer, et le point de mire, placé sous le fil, le suivra pendant le mouvement azimutal dans toute l'étendue du champ. Lorsque ces conditions seront remplies, il deviendra indifférent d'amener les étoiles sous le fil transversal, d'un côté ou de l'autre du centre du réticule dans les observations de chaque couple, pourvu qu'on les place toujours très-près de ce centre, pour ne pas trop les écarter de l'axe optique. Et si, après ces dispositions préliminaires, on a encore soin de placer l'étoile du même côté physique du centre, comme on le fait habituellement, l'omission accidentelle de cette condition ne produirait qu'une erreur sans importance dans les résultats définitifs.

Dans le cercle répétiteur de M. Gambey qui avait été mis à ma disposition, la plaque métallique sur laquelle étaient

attachés les fils du réticule n'était pas mobile parallèlement au limbe. Mais après que j'eus amené le fil transversal à l'horizontalité, par le procédé expérimental expliqué tout à l'heure, je trouvai que la courbe symétrique décrite par le point de mire, en passant des extrémités du fil au centre du réticule, ne s'écartait du fil, dans sa flèche centrale, que de 11",4; de sorte qu'en la considérant comme circulaire vers cette partie de son cours, le défaut d'horizontalité résultant de sa courbure n'altérait pas les distances zénithales de $\frac{1}{100}$ de seconde, aux plus grandes distances du centre où je voulusse jamais opérer les bissections. Ceci put être complétement vérifié sur le ciel même; car lorsqu'on avait amené la polaire sous le fil transverse, près du centre du réticule, au moment de son passage au méridien, si l'on venait à faire mouvoir azimutalement le limbe, elle continuait de suivre le fil, en restant bissectée de part et d'autre du centre, jusqu'à des distances sans comparaison plus grandes que celles où il aurait été convenable de l'observer. On conçoit que, pour cette épreuve, le plan du limbe doit être amené à une exacte verticalité. Mais toutes mes observations ont été faites en m'astreignant à cette condition; et telle était la stabilité de notre établissement, qu'après y avoir assujetti le cercle il ne s'en écarta jamais que de quantités à peine sensibles, que j'avais constamment soin de rectifier au commencement des séries de chaque jour, lorsque je leur trouvais accidentellement quelque valeur.

Cette exacte horizontalité donnée au fil transversal m'a servi pour éviter l'autre cause d'erreur bien plus importante, qui me reste à décrire. Le cercle répétiteur que j'employais

était à niveau fixe, c'est-à-dire que le grand niveau parallèle au limbe était porté par l'axe de rotation, et le limbe s'y rattachait dans chaque observation impaire en s'appliquant par des vis de serrage contre une plaque verticale tenant à cet axe, lequel n'avait lui-même qu'une médiocre longueur. Or, quand on l'avait ainsi fixé, après avoir amené l'étoile dans le champ de la lunette, lorsqu'on faisait mouvoir ensuite la vis de rappel pour opérer la bissection, quelque délicatesse que l'on s'efforçât de mettre à la tourner, sans la pousser en avant ni la tirer en arrière, la bulle du niveau prenait presque toujours une position tant soit peu différente de celle qu'elle reprenait quand la main abandonnait la vis au moment où l'on notait le temps; et un effet tout pareil se produisait dans les observations paires quand la main touchait ou quittait la vis de rappel de la lunette; comme si le seul contact, quelque léger qu'on s'efforçât de le faire, imprimait toujours une très-petite flexion dans le sens vertical à l'ensemble de l'instrument. Mon fils, qui suivait constamment le niveau, m'avait averti de ces mouvements qu'il avait déjà remarqués dans nos précédentes stations; et il appliquait avec raison à chaque distance zénithale la division à laquelle la bulle du niveau s'était fixée avant que la main quittât la vis de rappel. Mais je pensai que les observations deviendraient plus sûres si l'on évitait complétement de pareils effets; et la rigoureuse horizontalité donnée au fil transversal m'en fournit un moyen bien simple. Car, me trouvant alors seulement astreint à opérer les bissections très-près du centre du réticule et d'un même côté de ce centre, mais nullement au même point physique du fil, j'amenais l'étoile avec la vis de rappel non sur le fil même, mais sur son bord supérieur ou inférieur, selon

qu'elle descendait ou qu'elle montait en apparence, me servant du mouvement azimutal pour la mettre suffisamment près du centre; puis je quittais la vis de rappel, et, lisant le temps sur l'horloge, j'attendais, en comptant les secondes, que la bissection se fût rigoureusement opérée dans l'état de liberté de l'instrument; après quoi la division du niveau où la bulle se fixait, depuis que je l'avais abandonné, s'appliquait sans aucun doute à la distance zénithale. Or, le résultat de cette pratique fut de faire disparaître ces discordances inexplicables que tous les observateurs sincères reconnaissent avoir accidentellement éprouvées entre les séries d'une même étoile en faisant usage du cercle répétiteur, et de réduire leurs écarts aux limites d'oscillations restreintes que l'on ne peut éviter même avec de grands instruments fixes. Cela peut se vérifier à l'aide du tableau général annexé, sous la lettre C, à la fin de ce mémoire, lequel contient les résultats successivement obtenus par toutes les séries observées sans aucune exception. Pour cela, j'en ai extrait les séries relatives à chaque étoile qui avaient été obtenues tant avant qu'après cette modification, puis je les ai rassemblées par groupes, en séparant ces deux phases; et j'ai calculé, pour chaque groupe, les écarts partiels de chaque série autour de la latitude moyenne donnée par leur ensemble, afin que ces écarts fussent indépendants des positions absolues attribuées à chaque étoile. Les résultats ainsi obtenus sont réunis à la fin de ce mémoire dans le tableau D (1). En examinant d'abord les

---

(1) J'ai effectué la rectification de l'horizontalité du fil transversal, le 10 juin, avant les séries de ce jour, et j'ai marqué alors sur le registre la facilité qui en résultait pour opérer les bissections. C'est pourquoi j'ai sé-

effets de cette bissection sur les quatorze premières séries qui ont été faites avec de grands soins, mais en touchant l'instrument, comme à l'ordinaire, on y trouve des amplitudes d'écart qui s'élèvent deux fois à $\pm 1''7$, les autres restant toutes au-dessous de cette limite. Cela ne paraîtra pas bien extraordinaire, si l'on considère que l'on rencontre des écarts de cet ordre entre des séries beaucoup plus prolongées de la polaire, observées autrefois par M. Arago à cette même station, lesquelles sont, je crois, les plus parfaites qui aient jamais été obtenues avec le cercle répétiteur, parmi celles que leurs auteurs ont fidèlement rapportées. Mais, dans les soixante-six séries postérieures à la rectification, pour lesquelles l'instrument a été tout à fait libre, les écarts qui atteignent $1''$ sont des exceptions très-rares. Car, en les relevant individuellement pour les observations faites, tant de nuit que de jour, on en trouve d'abord du côté du nord, sur trente-trois séries, seulement six ayant les valeurs partielles suivantes :

″	
— 1,127	β petite Ourse supérieure : de nuit, 12 séries.
+ 1,347	
— 1,060	
— 1,094	γ petite Ourse supérieure : de nuit, 10 séries.
+ 1,086	
+ 1,018	polaire supérieure : de jour, 11 séries. L'écart porte sur une série d'un seul couple.

---

paré en deux groupes distincts les séries faites avant et après cette époque. Car j'ai commencé dès lors à noter la seconde dans l'état de liberté de l'instrument, quoique je n'aie consigné le détail du procédé d'observation sur le registre que trois jours plus tard. Toutefois, n'ayant dans le second groupe qu'une seule série d'Antarès faite le 10, c'est-à-dire, le jour même de la rectification, je l'ai jointe à ses analogues du premier groupe dont elle ne s'écarte pas sensiblement.

Dans les trente-trois séries faites du côté du sud, les écarts qui atteignent 1″ ne se présentent que deux fois, et seulement pour deux séries de jour de α de la Vierge, dont une ne contient qu'un seul couple, l'autre, quatre. Leurs valeurs sont :

Pour la série d'un seul couple...	+ 2″,361.
Pour la série de quatre..........	— 1,570.

Comme je n'avais que six séries de cette étoile, je n'ai pas cru devoir rejeter ces deux-là, d'autant que leurs écarts sont de sens contraires, et que ceux des quatre autres séries, autour de la même moyenne, sont fort au-dessous de 1″. Mais, de ce même côté du zénith, j'ai exclu, par scrupule, une série de ζ Ophiucus qui contenait pourtant dix couples observés dans les circonstances les plus favorables, parce que j'ai trouvé marqué sur le registre que j'avais par mégarde heurté la lunette avec la tête, et conséquemment ébranlé tout l'instrument, en passant de la dix-neuvième à la vingtième observation. L'écart de cette série autour de la moyenne relative à la même étoile n'était, à la vérité, que de + 1″,434; mais elle rendait les autres écarts trop uniformément négatifs, pour qu'on ne dût pas légitimement suspecter que l'accident mentionné y avait eu quelque influence. Au reste, j'en ai rapporté le résultat, conjointement avec ses analogues ; de sorte que l'on pourra, à volonté, en faire ou n'en pas faire usage. L'accord remarquable des séries entre elles, pour chaque étoile, de ce côté du zénith, prouve, avec évidence, que les erreurs des tables de réfraction sont peu à craindre, même pour d'assez grandes distances zénithales, quand on opère sous un beau ciel, dans un observatoire qui communique librement avec l'air du dehors, comme notre cabane,

et sur un plateau de peu d'étendue, isolé au milieu de la mer, comme l'était notre station.

Pour mettre en évidence la réalité du perfectionnement relatif qui résulte du mode d'observation que je viens d'indiquer, je prendrai comme épreuve comparative les observations de latitude faites par le colonel Brousseaud, assisté de M. Largeteau, dans les stations extrêmes et intermédiaires du 45e parallèle, avec un cercle répétiteur construit aussi par M. Gambey, et ayant 18 pouces de diamètre, de sorte qu'il était plus grand que celui dont j'ai fait usage. J'extrais ces observations de son ouvrage intitulé : *Mesure du parallèle moyen.* Je les choisis parce que le colonel Brousseaud était connu comme un observateur habile, soigneux, patient, et surtout sincère. J'en extrais, dans chacune de ces stations, des groupes de séries observées au nord ou au sud du zénith, sur une même étoile, en assez grand nombre pour qu'on puisse bien voir l'ordre habituel de leurs écarts, que je relève seulement lorsqu'ils atteignent 1″, soit en plus soit en moins, autour de leur moyenne totale.

Première station la plus occidentale, la Ferlanderie. Il a été fait 97 séries de la polaire par vision directe; les écarts qui atteignent 1″ sont au nombre de 46, dont voici les valeurs distribuées selon leur signe propre : 1°

Positives.	Négatives.
″	″
+ 1,35	— 1,07
1,10	3,85
3,56	3,17
3,13	1,31
1,28	4,88
1,02	2,87

2,19	3,65
1,57	1,47
2,51	1,65
2,23	3,56
1,68	1,19
1,07	3,03
2,19	1,94
2,30	1,67
1,45	1,80
2,41	1,75
2,94	1,05
1,82	1,67
1,30	2,64
2,49	1,03
2,64	1,26
1,40	Somme des 21 — 46,51
2,11	
1,07	
1,49	
Somme des 25 + 48,30	

La somme des écarts positifs de cet ordre étant presque égale à la somme des négatifs, la latitude moyenne n'en est pas sensiblement influencée; mais leur fréquence, et leurs amplitudes individuelles, excèdent beaucoup ce que l'on obtient avec l'instrument libre. Le nombre des couples de chaque série a varié depuis 5 jusqu'à 11.

Voici maintenant tous les résultats partiels de vingt séries de α d'Ophiucus faites par le même observateur, dans la même station. Je les prends comme exemples de séries au

sud du zénith : le nombre des couples de chaque série a varié de 6 à 10.

Résultats partiels.	Excès sur la moyenne.
37,95″	+ 0,08″
39,08	+ 1,21
38,65	+ 0,78
37,99	— 0,12
39,20	+ 1,33
37,07	— 0,80
36,43	— 1,44
39,94	+ 2,07
36,00	— 1,87
35,25	— 1,42
35,78	— 2,09
37,43	— 0,44
37,59	— 0,28
40,39	+ 2,52
38,31	+ 0,44
39,52	+ 1,65
37,24	— 0,63
38,40	+ 0,53
36,81	— 1,06
38,42	+ ,055
Somme totale 757,45	
Résultat moyen 37,872	

Les vingt séries présentent 11 écarts supérieurs à 1″ en plus ou en moins, sur lesquels 3 surpassent 2″.

Ces observations sont assurément fort bonnes, et leur résultat moyen est très-sûr; mais la fréquence des écarts supérieurs à 1″, et leurs amplitudes totales, dépassent encore beaucoup ce que l'on obtient avec le nouveau procédé.

Les observations faites avec le même cercle à la station intermédiaire d'Opmes, et à l'orientale du Monceau, pré-

sentent des écarts analogues entre les séries des mêmes étoiles, obtenues par vision directe, tant au nord qu'au sud du zénith. J'ai jugé inutile de les rapporter en détail. Dans ces deux dernières stations le colonel Brousseaud a observé aussi la polaire par réflexion sur un horizon de mercure, et les séries ainsi effectuées offrent un accord beaucoup plus grand, quoique non pas supérieur à celui que le nouveau mode d'observation nous a donné. Toutefois, je regrette de n'avoir pas employé concurremment ce procédé, où l'on doit présumer que l'erreur constante du cercle se détruit immédiatement dans chaque passage de la vision directe à la vision réfléchie. Mais on pouvait alors le croire moins facile et moins expéditif que M. Brousseaud ne l'atteste et ne le prouve dans son ouvrage, qui a été publié quatorze ans après mon voyage à Formentera.

La méthode d'observation avec l'instrument libre que je viens de décrire pourrait donner lieu à un soupçon d'erreur qu'il importe de dissiper. Comme on attend que la bissection s'opère par le seul effet du mouvement ascensionnel ou descensionnel de l'étoile, l'observation se fait avec la même facilité que dans les passages à la lunette méridienne, et précisément de la même manière. Or, on sait que tous les observateurs ne rapportent point ces passages au même instant physique. Les uns le fixent relativement plus tôt, d'autres relativement plus tard, soit par l'effet de l'organisation individuelle de l'œil, soit par la préoccupation de l'esprit qui doit à la fois suivre l'étoile et compter le temps, comme M. Arago l'a constaté en variant les circonstances de cette appréciation pour un même observateur. On pourrait donc craindre qu'une pareille différence d'appréciation ne se produisît dans les distances zéni-

thales, quand on laisse la bissection s'opérer spontanément par le mouvement de l'étoile, ce qui reviendrait à mettre celle-ci constamment un peu trop haut ou un peu trop bas, selon le sens suivant lequel elle traverse le fil. Mais d'abord, dans les observations de distances méridiennes, le mouvement ascensionnel ou descensionnel de l'étoile étant très-lent, l'instant de la bissection spontanée est moins inquiétant à fixer; et la différence individuelle d'appréciation paraît devoir en devenir moindre. Puis, comme les séries s'étendent ordinairement des deux côtés du méridien, l'erreur, quelle qu'elle soit, change de signe avant et après le passage de l'étoile dans ce plan, ce qui en doit affaiblir l'effet final, par compensation, dans chaque série entière ainsi répartie. L'accord remarquable des résultats obtenus pour chaque étoile, en employant cette méthode, confirme les deux considérations précédentes dans leur ensemble; mais elles se trouvent aussi vérifiées séparément par les observations de la polaire de jour faites le 23 juin. Car ce jour-là, vers le milieu de la série, il me passa par l'esprit le scrupule, probablement mal fondé, que je n'avais pas lu les quatre verniers, mais seulement un seul, en plaçant d'avance l'alidade sur le point du limbe où elle devait être, selon mon calcul, pour trouver l'étoile dans le champ de la lunette. C'est pourquoi, après avoir fait douze observations, je lus les quatre verniers afin de ne pas perdre les suivantes, qui se succédèrent au nombre de quatorze. Or, cette interruption arriva précisément pendant le passage au méridien; de sorte qu'il en résulta, pour ce même jour, deux séries, dont l'une était tout antérieure, l'autre toute postérieure à ce passage. Néanmoins, en les calculant séparément, leurs ré-

sultats ne se trouvèrent pas différer d'une seconde de degré, comme on peut le voir dans le tableau général, où elles sont rapportées sous les n°s 60 et 61. Et comme on n'évite pas des écarts de cet ordre, même en observant, dans les circonstances les plus favorables, avec de grands instruments, il s'ensuit que l'erreur qui pourrait être produite par l'appréciation individuelle de la bissection, s'est montrée ici insensible, quoique l'effet en fût doublé dans la différence des résultats obtenus avant et après le passage au méridien; et je l'ai trouvée telle dans toutes les autres séries que les accidents atmosphériques ou d'autres circonstances imprévues m'ont empêché de rendre symétriques, comme je m'y étais préparé. Car je n'ai jamais aperçu que le manque de symétrie y eût une influence appréciable, parce que je connaissais très-bien le temps.

Ayant communiqué récemment ces résultats à M. Arago, avant de les présenter au Bureau des longitudes, j'ai appris par lui que cette même méthode d'opérer les bissections sans toucher le cercle, était aussi celle qu'il avait employée avec M. Mathieu pour déterminer la parallaxe de la 61e du Cygne. par des distances zénithales absolues observées avec le cercle répétiteur de Reichemback, dont M. Laplace a fait présent à l'Observatoire de Paris; et cela fait concevoir comment cette détermination, qui pouvait paraître si périlleuse avec un instrument de dimension restreinte, s'est trouvée pourtant conforme à celle que M. Bessel a obtenue plus tard avec le grand héliomètre de Fraunhoffer. Comme cette particularité, jusqu'ici non connue, constate avec une irrécusable évidence la sûreté du principe d'observation dont il s'agit, j'ai témoigné à M. Arago le désir d'en

insérer textuellement les détails dans mon mémoire, et je les rapporte ici tels qu'il a bien voulu me les communiquer :

« Voici, mon cher confrère, les renseignements que vous « désirez :

« La méthode qui vous a si bien réussi à Formentera me « semble très-rationnelle, surtout pour les cercles dont l'axe « n'est fixé qu'à une de ses extrémités. Nous l'avions déjà em- « ployée, M. Mathieu et moi, non pas dans le dessein de « nous garantir de quelques petites erreurs possibles dans le « défaut de verticalité de l'axe de rotation du cercle, mais « parce qu'elle nous paraissait commode. Nous y eûmes re- « cours pour notre travail sur la 61e du Cygne. Cette fois, « nous n'aurions pas eu le choix. En effet, nous déterminons « les distances absolues des *deux parties* de ce groupe bi- « naire par *une seule série* de retournements du cercle de « Reichemback, dont l'axe est fixé à ses deux extrémités; le « point de départ et le point d'arrêt de l'alidade, à la fin de « l'opération, étaient absolument les mêmes pour les deux « étoiles; les angles horaires seuls différaient. Ce qui déter- « minait les angles, c'était le moment de la disparition spon- « tanée de *chaque étoile*, sous le fil horizontal du réticule.

« Lorsque nous cherchions l'origine des erreurs constantes « des cercles répétiteurs, il me vint à l'esprit qu'elles pou- « vaient provenir d'un mouvement de l'alidade, qui se serait « effectué dans le passage de l'observation paire à l'observa- « tion impaire. Pour anéantir cette cause d'incertitude, je fis « appliquer à l'alidade *deux vis*, diamétralement opposées. « La lunette était ainsi doublement fixée; mais alors le pointé « ne pouvait pas s'effectuer avec une seule de ces vis, l'autre « y aurait mis obstacle. L'observateur était donc réduit à

« placer l'étoile près du fil horizontal, et à attendre qu'elle « allât s'occulter d'elle-même, comme vous l'avez fait. »

Les résultats obtenus au moyen des bissections spontanées dans les observations précédentes, et dans celles que j'ai faites en 1825, à Formentera, prouvent donc, par leur exactitude inespérée, la bonté de cette méthode. Le raisonnement et l'expérience s'accordent d'ailleurs pour montrer qu'elle est pratiquement plus commode que la méthode ordinaire. Il est par conséquent à désirer que désormais on la substitue à celle-ci dans l'usage habituel des cercles répétiteurs.

Les latitudes résultantes de mes observations ont été calculées, en partie, avec les tables de positions apparentes consignées dans les Éphémérides de M. Schumaker pour l'année 1825. On sait que ces tables sont construites en appliquant les formules d'aberration et de nutation de M. Bessel, aux lieux absolus adoptés par cet astronome. Pour les étoiles qui n'y étaient pas comprises, j'ai calculé l'aberration et la nutation avec les mêmes constantes, et je les ai appliquées aux lieux absolus que M. Airy a bien voulu me communiquer, comme se déduisant, pour 1825, des observations de Greenwich, combinées avec les catalogues les plus estimés. Ces données venant d'un astronome si distingué, m'ont paru devoir mériter plus de confiance que celles que j'aurais pu me former moi-même avec beaucoup de temps et moins d'expérience pratique. D'ailleurs, j'ai rassemblé dans deux tableaux A et B placés à la fin de ce mémoire, pages 396-399, toutes les positions apparentes que j'ai employées dans chaque calcul, tant pour la déclinaison que pour l'ascension droite, ainsi que les heures des culminations en temps de l'horloge qui me servait, et enfin la marche diurne de cette horloge

ou du moins le facteur de réduction qu'il faut appliquer aux angles horaires mesurés par elle, pour les convenir en angles horaires de temps sidéral. Chacun pourra donc, au besoin, substituer d'autres éléments à ceux dont j'ai fait usage, et vérifier par le calcul tous les résultats que j'ai obtenus.

Il ne me reste plus qu'à dire comment j'ai conclu la latitude finale de la station, et quelle est cette latitude.

J'ai d'abord extrait de mon tableau général C, placé à la fin de ce mémoire, toutes les latitudes partielles déduites des diverses séries de chaque étoile, et je les ai rassemblées en autant de groupes, dans un même tableau D, composé de deux colonnes verticales, lequel fait suite au précédent. La colonne de gauche contient toutes les séries observées au nord du zénith; celle de droite, toutes les séries observées au sud sans aucune exception. J'y ai seulement séparé l'ensemble des séries en deux époques : la première antérieure à la rectification de l'horizontalité du fil où l'on touchait l'instrument; la seconde postérieure où il était abandonné à lui-même, l'étoile venant se présenter par son seul mouvement propre à la bissection.

Au-dessous de chaque groupe j'ai écrit la latitude moyenne entre toutes les latitudes partielles qui le composent, sans distinction du nombre d'observations que chaque série contient. Car, avec un cercle aussi bien divisé, la diversité des circonstances atmosphériques et astronomiques dans lesquelles chaque série est faite, m'a semblé devoir exercer sur son résultat final beaucoup plus d'influence que l'erreur attribuable à la mesure de l'arc parcouru sur le limbe. A côté de chaque groupe on voit les écarts des résultats partiels autour du résultat moyen, et l'on peut vérifier

ce que j'ai annoncé sur la petitesse de leurs amplitudes.

Pour déduire de ces données la latitude vraie, je considère d'abord les 14 séries faites tant au nord qu'au sud du zénith avant la rectification définitive de l'horizontalité du fil, et en touchant l'instrument suivant la pratique habituellement usitée. Puis, considérant toutes ces séries comme équivalentes, je prends la moyenne de toutes les latitudes partielles qu'elles donnent de chaque côté du zénith. J'obtiens ainsi les résultats suivants :

	° ′ ″	
Au nord du zénith, 5 séries comprenant 70 observations : latitude moyenne apparente........................	38.39.58,9970	Demi-différence des deux évaluations. Excès du côté du nord.
Au sud du zénith, 9 séries comprenant 110 observations : latitude moyenne apparente........................	38.39.46,9414	
Moyenne : 14 séries comprenant 180 observations : latitude vraie....................................	38.39.52,9692	6″,0278

Je considère ensuite les 66 séries faites après la rectification de l'horizontalité du fil, et en laissant l'instrument libre pendant que la bissection s'opère. Prenant de même la moyenne des latitudes partielles qu'elles donnent de chaque côté du zénith, je trouve :

	° ′ ″	
Au nord du zénith, 33 séries comprenant 480 observations : latitude moyenne apparente........................	38.39.56,8608	Demi-différence des deux évaluations. Excès du côté du nord.
Au sud du zénith, 33 séries comprenant 400 observations : latitude moyenne apparente........................	38.39.49,6753	
Moyenne : 66 séries comprenant 880 observations : latitude vraie....................................	38.39.53,2680	3″,5927

Cette dernière détermination de la latitude doit être plus

sûre que la première, à cause de l'accord plus parfait des séries partielles, à cause de leur nombre plus considérable et du nombre plus grand d'observations qu'elles comprennent. Néanmoins, si l'on veut réunir tous les résultats dans une même moyenne, on prendra 14 fois la première latitude, 66 fois la seconde; et, divisant la somme par 80, on aura en définitive,

Par les 80 séries, comprenant 1060 observations : latitude moyenne	38°.39'.53'',216	Plus faible de 0'',577 qu'avant l'intervention des 14 premières séries.
Réduction à l'ancienne station du cercle de 1808.	— 0,044	
Latitude réduite à l'ancienne station du cercle de 1808	38.39.53,172	
Latitude trouvée en 1808 par des observations qui ont toutes été faites au nord du zénith	38.39.56,016	Par la moyenne de toutes les séries.
Excès de l'ancienne latitude provenant de l'erreur constante du cercle	+ 2,844	

Mais cette évaluation de la latitude de 1808, conclue de la moyenne de toutes les séries qui furent faites alors, doit être aujourd'hui modifiée, d'après la remarque faite par M. Arago, que l'erreur constante des cercles répétiteurs est en très-grande partie, sinon en totalité, individuelle pour chaque observateur qui les emploie, comme dépendant de la manière dont il place le centre d'intensité de l'image lumineuse formée dans son œil par les faibles lunettes de ces instruments. Car alors sa valeur dans les anciennes séries de Formentera doit être appréciée isolément pour les divers observateurs qui y ont concouru. Or, on va voir qu'en effet cette comparaison la donne tant soit peu différente, sans que l'inégalité puisse être attribuée avec vrai-

semblance aux erreurs relatives aux observations individuelles.

Pour le prouver, je prends séparément les séries des deux passages de la polaire observées en 1808 par M. Arago et par moi, et je forme leur moyenne pour chaque passage. Puis, prenant la moyenne de ces moyennes, j'obtiens le tableau suivant qui présente leurs résultats individuels :

NATURE du PASSAGE OBSERVÉ.	LATITUDE moyenne résultante. Observations de M. Arago.	NOMBRE des séries qui y ont concouru.	LATITUDE moyenne résultante. Observations de M. Biot.	NOMBRE des séries qui y ont concouru.
	° ′ ″		° ′ ″	
Passage supérieur de la polaire..	38.39.56,700	13	38.39.57,481	6
Passage inférieur de la même....	38.39.54,815	9	38.39.55,548	5
Moyenne conclue des deux passages	38.39.55,757	22	38.39.56,514	11
Différence des latitudes partielles, exprimant le double de l'erreur de la déclinaison employée dans le calcul.................	— 1,885		— 1,933	

Les séries de M. Arago s'accordent entre elles beaucoup mieux que les miennes, surtout pour le passage supérieur. Mais les plus grands écarts de ces dernières sont presque égaux et de signes contraires, de sorte qu'ils se compensent dans le résultat moyen ; et aussi la double erreur de la déclinaison, déduite des séries de M. Arago, est-elle inférieure seulement de 0″,048 à celle qui se déduit des miennes. Mais sa latitude absolue est moindre que la mienne de 0″,757.

Ainsi, en admettant une exactitude moyenne d'appréciation égale, ce que l'identité de la correction de la déclinaison paraît attester, l'erreur constante du cercle aurait été moindre pour lui que pour moi de cette quantité 0",757.

Je n'ai pas pu faire la même comparaison pour les séries faites en 1808 sur β de la petite Ourse, parce que j'ai participé seulement à celles du passage inférieur. Mais j'ai rassemblé séparément celles de M. Arago comme plus parfaites, et devant comporter une erreur constante moindre, d'après ce que la polaire vient de nous découvrir. Puis, les joignant à celles de cette étoile faites aussi par M. Arago seul, j'en ai conclu une évaluation de l'ancienne latitude qui paraît devoir être préférable à celle que nous avions adoptée par la moyenne de toutes les séries. Voici ce résultat, dépouillé des erreurs des déclinaisons :

	LATITUDES déduites des observations de M. Arago à Formentera en 1808.	NOMBRE des SÉRIES.
	° ′ ″	
Par les passages supérieurs et inférieurs de la polaire...........	38.39.55,757	22
Par les passages supérieurs et inférieurs de β petite Ourse........	38.39.55,303	17
Latitude moyenne conclue des deux étoiles....................	38.39.55,530	39
Latitude trouvée en 1825 par les observations faites des deux côtés du zénith....................................	38.39.53,172	80
Excès de la latitude de 1808, ou erreur constante du cercle pour M. Arago, excès au nord..................................	2",358	

Après avoir rétabli l'exacte horizontalité du fil pour passer du premier mode d'observation au second où l'instrument est devenu libre pendant les bissections, il a fallu modifier tant soit peu la distance du réticule à l'objectif pour mettre le fil parfaitement au foyer de celui-ci ; et, après avoir effectué ces deux opérations, on a aussi rectifié définitivement l'axe optique pour l'adapter à ces conditions nouvelles. Or, d'après les nombres que j'ai rapportés dans les deux tableaux de la page 385, on voit que, soit par un effet de ces changements, soit par une conséquence du procédé plus parfait au moyen duquel les bissections avaient été opérées, les latitudes partielles obtenues au nord et au sud du zénith sont devenues notablement moins différentes qu'elles ne l'étaient avant ces dernières rectifications, en conservant l'une et l'autre leur même sens d'excès; d'où il suit que l'erreur constante du cercle est devenue moindre en gardant le même signe. C'est ce qui me reste à développer.

Soit D la distance du zénith au pôle boréal dans le lieu où se font les observations. La latitude y sera $90° - D$. Je considère d'abord une étoile dont la distance polaire Δ' soit plus grande que D, et dont on observe le passage supérieur au sud du zénith. Si Z' est sa distance zénithale exacte, au moment de ce passage, on aura :

1° Passage supérieur au sud du zénith } $D = \Delta' - Z'$, conséquemment $L = 90 - \Delta' + Z'$.

Prenons une autre étoile dont la distance polaire Δ'' soit moindre que D, et observons-la dans son passage supérieur

au nord du zénith. Soit alors Z'' sa distance zénithale exacte; on aura pour elle :

2° Passage supérieur au nord du zénith } $D = \Delta'' + Z''$, conséquemment $L = 90° - \Delta'' - Z''$.

Enfin, considérons une troisième étoile dont la distance polaire soit Δ''' et que l'on observe dans son passage inférieur entre le pôle et l'horizon du côté du nord. Soit alors Z''' sa distance zénithale exacte; on aura :

3° Passage inférieur au nord du zénith } $D = Z''' - \Delta'''$, conséquemment $L = 90° + \Delta''' - Z'''$.

Je suppose maintenant que le cercle dont on fait usage donne toutes les distances zénithales *trop fortes* de la quantité $+e$, cette lettre devant devenir négative si le cercle donne des distances zénithales trop faibles. Alors celles qu'on observera, dans les trois cas précédents, seront respectivement $Z' + e$; $Z'' + e$; $Z''' + e$. Et comme on les emploiera toujours dans le calcul sous la même forme que précédemment, on en déduira des latitudes inexactes L', L'', L''', lesquelles auront les valeurs suivantes, que je présente d'abord seules, puis comparées à la vraie latitude L :

1° Passage supérieur au sud du zénith } $L' = 90° - \Delta' + Z' + e$, d'où $L' = L + e$.

2° Passage supérieur au nord du zénith } $L'' = 90° - \Delta'' - Z'' - e$, d'où $L'' = L - e$.

3° Passage inférieur au nord du zénith } $L''' = 90° + \Delta''' - Z''' - e$, d'où $L''' = L - e$.

Si le cercle donne des distances zénithales trop fortes, e sera positif; et la latitude, calculée par les passages au sud du zénith, surpassera celle qui se déduit des passages obser-

vés au nord. Si, au contraire, il donne des distances zénithales trop faibles, e sera négatif, et les latitudes calculées par les observations faites au nord surpasseront celles qu'on obtient par les observations faites au sud. Ce second cas est celui qui s'est réalisé dans nos observations de Formentera.

Les équations précédentes étant combinées successivement par addition et par soustraction, donnent :

$$L = \frac{1}{2}(L' + L''), \qquad L = \frac{1}{2}(L' + L'''),$$

$$e = \frac{1}{2}(L' - L''), \qquad e = \frac{1}{2}(L' - L''').$$

Les deux premières donnent la latitude exacte indépendamment de l'erreur constante du cercle. Les deux dernières donneront les valeurs absolues de cette erreur, d'après la différence des latitudes apparentes conclues des observations faites au sud et au nord du zénith.

En appliquant celles-ci aux observations faites à Formentera en 1825, on a, par les tableaux de la page 385,

Dans le premier état du cercle	$e = -6'',028$,
Dans l'état rectifié et libre	$e = -3'',593$.

L'erreur constante s'est donc réduite presque à moitié dans le second état en restant toujours négative; d'où il suit que l'instrument a toujours donné des distances zénithales trop faibles.

Ce même sens négatif de l'erreur s'est manifesté dans toutes les observations de latitude faites par le colonel Coraboeuf et le colonel Brousseaud, avec les cercles de M. Gambey appartenant au dépôt de la guerre. Le premier de ces officiers en a donné le résumé pour quatre stations, où il avait suc-

cessivement transporté un de ces cercles (*Nouvelle Description géométrique de la France,* p. 368). Voici ses résultats :

NOMS DES STATIONS.	VALEUR MOYENNE DE L'ERREUR *e*.
Tour de Borda (1828)..........	$-5'',04$
Angers (1829).................	$-6,33$
Puits Berteau (1829)...........	$-8,96$
Breri (1831)..................	$-4,27$

Voici maintenant les résultats analogues déduits des observations faites par le colonel Brousseaud dans trois stations, avec un même cercle de 18 pouces différent du précédent. Je les extrais de son ouvrage *Sur la mesure du parallèle moyen.*

NOMS DES STATIONS.	PAGES DE L'OUVRAGE.	VALEUR DE L'ERREUR *e*.
La Ferlanderie......	78	$-3'',905$
Opmes.............	102	$-2,570$
Monceau...........	128	$-4,300$

On voit que les trois erreurs sont encore négatives ; de sorte que le cercle a toujours donné des distances zénithales trop faibles.

Dans les deux dernières stations, la latitude moyenne

conclue des observations faites au nord et au sud du zénith, s'est très-bien accordée avec les résultats immédiats des séries de la polaire observée directement et par réflexion sur un horizon de mercure. Du moins, les très-légères différences qu'on remarque entre ces deux modes d'évaluation sont de l'ordre de celles qu'on peut légitimement attribuer aux petites incertitudes qui peuvent rester encore sur les déclinaisons des étoiles situées au sud du zénith.

On a vu plus haut, page 388, que la latitude de la station de Formentera, déterminée en 1808 par M. Arago avec un cercle de Fortin, par les seules observations d'étoiles circompolaires, excède de 2″,358 la latitude moyenne obtenue en 1825 par les observations faites des deux côtés du zénith. L'erreur constante de ce cercle était donc aussi négative comme les précédentes, et elle était égale à — 2″,358 pour M. Arago.

Mais cette uniformité de signe négatif ne s'est pas maintenue pour un autre cercle de Fortin que nous avons employé, M. Mathieu et moi, en 1809, à Dunkerque. Car, par des élongations de la polaire et par des distances méridiennes prises en très-grand nombre seulement au nord du zénith, nous trouvâmes alors une latitude de la tour de Dunkerque, moindre de 3″,55 que celle de Delambre qui est exacte, comme nous l'avons vérifié depuis, M. Arago et moi, concurremment avec les astronomes anglais. D'où il suit que notre cercle de 1809 donnait des distances zénithales trop fortes de cette quantité, et avait ainsi son erreur constante positive.

Je ne chercherai pas à expliquer ces concordances et ces dissemblances de signe; mais, quelle qu'en soit la cause, le

résultat obtenu à Formentera, en 1825, m'a semblé utile à constater comme pouvant donner quelques lumières sur les moyens à prendre pour atténuer ce genre d'erreur. Car, puisqu'ici une meilleure disposition de l'instrument, jointe à un meilleur mode pratique de l'employer, ont produit, dans la valeur absolue de son erreur constante, une réduction si notable, il ne serait pas impossible qu'on parvînt à l'atténuer encore davantage, si la lunette des cercles répétiteurs était munie de vis de rappel au moyen desquelles on pût centrer rigoureusement l'oculaire avec l'objectif, porter la plaque du réticule exactement au foyer de celui-ci, puis la tourner et aussi la faire mouvoir parallèlement au plan du limbe, pour amener le fil transversal à une parfaite horizontalité dans un plan diamétral du système, en même temps que l'on conserverait le mouvement perpendiculaire qui sert à régler l'axe optique. Si, après avoir effectué toutes ces rectifications, on prenait soin de laisser toujours les bissections s'opérer d'elles-mêmes, tant au nord qu'au sud du zénith, dans un état de complète liberté de l'instrument, comme je l'ai fait dans la seconde partie des observations que je viens de rapporter, on obtiendrait, je crois, les résultats les plus exacts que le cercle répétiteur puisse donner par vision directe. Les mêmes conditions de rectification et de liberté étant appliquées aux observations dans lesquelles la vision directe alterne avec la vision réfléchie, contribueraient sans doute aussi à les rendre encore plus sûres, sinon plus parfaites, qu'on ne les a jusqu'ici obtenues; et la réunion de ces deux procédés donnerait aux cercles répétiteurs portatifs une valeur de détermination qui ne serait peut-être pas inférieure à celle des grands instruments fixes; la petitesse relative

de leur dimension étant compensée par le principe de répétition, purgé de toutes les erreurs accidentelles.

Je joins ici les divers tableaux annoncés dans le cours du mémoire précédent. Mais, pour n'omettre aucun des éléments qui ont été employés dans le calcul des distances zénithales vraies, je rapporterai d'abord les résultats de trois séries d'observations, qui ont été faites à différentes époques sur des objets terrestres très-distants, pour déterminer les valeurs des parties du grand niveau parallèle au limbe, dans la condition même d'application où il se trouve, quand il servait à mesurer l'inclinaison absolue de l'axe du cercle, lors des observations de latitude. Voici les résultats :

DATE DES OBSERVATIONS.	TEMPÉRATURE CENTÉSIMALE.	VALEUR ANGULAIRE d'une partie du niveau, en secondes sexagésimales.
1825 juin 7	+ 16°,00	1'',7797
11	20,90	1,7717
juillet 1	23,65	1,7953
Valeur moyenne		1,78223

Quoique cette valeur moyenne différât bien peu des évaluations partielles, on a employé celles-ci par préférence pour réduire les observations voisines des époques où elles avaient été obtenues.

ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES EMPLOYÉS AU CALCUL DE LA LATITUDE

PAR LES ÉTOILES OBSERVÉES AU NORD DU ZÉNITH. — TABLEAU A.

NOMS DES ASTRES observés AU NORD DU ZÉNITH.	DATE de L'OBSERVAT. MOIS.	JOURS.	NUMÉROS D'ORDRE de la série.	ASCENSION droite apparente en temps sidéral.	DISTANCE au pôle boréal apparente.	HEURE du passage au méridien en temps de l'horloge.	LOGARITHME TABULAIRE de la quantité ω qui sert à réduire en temps sidéral les angles horaires comptés en temps de l'horloge (*).
				h ′ ″	° ′ ″	h ′ ″	
β petite Ourse supérieure.	Juin . .	7	1	14.51.22,70	15. 7.45,18	6. 0.40,79	$\bar{3}$,8465405
		8	5	51.22,66	44,93	5.50.38,35	$\bar{3}$,8465405
		9	9	51.22,62	44,67	5.40.35,92	$\bar{3}$,8465405
		10	14	51.22,57	44,45	5.30.33,15	$\bar{3}$,8466371
		11	16	51.22,51	44,23	5.20.30,36	$\bar{3}$,8466371
		12	20	51.22,46	44,01	5.10.27,43	$\bar{3}$,8467590
		13	25	51.22,40	43,79	5. 0.24,75	$\bar{3}$,8466414
		14	30	51.22,35	43,57	4.50.22,48	$\bar{3}$,8462008
		15	35	51.22,30	43,35	4.40.20,31	$\bar{3}$,8462008
		16	40	51.22,24	43,13	4.30.18,16	$\bar{3}$,8461884
		17	46	51.22,19	42,91	4.20.15,78	$\bar{3}$,8461158
		18	52	51.22,13	42,69	4.10.13,45	$\bar{3}$,8465006
		19	54	51.22,08	42,47	4. 0.11,13	$\bar{3}$,8462820
		20	56	51.22,02	42,29	3.50. 9,63	$\bar{3}$,8458963
		23	62	51.21,83	41,76	3.20. 5,84	$\bar{3}$,8456657

(*) Soit $+r$ le *retard* diurne de l'horloge sur un jour sidéral, exprimé en battements de l'horloge : pour convertir les intervalles de temps comptés sur l'horloge en intervalles sidéraux, il faudra les multiplier par un facteur k, dont l'expression est $k = 1 + \frac{r}{86400 - r}$. Pour abréger je fais $\omega = \frac{r}{86400 - r}$; alors le facteur de conversion k devient $k = 1 + \omega$.

Le logarithme tabulaire de ω est donné pour chaque jour d'observation dans la dernière colonne du tableau.

Soit D la distance du pôle au zénith; Z la moyenne des distances zénithales observées d'une étoile ayant pour distance polaire apparente Δ; P l'angle horaire propre à chaque distance zénithale partielle, exprimé en temps de l'horloge; n le nombre de ces distances que chaque série renferme, et enfin Q la quantité $\frac{1}{n}\Sigma \frac{(2 \sin^2 \frac{1}{2} P)}{\sin 1''}$, Σ étant un signe de sommation étendu à toutes les observations de la série. Si l'on désigne par Z_m la distance zénithale méridienne moyenne déduite de ces mêmes observations, on aura

pour les passages supérieurs observés au nord du zénith $Z_m = Z - (1 + \omega)^2 \frac{\sin D \sin \Delta}{\sin (D - \Delta)} \cdot Q$,

pour les passages inférieurs, ... $Z_m = Z + (1 + \omega)^2 \frac{\sin D \sin \Delta}{\sin (D + \Delta)} \cdot Q$.

L'effet du facteur $(1 + \omega)^2$ a toujours été calculé par parties, en effectuant sa multiplication par les divers termes de son développement $1 + 2\omega + \omega^2$. Les observations ont toujours été faites assez près du méridien pour que les termes ultérieurs de la formule de réduction fussent insensibles et pussent être négligés.

ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES EMPLOYÉS AU CALCUL DE LA LATITUDE

PAR LES ÉTOILES OBSERVÉES AU NORD DU ZÉNITH. — SUITE DU TABLEAU A.

NOMS DES ASTRES observés AU NORD DU ZÉNITH.	DATE de l'OBSERVAT.		NUMÉROS D'ORDRE de la série.	ASCENSION droite apparente en temps sidéral.	DISTANCE au pôle boréal apparente.	HEURE du passage au méridien en temps de l'horloge.	LOGARITHME TABULAIRE de la quantité ω qui sert à réduire en temps sidéral les angles horaires comptés en temps de l'horloge.
	MOIS.	JOURS.					
				h ′ ″	° ′ ″	h ′ ″	
γ petite Ourse supérieure.	Juin..	7	2	15.21. 8,15	17.32.36,40	6.30.13,96	$\bar{3}$,8465405
		9	10	21. 8,08	35,86	6.10. 8,84	$\bar{3}$,8465405
		10	15	21. 8,04	35,59	6. 0. 5,99	$\bar{3}$,8466371
		11	17	21. 8,01	35,33	5.50. 3,22	$\bar{3}$,8466371
		12	21	21. 7,97	35,06	5.40. 0,30	$\bar{3}$,8467590
		13	26	21. 7,94	34,79	5.29.57,55	$\bar{3}$,8466414
		14	31	21. 7,90	34,52	5.19.55,58	$\bar{3}$,8462008
		15	36	21. 7,87	34,25	5. 9.53,44	$\bar{3}$,8462008
		16	41	21. 7,82	34,02	4.59.51,30	$\bar{3}$,8461884
		17	47	21. 7,78	33,79	4.49.48,93	$\bar{3}$,8461158
		20	57	21. 7,64	33,09	4.19.42,83	$\bar{3}$,8458963
		23	63	21. 7,51	32,39	3.49.39,10	$\bar{3}$,8456657
Polaire inférieure.......		17	45	0.58.16,14	1.37.32,65	2.27.56,73	$\bar{3}$,8462137
		18	51	16,85	32,65	2.17.54,92	$\bar{3}$,8465006
		19	53	17,53	32,66	2. 7.53,62	$\bar{3}$,8462820
		20	55	18,20	32,67	1.57.52,84	$\bar{3}$,8458963
		21	59	18,90	32,69	1.47.52,00	$\bar{3}$,8456227
		23	60	20,36	32,76	1.27.51,58	$\bar{3}$,8456657
		23	61	20,36	32,76	1.27.51,58	$\bar{3}$,8456657
		24	67	21,15	32,80	1.17.50,79	$\bar{3}$,8455792
		25	71	21,99	32,81	1. 7.50,46	$\bar{3}$,8455450
		27	77	23,72	32,79	0.47.49,51	$\bar{3}$,8454795
		30	82	26,20	32,60	0.17.48,54	$\bar{3}$,8455522

ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES EMPLOYÉS AU CALCUL DE LA LATITUDE

PAR LES ÉTOILES OBSERVÉES AU SUD DU ZÉNITH. — TABLEAU B.

NOMS DES ASTRES observés AU SUD DU ZÉNITH.	DATE de l'observat. MOIS.	JOURS.	NUMÉROS D'ORDRE de la série.	ASCENSION droite apparente en temps sidéral.	DISTANCE au pôle boréal apparente.	HEURE du passage au méridien en temps de l'horloge.	LOGARITHME TABULAIRE de la quantité ω qui sert à réduire en temps sidéral les angles horaires comptés en temps de l'horloge (*).
				h ′ ″	° ′ ″	h ′ ″	
β Scorpion (la plus grosse des deux)	Juin...	7	3	15.55.20,58	109.19.16,42	7. 4.11,56	$\bar{3}$,8455405
		8	6	20,58	16,41	6.54. 8,98	$\bar{3}$,8455405
		9	11	20,59	16,41	6.44. 6,50	$\bar{3}$,8455405
Antarès...............	Juin...	7	4	16.18.45,89	116. 2.14,79	7.27.27,66	$\bar{3}$,8465405
		8	7	45,90	14,82	7.17.24,67	$\bar{3}$,8465405
		9	12	45,91	14,85	7. 7.22,19	$\bar{3}$,8465405
		11	18	45,92	14,91	6.47.16,80	$\bar{3}$,8466371
η Ophiucus............		8	8	17. 0.25,05	105.30. 0,63	7.58.46,63	$\bar{3}$,8465405
		9	13	25,07	0,61	7.48.44,13	$\bar{3}$,8465405
		11	19	25,09	0,56	7.28.38,70	$\bar{3}$,8466554
		12	24	25,10	0,54	7.18.35,71	$\bar{3}$,8467590
		13	29	25,11	0,52	7. 8.33,17	$\bar{3}$,8466414
		14	34	25,12	0,50	6.58.31,29	$\bar{3}$,8462008
		15	39	25,13	0,48	6.48.29,19	$\bar{3}$,8462008
		16	44	25,14	0,42	6.38.27,10	$\bar{3}$,8461884
		17	50	25,15	0,36	6.28.24,79	$\bar{3}$,8461158
		23	66	25,19	0,01	5.28.15,31	$\bar{3}$,8456657
δ Ophiucus...........		12	22	16. 5.14,65	103.14.19,03	6.23.48,54	$\bar{3}$,8467590
		13	27	14,66	18,94	6.13.45,83	$\bar{3}$,8466414
		14	32	14,66	18,85	6. 3.43,90	$\bar{3}$,8462008
		15	37	14,67	18,75	5.53.41,79	$\bar{3}$,8462008
		16	42	14,67	18,66	5.43.39,70	$\bar{3}$,8461884
		17	48	14,67	18,57	5.33.37,38	$\bar{3}$,8461158
		20	58	14,68	18,29	5. 3.31,41	$\bar{3}$,8458963
		23	64	14,68	18,01	4.33.27,84	$\bar{3}$,8456657

(*) En conservant toutes les dénominations générales établies pour les observations au nord du zénith, la distance méridienne moyenne déduite des distances zénithales observées au sud s'obtiendra par la formule

$$Z_m = Z - (1 + \omega)^2 \cdot \frac{\sin \Delta \sin D}{\sin (\Delta - D)} \cdot Q.$$

Les valeurs de la quantité ω sont données dans la dernière colonne du tableau, pour chaque jour d'observation. L'effet du facteur $(1 + \omega)^2$ a toujours été calculé par parties, d'après son développement $1 + 2\omega + \omega^2$; et ici, comme dans les séries au nord du zénith, les observations ont toujours été faites assez près du méridien pour que les termes ultérieurs de la formule de réductions pussent être négligés.

ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES EMPLOYÉS AU CALCUL DE LA LATITUDE

PAR LES ÉTOILES OBSERVÉES AU SUD DU ZÉNITH. — SUITE DU TABLEAU B.

NOMS DES ASTRES observés AU SUD DU ZÉNITH.	DATE de L'OBSERVAT. MOIS.	JOURS.	NUMÉROS D'ORDRE de la série.	ASCENSION droite apparente en temps sidéral.	DISTANCE au pôle boréal apparente.	HEURE du passage au méridien en temps de l'horloge.	LOGARITHME TABULAIRE de la quantité ω qui sert à réduire en temps sidéral les angles horaires comptés en temps de l'horloge.
				h ′ ″	° ′ ″	h ′ ″	
ζ Ophiucus.	juin. . .	12	23	16.27.35, 83	110.12.21, 41	6.46. 0, 36	$\bar{3}$, 8467590
		13	28	35, 83	21, 34	6.35.57, 65	$\bar{3}$, 8466414
		14	33	35, 84	21, 28	6.25.55, 73	$\bar{3}$, 8462008
		15	38	35, 85	21, 22	6.15.53, 63	$\bar{3}$, 8462008
		16	43	35, 85	21, 16	6. 5.51, 54	$\bar{3}$, 8461884
		17	49	35, 86	21, 10	5.55.49, 22	$\bar{3}$, 8461158
		23	65	35, 88	20, 73	4.55.39, 71	$\bar{3}$, 8456657
α de la Vierge..........		24	68	13.16. 2, 08	100.15. 0, 61	1.35.24, 81	$\bar{3}$, 8455792
		25	72	2, 07	0, 56	1.25.23, 77	$\bar{3}$, 8455450
		26	74	2, 06	0, 51	1.15.22, 22	$\bar{3}$, 8457194
		27	78	2, 05	0, 45	1. 5.21, 08	$\bar{3}$, 8454795
		28	80	2, 04	0, 40	0.55.19, 49	$\bar{3}$, 8456977
		30	83	2, 02	0, 29	0.35.16, 98	$\bar{3}$, 8455522
θ du Centaure..........		24	69	13.56.28, 70	125.30.38, 88	2.15.34, 34	$\bar{3}$, 8457184
		25	73	28, 69	38, 92	2. 5.33, 14	$\bar{3}$, 8455450
		26	75	28, 68	38, 95	1.55.31, 93	$\bar{3}$, 8457194
		27	79	28, 68	38, 97	1.45.30, 80	$\bar{3}$, 8454795
α du Verseau...........		25	70	21.56.50, 93	91. 9.43, 51	10.12.35, 65	$\bar{3}$, 8455450
Fomahault.............		27	76	22.47. 1, 10	120 32.28, 16	10.43.22, 49	$\bar{3}$, 8454795
Rigel.................		30	81	5. 6. 8, 96	98.24.36, 66	4.28.48, 41	$\bar{3}$, 8455522
	Juillet.	1	85	8, 98	36, 47	4.18.46, 71	$\bar{3}$, 8458904
Sirius................	Juin. . .	30	84	6.37.26, 81	106.29. 3, 94	5.59.28, 18	$\bar{3}$, 8455522
	Juillet.	1	86	26, 82	3, 72	5.49.27, 32	$\bar{3}$, 8458904

Tableau C.

pS EN 1825 A FORMENTERA,

ESPAGNE.

N° d'ordre des SÉRIES.	DATES des observations. Juin 1825.	DÉSIGN ÉTOILES O	NCE BALE de eune	DISTANCE de l'ÉTOILE AU POLE Boréal Δ.	LATITUDE CONCLUE PAR LES OBSERVATIONS FAITES Au Nord DU ZÉNITH.	Au Sud DU ZÉNITH.	NOMBRE d'observations de chaque série.	N° D'ORDRE des SÉRIES.
			″	° ′ ″	° ′ ″			
1....	......7....	β petite ourse	4,806	15. 7.45,184	38. 40. 0,014		10	1
2		γ *id.*	2,004	17. 32. 36,399	40. 1,597	° ′ ″	6	2
3		β′ scorpion (la	4,120	109. 19. 16,415		38. 39. 47,715	8	3
4		Antarès......	9,143	116. 2. 14,786		39. 44,357	8	4
5....	......8....	β petite ourse	6,780	15. 7.44,927	39. 58,293		16	5
6		β′ scorpion...	3,741	109. 19. 16,411		39. 47,330	10	6
7		Antarès......	1,594	116. 2. 14,820		39. 46,774	12	7
8		η ophiucus...	7,358	105. 30. 0,628		39. 46,730	14	8
9....	......9....	β petite ourse	8,731	15. 7.44, 67	39. 56,599		24	9
10		γ *id.*	5,656	17. 32. 35,862	39. 58,482		14	10
11		β′ scorpion...	4,303	109. 19. 16,407		39. 47,896	8	11
12		Antarès......	1,371	116. 2. 14,850		39. 46,521	14	12
13		η ophiucus...	9,558	105. 30. 0,607		39. 48,951	16	13
14....	......10....	β petite ourse	8,526	15. 7.44,450	39. 57,024		16	14
15		γ *id.*	7,969	17. 32. 35,594	39. 56,437		20	15
16....	......11....	β Petite ourse	9,812	15. 7.44,230	39. 55,958		12	16
17		γ *id.*	9,035	17. 32. 55,326	39. 55,636		14	17
18		Antarès......	1,105	116. 2. 14,906		39. 46,199	20	18
19		η ophiucus...	0,023	105. 30. 0,565		39. 49,458	20	19
20....	......12....	β petite ourse	8,410	15. 7.44,010	39. 57,580		22	20
21		γ *id*	7,126	17. 32. 35,058	39. 57,816		12	21
22		δ ophiucus...	7,878	93. 14. 19,034		39. 48,844	10	22
23		ζ *id*.......	1,515	100. 12. 21,407		39. 50,108	16	23
24		η *id*.......	9,753	105. 30. 0,544		39. 49,209	18	24
25....	......13....	β petite ourse	7.778	15. 7.43,790	39. 58,432		14	25
26		γ *id*	7,929	17. 32. 34,789	39. 59,282		20	26
27		δ ophiucus...	7,928	93. 14. 19,025		39. 48,903	14	27
28		ζ *id*......	1,826	100. 12. 21,345		39. 50,481	18	28
29		η *id*......	9,452	105. 30. 0,523		39. 48,929	18	29
30....	......14....	β petite ourse	8,990	15. 7.43,570	39. 59,440		16	30
31		γ *id.*	9,265	17. 32. 34,521	39. 56,215		16	31
32		δ ophiucus...	7,391	93. 14. 18,846		39. 48,545	14	32
			[illegible]	[illegible]		39. 50,111	14	33

TABLEAU C.

PRÉSENTANT LES DÉTAILS ET LES RÉSULTATS DE TOUTES LES SÉRIES D'ÉTOILES OBSERVÉES EN 1825 A FORMENTERA,

POUR DÉTERMINER LA LATITUDE DU POINT LE PLUS AUSTRAL DE L'ARC DU MÉRIDIEN DE FRANCE ET D'ESPAGNE.

Nº d'ordre des séries	Dates des observations. Juin 1825.	Désignation des étoiles observées	Page du registre d'observations	Distance zénithale Moyenne apparente A/n	Correction du niveau	Distance zénithale Moyenne corrigée A'	Thermomètre extérieur centésimal	Thermomètre du baromètre centésimal	Baromètre exprimé en millimètres de mercure	Réfraction conclue R.	Distance zénithale Moyenne vraie Z.	Réduction au méridien	Distance zénithale Méridienne Z.	Distance de l'étoile au pole boréal Δ.	Latitude conclue par les observations faites Au Nord du zénith	Latitude conclue par les observations faites Au Sud du zénith	Nombre d'observations de chaque série	Nº d'ordre des séries
1	[illegible]	β petite ourse supérieure	[illegible]	[illegible]	+ [illegible]	[illegible]	+ 16,30	+ 16,81	749,15	+ 40,990	36. 12. 53,493	— 38,597	36. 12. 4,806	15. 7. 45,184	38. 40. 0,014		10	1
2		γ id.	4	33. 47. [illegible]	+ [illegible]	33. 47. 12,200	16,10	16,95	749,05	37,776	33. 47. 49,676	— 27,672	33. 47. 22,004	17. 32. 36,399	40. 1,597		6	2
3		β' scorpion (la plus grosse)	4	57. 58. 11,640	— 6,460	57. 58. 5,180	16,10	17,00	749,15	1. 29,319	57. 59. 34,499	— 30,379	57. 59. 4,120	109. 19. 16,415		38. 39. 47,715	8	3
4		Antares	5	64. 40. 36,322	— 5,728	64. 40. 30,594	16,10	17,00	749,25	1. 57,887	64. 42. 28,481	— 29,338	64. 41. 59,143	116. 2. 14,786		39. 44,357	8	4
5	[illegible]	β petite ourse supérieure	6	36. 12. 25,554	+ 8,551	36. 12. 34,105	16,25	18,00	749,25	45,986	36. 13. 15,092	— 68,312	36. 12. 6,780	15. 7. 44,927	39. 58,293		16	5
6		β' scorpion	7	57. 58. 37,884	— 6,064	57. 58. 31,820	16,10	17,75	749,25	1. 29,364	58. 0. 1,182	— 57,441	57. 59. 3,741	109. 19. 16,411		39. 47,330	10	6
7		Antares	[illegible]	[illegible]	— [illegible]	[illegible]	[illegible]	17,75	749,25	1. 57,913	64. 42. 46,506	— 44,912	64. 42. 1,594	116. 2. 14,820		39. 46,774	12	7
8		η ophiucus	8	54. 9. 25,785	— 0,254	54. 9. 25,531	15,75	17,75	749,30	1. 17,331	54. 10. 3,066	— 55,708	54. 9. 7,358	105. 30. 0,628		39. 46,730	14	8
9	9	β petite ourse supérieure	9	36. 12. 33,570	+ 2,846	36. 12. 36,416	17,80	18,80	749,60	40,765	36. 13. 17,181	— 58,450	36. 12. 8,731	15. 7. 44, 67	39. 56,599		24	9
10		γ id.	10	33. 47. 11,046	+ 3,179	33. 47. 14,225	17,25	18,00	749,60	37,336	33. 47. 51,561	— 25,905	33. 47. 5,656	17. 32. 35,862	39. 58,481		14	10
11		β' scorpion	11	57. 58. 16,196	— 1,891	57. 58. 14,305	17,20	18,00	749,60	1. 29,009	57. 59. 43,314	— 39,011	57. 59. 4,303	109. 19. 16,407		39. 47,896	8	11
12		Antares	12	64. 40. 51,221	+ 0,937	64. 40. 52,158	17,30	18,25	749,55	1. 57,422	64. 42. 49,580	— 48,209	64. 42. 1,371	116. 2. 14,850		39. 46,521	14	12
13		η ophiucus	13	54. 9. 44,453	— 0,333	54. 9. 44,120	16,75	18,00	749,40	1. 17,262	54. 11. 0,382	— 70,825	54. 9. 9,558	105. 30. 0,607		39. 48,951	16	13
14	[illegible]	β petite ourse supérieure	16	36. 12. 21,150	+ 2,220	36. 12. 23,370	18,25	18,90	749,25	40,674	36. 13. 4,044	— 45,518	36. 12. 8,526	15. 7. 44,450	39. 57,024		16	14
15		γ id.	17	33. 47. 47,670	+ 3,409	33. 47. 51,079	17,75	18,60	749,55	37,280	33. 48. 28,359	— 60,390	33. 47. 7,969	17. 32. 35,594	39. 56,437		20	15
16	[illegible]	β Petite ourse supérieure	19	36. 12. 30,870	+ 2,923	36. 12. 33,793	19,40	19,80	749,20	40,497	36. 13. 14,290	— 54,478	36. 12. 9,812	15. 7. 44,230	39. 55,958		12	16
17		γ id.	20	33. 47. 17,584	+ 2,395	33. 47. 19,979	19,00	19,80	749,20	37,073	33. 47. 57,052	— 28,017	33. 47. 29,035	17. 32. 55,326	39. 55,636		14	17
18		Antares	21	64. 40. 51,024	+ 1,657	64. 40. 52,681	18,75	19,75	748,15	1. 56,564	64. 42. 49,245	— 48,140	64. 42. 1,105	116. 2. 14,906		39. 46,199	20	18
19		η ophiucus	22	54. 9. 33,480	+ 1,377	54. 9. 34,857	18,25	19,80	748,05	1. 6,681	54. 10. 51,538	— 61,515	54. 9. 50,023	105. 30. 0,565		39. 49,458	20	19
20	[illegible]	β petite ourse supérieure	23	36. 12. 20,487	+ 3,189	36. 12. 23,676	19,10	20,40	746,10	40,265	36. 13. 3,941	— 45,531	36. 12. 8,410	15. 7. 44,010	39. 57,580		22	20
21		γ id.	24	33. 47. 56,445	+ 4,145	33. 48. 00,590	19,65	20,40	746,10	36,844	33. 48. 37,434	— 70,308	33. 47. 27,126	17. 32. 35,058	39. 57,816		12	21
22		δ ophiucus	25	41. 54. 2,331	+ 0,666	41. 54. 2,997	19,70	20,10	746,10	49,351	41. 54. 52,348	— 44,470	41. 54. 7,878	93. 14. 19,034		39. 48,844	10	22
23		ζ id.	26	48. 52. 5,621	+ 0,235	48. 52. 5,856	19,50	20,10	746,10	1. 2,998	48. 54. 8,854	— 67,339	48. 52. 1,515	100. 12. 21,407		39. 50,108	16	23
24		η id.	42	54. 9. 40,680	— 1,702	54. 9. 38,978	19,30	20,10	746,10	1. 16,166	54. 10. 55,144	— 65,191	54. 9. 9,753	105. 30. 0,544		39. 49,209	18	24
25	[illegible]	β petite ourse supérieure	27	36. 12. 8,190	+ 3,857	36. 12. 12,047	18,75	20,00	747,75	40,490	36. 12. 52,537	— 34,759	36. 12. 7,778	15. 7. 43,790	39. 58,432		14	25
26		γ id.	28	33. 47. 35,682	+ 5,598	33. 47. 41,280	18,60	20,40	747,65	37,060	33. 48. 18,340	— 50,411	33. 47. 7,929	17. 32. 34,789	39. 59,282		20	26
27		δ ophiucus	29	41. 54. 15,673	— 2,963	41. 54. 12,710	18,40	20,00	747,75	49,709	41. 55. 2,419	— 54,491	41. 54. 7,928	93. 14. 19,025		39. 48,903	14	27
28		ζ id.	30	48. 52. 20,505	— 3,092	48. 52. 17,413	18,40	20,00	747,65	1. 3,397	48. 53. 20,810	— 68,984	48. 52. 1,826	100. 12. 21,345		39. 50,481	18	28
29		η id.	31	54. 9. 56,610	— 3,874	54. 9. 52,736	18,30	20,00	747,55	1. 16,626	54. 11. 9,302	— 79,910	54. 9. 9,452	105. 30. 0,523		39. 48,929	18	29
30	[illegible]	β petite ourse supérieure	32	36. 12. 40,590	+ 3,955	36. 12. 44,545	19,40	20,60	748,60	40,460	36. 13. 25,014	— 66,024	36. 12. 8,990	15. 7. 43,570	39. 59,440		16	30
31		γ id.	33	33. 47. 58,959	+ 5,815	33. 48. 4,774	19,25	20,60	748,60	37,026	33. 48. 41,800	— 72,535	33. 47. 9,265	17. 32. 34,521	39. 56,215		16	31
32		δ ophiucus	34	41. 54. 41,158	— 2,[illegible]	41. 54. 38,[illegible]	[illegible]	[illegible]	748,60	[illegible]	41. 55. 28,[illegible]	— [illegible]	41. 54. [illegible],391	93. 14. 18,846		39. 48,545	14	32
33		ζ id.	35	48. 52. 22,834	— 2,859	48. 52. 19,975	18,80	20,2	748,40	1. 3,353	48. 53. 23,328	— 71,935	48. 52. 1,393	100. 12. 21,282		39. 50,111	14	33
34		η id.	36	54. 9. 29,886	— 3,442	54. 9. 26,444	18,60	20,15	748,30	1. 16,599	54. 10. 43,141	— 33,440	54. 9. 9,601	105. 30. 0,502		39. 49,099	16	34
35	[illegible]	β petite ourse supérieure	37	36. 12. 32,844	+ 3,145	36. 12. 35,989	18,40	19,75	748,55	40,619	36. 13. 16,608	— 57,065	36. 12. 9,543	15. 7. 43,350	39. 57,107		16	35
36		γ id.	38	33. 48. 21,842	+ 4,824	33. 48. 26,666	18,40	19,50	748,55	37,157	33. 49. 3,823	— 95,367	33. 47. 8,456	17. 32. 34,253	39. 57,291		16	36
37		δ ophiucus	39	41. 53. 57,876	— 0,870	41. 53. 57,006	18,25	19,50	748,70	49,783	41. 54. 46,789	— 39,936	41. 54. 6,853	93. 14. 18,751		39. 48,102	10	37
38		ζ id.	40	48. 52. 18,943	— 0,437	48. 52. 18,506	18,10	19,50	748,70	1. 3,348	48. 53. 22,024	— 70,129	48. 52. 1,925	100. 12. 21,220		39. 50,707	14	38
39		η id.	41	54. 9. 37,241	— 1,516	54. 9. 35,725	17,80	19,50	748,70	1. 16,838	54. 10. 52,561	— 62,600	54. 9. 9,963	105. 30. 0,481		39. 49,482	14	39
40	[illegible]	β petite ourse supérieure	43	36. 12. 15,480	+ 3,918	36. 12. 19,398	19,00	20,30	748,70	40,525	36. 12. 59,923	— 39,760	36. 12. 20,163	15. 7. 43,130	39. 56,707		14	40
41		γ id.	44	33. 47. 37,899	+ 4,431	33. 47. 42,330	19,00	20,30	748,70	37,046	33. 48. 19,381	— 50,619	33. 47. 28,762	17. 32. 34,020	39. 57,218		16	41
42		δ ophiucus	45	41. 54. 11,008	— 1,523	41. 54. 9,485	18,60	20,30	748,70	49,681	41. 54. 59,166	— 52,938	41. 54. 6,328	93. 14. 18,659		39. 47,569	16	42
43		ζ id.	46	48. 52. 8,[illegible]	— [illegible]	48. 52. 8,621	18,60	20,30	748,70	1. 3,416	48. 53. 12,037	— 58,676	48. 52. 13,361	100. 12. 21,159		39. 52,202	20	43
44		η id.	47	54. 9. [illegible]	— 2,311	54. 9. [illegible]	[illegible]	20,30	748,70	1. 16,026	54. 10. 57,925	— 67,824	54. 9. 50,101	105. 30. 0,422		39. 49,679	21	44
45	[illegible]	Polaire inférieure (de jour)	48	[illegible]	+ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	748,20	1. 13,[illegible]	52. 57. 9,[illegible]	+ [illegible]	[illegible]	1. 37. 32,650	39. 56,051		8	45
46		β petite ourse supérieure	49	36. 12. 13,[illegible]	+ [illegible]	36. 12. 17,[illegible]	[illegible]	20,40	748,20	40,579	36. 12. 58,559	— 37,494	36. 12. 11,065	15. 7. 42,910	39. 56,025		24	46
47		γ id.	[illegible]	33. 47. [illegible]	+ [illegible]	33. 47. [illegible]	18,60	20,40	[illegible]	37,082	33. 48. 3,[illegible]	— 32,866	33. 47. 30,216	17. 32. 33,788	39. 55,996		22	47
48		δ ophiucus	51	41. 54. 23,021	— 0,987	41. 54. 22,[illegible]	18,30	[illegible]	748,20	49,759	41. 55. 11,[illegible]	— 64,398	41. 54. 7,395	93. 14. 18,567		39. 48,828	14	48
49		ζ id.	52	48. 52. 24,408	— 0,902	48. 52. 23,[illegible]	[illegible]	20,35	748,25	1. 3,142	48. 53. [illegible]	— 75,804	48. 52. 1,[illegible]	100. 12. 21,097		39. 50,250	22	49
50		η id.	53	54. 9. 19,548	— 0,[illegible]	54. 9. 19,021	[illegible]	20,30	748,20	1. 16,[illegible]	54. 10. 35,[illegible]	— 46,613	54. 9. 9,[illegible]	105. 30. 0,362		39. 48,789	16	50
51	18	Polaire inférieure (de jour)	54	52. 56. 3,597	+ 5,[illegible]	52. 56. 9,[illegible]	[illegible]	21,25	747,40	1. 12,677	52. 57. 22,256	+ 14,287	52. 57. 36,243	1. 37. 32,650	39. 56,107		10	51
52		β petite ourse supérieure	55	36. 12. 25,686	+ 2,[illegible]	36. 12. 28,[illegible]	19,85	20,80	747,80	40,358	36. 13. 8,799	— 48,187	36. 12. 20,612	15. 7. 42,690	39. 56,698		20	52
53	[illegible]	Polaire inférieure (de jour)	56	52. 56. 2,310	+ 2,051	52. 56. 4,361	21,95	21,40	746,35	1. 12,152	52. 57. 16,514	+ 19,117	52. 57. 35,631	1. 37. 32,66	39. 57,029		18	53
54		β petite ourse supérieure	57	36. 12. 10,417	+ 4,670	36. 12. 15,087	20,00	21,70	746,70	40,166	36. 12. 55,255	— 35,619	36. 12. 19,634	15. 7. 42,470	39. 57,896		12	54
55	20	Polaire inférieure (de jour)	58	52. 56. 18,420	+ 3,410	52. 56. 21,830	[illegible]	20,40	746,60	1. 12,533	52. 57. 34,363	+ 0,553	52. 57. 34,916	1. 37. 32,67	39. 57,754		2	55
56		β petite ourse supérieure	59	36. 11. 52,962	+ [illegible]	36. 12. [illegible]	[illegible]	20,40	745,05	40,381	36. 12. 41,100	— 20,203	36. 12. 20,897	15. 7. 42,293	39. 56,810		10	56
57		γ id.	60	33. 47. 26,089	+ [illegible]	33. 47. 30,[illegible]	18,50	20,40	744,45	36,906	33. 48. 7,501	— 37,334	33. 47. 30,167	17. 32. 33,089	39. 56,744		14	57
58		δ ophiucus	61	41. 54. 3,465	— 0,189	41. 54. 3,[illegible]	[illegible]	20,40	744,95	49,455	41. 54. 52,731	— 46,576	41. 54. 6,155	93. 14. 18,290		39. [illegible],965	4	58
59	21	Polaire inférieure (de jour)	62	52. 55. 58,372	+ 3,622	52. 56. 1,[illegible]	20,7	21,00	743,15	1. 12,186	52. 57. 14,180	+ 22,595	52. 57. 36,775	1. 37. 32,69	39. 55,915		8	59
60	23	Polaire inférieure (de jour)	63	52. 56. 7,341	+ 2,712	52. 56. 10,053	[illegible]	21,00	749,45	1. 12,774	52. 57. 22,827	+ 12,530	52. 57. 35,357	1. 37. 32,76	39. 57,433		12	60
61		La même 2ᵉ série (de jour)	63	52. 55. 59,327	+ 5,9[illegible]	52. 56. 5,[illegible]	20,25	21,00	749,45	1. 12,904	52. 57. 16,215	+ 20,038	52. 57. 36,253	1. 37. 32,76	39. 56,507		14	61
62		β petite ourse supérieure	64	36. 12. 8,010	+ 7,[illegible]	36. 12. 15,[illegible]	19,80	21,00	749,45	40,555	36. 12. 55,797	— 34,896	36. 12. 20,901	15. 7. 41,762	39. 57,337		18	62
63		γ id.	65	33. 47. 8,682	+ 3,277	33. 47. 11,959	18,70	21,25	749,65	37,138	33. 48. 29,097	— 58,151	33. 47. 30,946	17. 32. 32,390	39. 56,664		20	63
64		δ ophiucus	66	41. 54. 12,037	+ 1,[illegible]	[illegible]	18,50	21,25	749,65	49,798	41. 55. 3,414	— 57,060	41. 54. 6,354	93. 14. 18,014		39. 48,[illegible]	12	64
65		ζ id.	67	48. 52. 52,419	+ 2,229	48. 52. 54,648	18,40	20,50	749,80	1. 3,[illegible]	48. 53. 58,238	— 105,990	48. 52. 12,248	100. 12. 20,730		39. 51,518	10	65
66		η id.	68	54. 9. 22,747	+ 2,[illegible]	54. 9. 25,[illegible]	18,35	20,60	749,70	1. 16,[illegible]	54. 10. 41,798	— 51,561	54. 9. 50,237	15. 30. 0,007		39. 50,230	20	66
67	24	Polaire inférieure (de jour)	69	52. 56. 10,036	+ 2,139	52. 56. 12,175	21,00	20,80	750,30	1. 12,802	52. 57. 24,977	+ 10,326	52. 57. 15,303	1. 37. 32,80	39. 57,497		16	67
68		α vierge (de jour)	70	48. 55. [illegible]	— [illegible]	48. 55. 31,[illegible]	20,40	20,80	750,35	1. 3,265	48. 56. 34,841	— 104,960	48. 54. 49,881	100. 15. 0,61		39. 49,270	8	68
69		θ centaure (de jour)	71	74. 7. [illegible]	— 2,503	74. 7. [illegible]	20,00	20,50	750,10	3. 11,376	74. 10. 43,515	— 12,846	74. 10. 30,669	125. 30. 38,885		39. 51,784	4	69
70	25	α verseau	72	39. 50. 13,[illegible]	+ 2,[illegible]	39. 50. 16,205	18,45	19,80	749,80	46,333	39. 51. 2,538	— 89,774	39. 49. 32,764	91. 9. 43,512		39. 49,252	8	70
71		Polaire inférieure (de jour)	73	52. 56. 14,[illegible]	+ 1,[illegible]	52. 56. 16,682	21,375	22,00	749,55	1. 12,626	52. 57. 29,308	+ 6,990	52. 57. 36,298	1. 37. 32,81	39. 56,512		12	71
72		α vierge (de jour)	74	48. 54. 45,900	— 2,47[illegible]	48. 4. 43,426	20,25	21,00	748,70	1. 3,138	48. 55. 40,564	— 53,701	48. 54. 46,863	100. 15. 0,560		39. 52,[illegible]	[illegible]	72
73		θ centaure (de jour)	75	74. 8. 43,[illegible]	— 1,16[illegible]	74. 8. 41,508	19,90	20,80	748,40	3. 11,715	74. 11. 53,223	— 83,415	74. 10. 29,808	125. 30. 38,925		39. 50,881	6	73
74	26	α vierge (de jour)	76	48. 58. [illegible],838	+ 0,[illegible]	48. 59. 0,281	20,80	22,25	748,50	1. 3,130	49. 0. 3,417	— 313,008	48. 54. 50,409	100. 15. 0,506		39. 49,903	2	74
75		θ centaure (de jour)	77	74. 8. 3,930	+ 1,597	74. 8. 5,527	20,25	22,60	748,50	3. 11,320	74. 11. 16,847	— 47,508	74. 10. 29,339	125. 30. 38,946		39. 50,393	6	75
76	27	Fomalhault (de jour)	78	69. 10. 37,740	— 2,006	69. 10. 35,734	18,35	19,50	748,30	2. 24,770	69. 13. 0,504	— 47,998	69. 12. 12,506	120. 32. 28,160		39. 44,346	4	76
77		Polaire inférieure (de jour)	79	52. 56. 9,267	+ 3,660	52. 56. 12,927	21,10	21,25	748,15	1. 12,566	52. 57. 25,493	+ 10,270	52. 57. 35,763	1. 37. 32,790	39. 57,027		10	77
78		α vierge (de jour)	80	48. 55. 11,820	— 3,080	48. 55. 8,740	20,70	20,80	748,00	1. 2,994	48. 56. 11,734	— 81,187	48. 54. 50,147	100. 15. 0,450		39. 50,097	10	78
79		θ centaure (de jour)	81	74. 8. 42,405	+ 0,282	74. 8. 42,687	20,00	20,50	748,00	3. 11,546	74. 11. 54,233	— 83,083	74. 10. 31,150	125. 30. 38,967		39. 52,193	6	79
80	28	α vierge (de jour)	82	48. 54. 14,[illegible]	— 1,28[illegible]	48. 54. 13,225	21,075	22,3	746,20	1. 2,697	48. 55. 15,922	— 27,148	48. 54. 48,774	100. 15. 0,402		39. 48,372	8	80
81	30	Rigel (de jour)	83	47. 4. 11,[illegible]	— 2,8[illegible]	47. 4. 8,[illegible]	28,00	26,00	748,00	57,547	47. 5. 6,289	— 35,085	47. 4. 31,204	98. 24. 36,665		39. 54,549	2	81
82		Polaire inférieure (de jour)	84	52. 55. 57,[illegible]	+ 2,118	52. 55. 59,613	22,95	23,25	746,85	1. 11,965	52. 57. 11,579	+ 24,760	52. 57. 36,339	1. 37. 32,600	39. 56,261		6	82
83		α vierge (de jour)	85	48. 55. 59,691	— 2,[illegible]	48. 55. 57,493	22,00	25,5	746,7	1. 2,588	48. 57. 0,081	— 130,081	48. 54. 50,000	100. 15. 0,292		39. 49,708	10	83
84		Sirius (de jour)	87	52. 12. 40,635	— 2,786	55. 12. 37,849	27,75	27,2	748,05	1. 16,895	55. 13. 54,744	— 306,832	55. 8. 47,912	106. 29. 3,942		39. 43,970	2	84
85	Juillet 1	Rigel (de jour)	83	47. 4. 11,190	— 2,697	47. 4. 8,493	31,30	31,1	749,00	56,792	47. 5. 5,285	— 38,294	47. 4. 26,991	98. 24. 36,470		39. 50,521	2	85
86		Sirius (de jour)	87	55. 9. 1,125	— 2,953	55. 8. 58,172	28,60	28,75	748,90	1. 16,545	55. 10. 14,717	— 83,405	55. 8. 51,312	106. 29. 3,724		39. 47,588	4	86

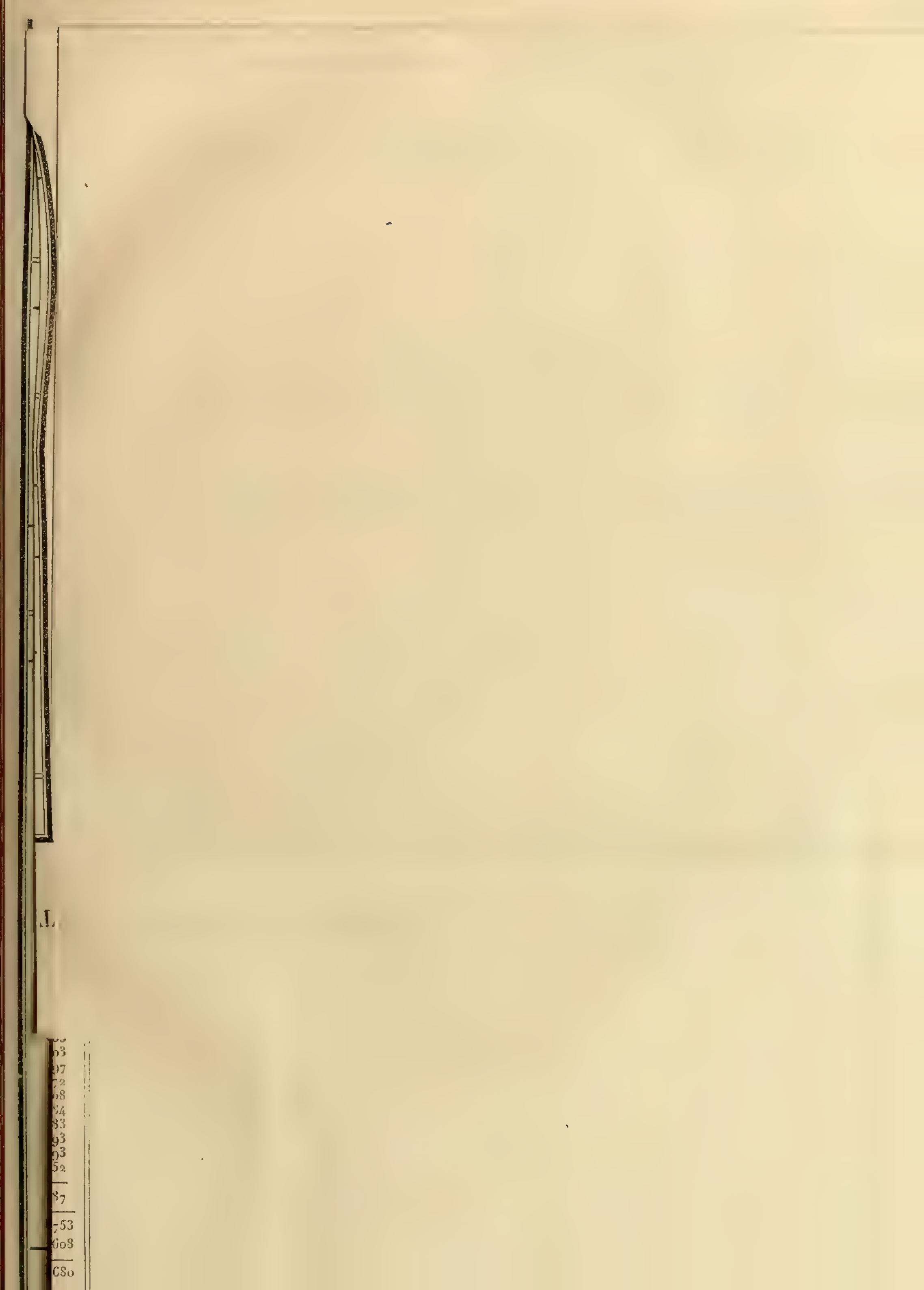


TABLEAU D.

RÉSUMÉ DE TOUTES LES SÉRIES DE CHAQUE ÉTOILE, FAITES AVANT ET APRÈS LA RECTIFICATION DU FIL TRANSVERSAL,

D'ABORD EN TOUCHANT LE CERCLE, PUIS SANS LE TOUCHER, PENDANT LA BISSECTION.

AU NORD DU ZÉNITH.

NOMS DES ÉTOILES.	RANG de [illegible]	NOMBRE des [illegible]	LATITUDE partielle	EXCÈS des écarts partiels	NOMBRE total d'observations, compris [illegible]
[illegible] petite Ourse supérieure	[illegible]	10	38. 40. 0,014	+ 1,[illegible]	
[illegible] moyenne			[illegible] 58 [illegible]		[illegible]
γ petite Ourse supérieure	9	6	38. 40. 1,59[illegible]	+ 1,558	
[illegible] moyenne			[illegible]		
[illegible] petite [illegible]	[illegible]	16	38. 39. 57,095	— 0,061	
				— 1,12[illegible]	
			7,440	+ 1,155	
[illegible] moyenne			[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
	[illegible]	6	50,215	— 0,[illegible]	
	[illegible]	14	56,744	+ 0,014	
	63	20	56,663	— 0,066	
[illegible] moyenne			[illegible]		
Polaire inférieure (de jour)	45	8	38. 39. 56,051	— 0,685	
	[illegible]	10	56,107	— 0,629	
	[illegible]	18	57,029	+ 0,293	
	[illegible]	2	57,[illegible]	+ 1,018	
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]			[illegible]		

Moyenne des séries observées dans le premier état de l'instrument, en y joignant la dernière d'Antarès, nº 18

AU NORD DU ZÉNITH.

Excès partiels sur 50″ 10,014

[illegible]

Somme des cinq excès 43,985

Latitude moyenne 38. 39. 58,9970

Nombre des observations [illegible]

AU SUD DU ZÉNITH.

Excès partiels sur 50″ .... [illegible]

[illegible]

6,100

8,0[illegible]

[illegible] 10,[illegible]

Latitude moyenne [illegible] observations .... 38° 39′ 46″,0475

58,00[illegible]

Par les cinq séries du nord [illegible] observations ..

Latitude vraie, résultante des 14 séries, faites tant au nord qu'au sud [illegible]

Nombre total des observations [illegible]

AU SUD DU ZÉNITH.

NOMS DES ÉTOILES	RANG de	NOMBRE des	LATITUDE partielle	EXCÈS des écarts partiels	NOMBRE d'observations
β Scorpion (la plus grosse des deux)	3	8	38. 39. [illegible]	+ [illegible]	
[illegible] moyenne			[illegible]		[illegible]
Antarès	4	8	38. 39. [illegible]	[illegible]	
[illegible] moyenne			38. 39. 45,88		3[illegible]
Ophiuchus	[illegible]		[illegible]		
[illegible] moyenne			38. 39. [illegible]		[illegible]
Antarès	19	[illegible]	38. 39. 46,[illegible]		10 [illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	46,[illegible]	— 0,[illegible]	
[illegible] moyenne			[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	— 0,[illegible]	
[illegible] moyenne			[illegible]		
ζ Ophiuchus	33	[illegible]	38. 39. 50,[illegible]	[illegible]	
On a heurté la lunette avec la tête à la fin de la 19ᵉ observation.	[illegible]	[illegible]	50,[illegible]	— 0,[illegible]	
	[illegible]	20	52,[illegible]	+ 1,[illegible]	
	49	22	50,250	— 0,519	
	65	10	51,518	+ 0,750	
[illegible] moyenne			[illegible]		
Vierge (de jour)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible] moyenne			[illegible]		
θ Centaure (de jour)	69	4	38. 39. 51,78[illegible]	+ 0,[illegible]	
[illegible]			[illegible]		
[illegible] (de jour)					
Rigel (de jour)	81	2	38. 39. 54,519	— 2,01[illegible]	
[illegible] moyenne			38. 39. 5[illegible]		[illegible]
Sirius (de jour)	84	2	38. 39. 43,970	— 1,8[illegible]	
	[illegible]	4	47,[illegible]	+ [illegible]	
2 séries : moyenne			38. 39. 45,970		[illegible]

PREMIER MODE D'OBSERVATION.

On n'est pas certain d'avoir observé avec le cercle libre, c'est pourquoi l'on a réuni cette 18ᵉ série aux précédentes d'Antarès.

SECOND MODE D'OBSERVATION.

	LATITUDE [illegible]	EXCÈS [illegible]	NOMBRE total [illegible]
ζ Ophiuchus (les mêmes, en rejetant la série nº 45)	38. 39. 50,[illegible]	— 0,481	
	[illegible]	— 0,[illegible]	
	[illegible]	— 0,[illegible]	
	50,[illegible]	+ 0,[illegible]	
	50,250	— [illegible]	
	51,518	+ 0,989	
[illegible] moyenne	38. 39. 50,[illegible]		[illegible]

On n'a pas cru, lors ces cinq dernières séries [illegible] la latitude [illegible] excessivement défavorables, par des [illegible] ne les avait tentées que comme de simples essais, pour connaître la puissance de l'instrument, et se connaître les plus grandes chances [illegible] Antarès [illegible] au sud du zénith, tandis que les 33 autres [illegible] donnent [illegible] 38. 39. [illegible]

Moyenne des séries observées dans le second état de l'instrument, en excluant du côté du sud les cinq dernières et la série nº 45 de ζ Ophiuchus

AU NORD DU ZÉNITH.

Excès partiels sur 50″ .... [illegible]

[illegible]

Somme des 33 excès 256,306

Par les 33 séries au nord : latitude moyenne, 480 observations .... 38° 39′ 57″,7668

AU SUD DU ZÉNITH.

Excès partiels sur 50″ .... [illegible]

[illegible]

Somme des 33 excès 119,387

Par les 33 séries au sud : latitude moyenne, [illegible] observations .... 38. 39. 4[illegible]

Par les 33 séries du nord .... [illegible]

Latitude vraie résultante des 66 séries faites, tant au nord qu'au sud, l'instrument étant libre .... [illegible] 53,1680

RÉSUMÉ DÉFINITIF.

	NOMBRE [illegible]	NOMBRE [illegible]	LATITUDE [illegible]	EXCÈS [illegible]	PRODUIT des excès partiels [illegible]
L'instrument touché	180	14	38. 39. 52,6992	+ [illegible]	[illegible]
L'instrument libre	880	66	38. 39. 53,1680	+ [illegible]	[illegible]
Somme	1060	80	Somme des 80 excès [illegible]		[illegible]

Latitude vraie par les 1060 observations, comprenant 80 séries, tant au nord qu'au sud du zénith .... 38° 39′ 53″,216

Réduction à l'ancienne station du cercle de 1808 .... — 0,044

Latitude nouvelle réduite à l'ancienne station de 1808 .... 38° 39′ 5[illegible]

RECHERCHES

ANATOMIQUES ET PHYSIOLOGIQUES

SUR LA

GESTATION DES QUADRUMANES

Par G. BRESCHET.

PARTIE HISTORIQUE.

Qui tractaverunt scientias, aut empirici, aut dogmatici fuerunt. Empirici, formicæ more, congerunt tantum et utuntur. Rationales, aranearum more, telas ex se conficiunt. Apis vero media est, quæ materiam ex floribus horti et agri elicit, sed tamen eam propria facultate vertit et digerit.

Bacon, Nov. organ., lib. I. Aph. 95.

Le mémoire sur la gestation des quadrumanes, que nous présentons aujourd'hui à l'Académie des sciences, est un travail que nous aurions désiré donner plus complet; mais la difficulté de faire des recherches, par la rareté des occasions, ne nous a pas permis de poursuivre nos investiga-

tions aussi loin que nous le désirions et que le sujet le demandait. C'est à cette cause que nous attribuons le silence des anatomistes sur la gestation de plusieurs espèces de mammifères, et particulièrement sur celle des singes (1).

---

(1) J'avais demandé des renseignements sur ce point à plusieurs zoologistes français et étrangers, et j'ai reçu depuis longtemps de mon célèbre ami A. Rudolphi, un mémoire imprimé que j'ai souvent cité dans mon opuscule; et beaucoup plus tard, notre confrère M. Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire m'a remis des notes que je me fais un devoir de rapporter ici, parce qu'elles sont d'un véritable intérêt et qu'elles jetteront du jour sur les divers points traités dans ce mémoire, et confirmeront plusieurs assertions que j'ai émises. Les voici :

« Je vous envoie les notes que vous m'avez demandées et que je regrette bien de vous avoir fait attendre si longtemps.

« Pour rendre cette note plus claire, je commencerai par quelques distinctions nécessaires entre les groupes qui composent l'ordre des quadrumanes, ou mieux et plus exactement, selon la nomenclature de Linné, l'ordre des *Primates*. Cet ordre, tel que je l'ai considéré depuis quelques années, est divisé en quatre familles, dont deux seulement doivent nous occuper ici: celle des singes et celle des Lémuriens, correspondant exactement aux deux genres *Simia* et *Lemur* de Linné. Les deux autres familles ne se composent chacune que d'un seul genre, dont aucun représentant n'a encore vécu en Europe : ce sont des *Tarsiens* et des *Chirungers*, dont pour cette raison je n'ai rien à dire ici. Pour les *Lémuriens* eux-mêmes, les observations que j'ai pu faire ou recueillir sur eux sont en très-petit nombre : deux genres seulement ont vécu en Europe, les genres *Maki* et *Chirogale;* et encore ce dernier n'y a-t-il été vu que très-rarement. Reste donc la famille des singes dont on apporte en France de si nombreux individus, et dont je vous parlerai presque uniquement dans cette note. Ici donc, je dois pousser les distinctions plus loin; et après avoir séparé la famille des singes des trois autres familles des *Primates*, il

importe de remarquer que cette grande famille se subdivise, du moins selon mes classifications, en trois tribus ainsi qu'il suit:

PREMIÈRE TRIBU. (Ongles aplatis, molaires $\frac{5}{5}\big|\frac{5}{5}$, narines sous nasales.)	Genres : *Troglodyte*, *Orang*, *Gibbon*, *Nasique*, *Semnopithèque*, Colobe, *Guenon*, *Macaque*, *Magot*, *Cynopithèque*; *Cynocéphale*. Tous de l'ancien continent.
SECONDE TRIBU. (Ongles courts, molaires $\frac{6}{6}\big|\frac{6}{6}$, narines latérales.)	Genres : *Hurleur*, *Atèle*, Ériode, *Lagotriche*, *Sajou*, Callitris, *Saïmiri*, *Nyctépithèque*, *Saki*. Tous américains.
TROISIÈME TRIBU. Ongles en griffes. Molaires $\frac{5}{5}\big|\frac{5}{5}$.	Le seul genre : *Ouistiti*. Américain.

« La famille des singes se compose ainsi de 21 genres, parmi lesquels j'en ai observé de vivants quinze; ce sont ceux dont j'ai souligné les noms. Cinq très-fréquemment (Guenon, Macaque, Magot, Cynocéphale et Sajou); les autres plus ou moins rarement. Pour les genres Guenon et Macaque, en particulier, la Ménagerie en a possédé, même presque toujours à la fois, plusieurs espèces. J'y ai observé successivement ou je puis y observer maintenant, jusqu'à huit espèces de Macaques et douze espèces de Guenons. J'ai observé également un grand nombre de Cynocéphales, la plupart appartenant à l'espèce du Papion; les autres, aux espèces suivantes : Mandrill, Drill, Chocma et Babouin. Sur les six espèces connues de Cynocéphales, l'Hamadryas est donc la seule que je n'aie pas vue vivante.

« Les observations de MM. George et Frédéric Cuvier, de mon père et de plusieurs zoologistes anglais, qui se sont attachés à connaître les espèces existant dans les jardins zoologiques de Londres, ont généralement porté sur les mêmes singes que j'ai eu le plus souvent occasion d'observer, ceux-ci étant partout les plus communs : aussi les faits indiqués par les auteurs s'accordent-ils très-bien avec ceux que j'ai pu recueillir par moi-même, et dont je vais vous faire ici le résumé.

« Les femelles des *Guenons*, des *Macaques*, des *Magots*, des *Cynocéphales*, et probablement (mais ceci par analogie seulement), de tous les

autres genres de la première tribu, sont sujettes à un écoulement périodique reparaissant avec assez de régularité de mois en mois. Les matières émises par la vulve, sont du sang et des mucosités, tantôt sanguinolentes, tantôt blanches; l'écoulement se continue pendant six à huit jours et quelquefois plus : M. Cuvier aîné fixe même à quinze jours la durée de l'écoulement chez une femelle de Mandrill, dont il a fait le sujet d'observations assez suivies.

« L'écoulement coïncide, chez toutes les femelles, avec un gonflement plus ou moins manifeste de la vulve et des parties environnantes. Le gonflement est médiore chez les femelles de Guenons, très-considérable chez les femelles de plusieurs espèces de Macaques et de toutes les espèces de Cynocéphales. Chez tous ces derniers le gonflement s'étend, non-seulement jusqu'à l'anus, mais bien au delà, et il est tellement marqué, que cet orifice se trouve alors comme environné d'un large bourrelet. La peau devient en même temps très-colorée en rouge. Chez le Mandrill, M. G. Cuvier compare, pour le volume, à une tête d'enfant *la protubérance inégale, rouge et comme enflammée, qui se forme alors autour de l'anus* (*). Les mêmes phénomènes, mais un peu moins prononcés, ont lieu chez les femelles de Macaques ; et de plus il arrive souvent, chez celles-ci, par exemple chez les femelles de Rhezus et Maimons, que le gonflement s'étende jusqu'à la partie inférieure de la queue, près de la base. J'ai même décrit dans le *Dictionnaire classique d'histoire naturelle*, une femelle de Macaque paraissant appartenir à une espèce particulière (*Mac. libidinosus*), chez laquelle le gonflement avait envahi, non-seulement tout ce qui environne la vulve, l'anus et les callosités, mais même presque toute l'étendue de la face inférieure de la queue, qui, il est vrai, était assez courte.

« Les femelles qui reçoivent fréquemment les mâles en tout temps, deviennent, quand a lieu cette turgescence extrême des parties sexuelles, très-avides de l'approche de ceux-ci. Le rut est surtout très-ardent vers le commencement et la fin de l'écoulement. L'accouplement est très-court, mais souvent répété. Le même mâle couvre volontiers toutes les femelles qui vivent avec lui, et réciproquement chacune de celles-ci se laisse couvrir par tous les mâles, sans même qu'il y ait distinction d'espèces ou même

(*) Ménagerie du Muséum, t. I, p. 338, édit. de 1804.

de genres. Les différences très-marquées de taille arrêtent seules les mâles dans leurs tentatives d'accouplement. Il est d'ailleurs à peine besoin de remarquer, à l'égard des accouplements croisés comme à l'égard des habitudes des mâles, qu'il est ici question d'animaux observés dans l'état de captivité.

« Dans l'accouplement, la femelle se tient immobile dans la station quadrupède. Le mâle, presque debout derrière elle, la tient ordinairement par les épaules, ou s'appuie sur elle de ses mains de devant, en même temps que souvent, de ses mains de derrière, il tient les talons de la femelle.

« Lorsque les femelles sont pleines, elles sont beaucoup moins recherchées des mâles, qui souvent même les repoussent et les maltraitent. Il arrive alors tout naturellement que les femelles évitent les mâles. Ce changement dans les habitudes des animaux, et la non-réapparition des règles, indiquent, longtemps avant le développement du ventre, l'état de gestation des femelles.

« On a indiqué depuis longtemps, comme un fait remarquable et qui établirait à leur égard une distinction importante, la non-existence de la menstruation chez les femelles des singes des deux dernières tribus et chez les Lémuriens. Ce fait négatif me parut suffisamment établi à l'égard de ces derniers et de la troisième tribu des singes. Pour la seconde, je ne crois pas qu'il puisse être encore admis d'une manière générale : car cette tribu renferme un assez grand nombre de genres, qui se trouvent précisément différer entre eux, plus par les organes sexuels, que par la plupart des autres appareils. Ainsi, les Atèles, si remarquables par l'énorme développement de leur clitoris nu, si semblable à un pénis d'un Hypospade; les Ériodes, chez lesquels, comme je l'ai montré, le clitoris ressemble à une brosse; les Sajous, chez lesquels il est peu différent de celui des singes de l'ancien monde, peuvent fort bien présenter d'autres différences sexuelles. Or, parmi eux, les Ériodes n'ont jamais été étudiés vivants en Europe par aucun zoologiste; les Atèles, par exemple, le Couïta, le Cayou, le Chameck, le Belzébuth, n'ont été observés que rarement, et parmi les Sajous eux-mêmes qui sont ici si communs, à peine trouvons-nous une femelle pour dix mâles.

« La rareté de la plupart des genres américains en Europe, et pour le seul

genre commun, celui des Sajous, la rareté des femelles, et au contraire la réunion si fréquente, dans nos ménageries, des deux sexes à la fois pour les singes de la première tribu, explique le résultat suivant. Les exemples de reproduction que nous avons vus en France sont ainsi répartis :

« *Première tribu des singes.* — Des exemples se sont présentés :

« 1° Dans le genre Guenon, pour deux espèces : le Mangabey, qui a avorté, et le Grivet dont une femelle, existant encore présentement à la Ménagerie, a mis bas trois fois. L'un des petits a été presque élevé. Une des trois mises bas était un avortement survenu vers le milieu de la gestation.

« 2° Dans le genre Macaque, pour trois espèces : le Macaque ordinaire, le Rhezus, le Maimon. Ce genre est celui qui se reproduit le plus souvent en France. Je connais un assez grand nombre d'exemples, les uns à la Ménagerie, les autres chez des montreurs d'animaux ou des baladins.

« 3° Dans le genre Magot. L'espèce type ou le Magot d'Afrique ne s'est jamais reproduit à la Ménagerie ; mais il y a eu plusieurs exemples de reproduction chez les montreurs d'animaux. Cette différence tient à l'emploi que ceux-ci font des Magots, l'une des espèces qui se dressent le mieux à la voltige et à divers exercices. Il est vraisemblable, au reste, que nous ne tarderons pas à avoir de pareils exemples. Depuis la conquête d'Alger, ce singe, le plus commun de tous en Barbarie, nous arrive fréquemment, et nous possédons maintenant presque toujours les deux sexes à la fois.

« 4° Dans le genre Cynocéphale. Pendant longtemps nous nous sommes étonnés de voir rester stériles toutes les femelles d'un genre où les accouplements se répètent plus souvent que dans aucun autre. Depuis quelques années, deux femelles de Papion ont mis bas. L'un des petits, aujourd'hui âgé de dix-huit mois, vit encore à la Ménagerie. Sa mère est morte, il y a quelques mois, d'une phthisie pulmonaire qui s'est déclarée après un avortement. L'autre femelle, de même que celle-ci, avait été couverte par plusieurs mâles, dont le plus vigoureux était, non un Papion (*Cynocephalus Sphinx*), mais un Chacma (*Cynocephalus Porcarius*). Or le petit s'est trouvé beaucoup plus semblable à celui-ci qu'à sa mère. Il y a tout lieu de le considérer comme

un hybride des deux espèces. Malheureusement ce sujet, dont il eût été très-curieux de suivre le développement, est mort très-jeune.

« *Seconde tribu.* — Je n'ai jamais vu, dans aucun genre de cette tribu, d'exemple de reproduction. Seulement on m'a assuré que des *Sajous* s'étaient reproduits chez M. le duc de Luxembourg.

« *Troisième tribu.* — Des Ouistitis ordinaires se sont reproduits non-seulement à la Ménagerie, mais aussi chez divers particuliers, entre autres chez notre confrère M. Audoin, qui a fait sur les instincts et les habitudes des Ouistitis, plusieurs observations très-intéressantes, rapportées par moi dans le Dictionnaire classique d'histoire naturelle.

« *Famille des Lémuriens.* — Nous avions vu à la Ménagerie un exemple de reproduction de Maki à front blanc : M. Frédéric Cuvier en a fait connaître les circonstances dans son ouvrage sur les mammifères de la Ménagerie. En outre, nous avons au Cabinet de jeunes Makis Varis, nés à la Malmaison, chez l'impératrice Joséphine.

« Il a été impossible dans la plupart des cas de déterminer exactement la durée de la gestation : car les accouplements se font certainement encore après la conception, pendant un temps plus ou moins long : il y a même, mais exceptionnellement, des mâles qui couvrent encore les femelles très-longtemps après (*) : cependant tout s'accorde pour fixer la durée de la gestation *chez les singes* à sept mois environ; ce qui résulte aussi des indications données par quelques voyageurs. Pour le Maimon, qui a été le sujet de ses observations, M. Frédéric Cuvier a cru pouvoir fixer le terme de sa naissance à sept mois et vingt jours.

« Dans tous les cas qui me sont connus, le nombre des petits a été d'un seul pour tous les singes de la première tribu. Je ne sais rien à cet égard de ceux de la seconde, si ce n'est par les relations des voyageurs qui nous représentent ces singes comme étant aussi ordinairement unipares. Les singes de la troisième tribu et les Lémuriens ont souvent deux ou trois petits.

« Les petits naissent dans un état de développement comparable à celui

(*) Ceci, comme je l'ai dit plus haut, est rare chez les singes de la première tribu ; mais les Ouistitis observés se sont accouplés presque jusqu'à la naissance des petits.

de l'enfant né à terme. Presque aussitôt après leur naissance, ils sont placés par la mère de manière à avoir la bouche en face de la tetine qu'ils saisissent bientôt, et qu'ils conservent d'ordinaire dans leur bouche, même quand ils ne tettent pas. Dès qu'ils sont assez forts, ils se cramponnent eux-mêmes, à l'aide de leurs quatre mains, dans les poils de la mère, qui alors peut sauter et se livrer aux mouvements les plus violents sans les tenir. Vers six semaines ils commencent à prendre dans leurs mains la nourriture, et à la porter à la bouche, bien que l'alimentation continue à consister principalement, et cela pendant longtemps encore, dans la succion du lait. J'ai vu chez le Papion, l'allaitement ne se terminer entièrement qu'au bout d'un an, époque à laquelle commença une nouvelle gestation.

« Le développement est très-lent, comparativement à ce qui a lieu chez la plupart des animaux. Le jeune Papion dont je viens de parler, et qui a maintenant dix-huit mois, n'a encore que la moitié environ d'un adulte. Il faut certainement plusieurs années à un Cynocéphale pour atteindre la taille d'un adulte. Les femelles grandissent encore longtemps après l'établissement de la menstruation. Le développement est beaucoup moins lent chez la plupart des autres *Primates* que chez les singes de la première tribu.

« Les femelles des singes sont ordinairement d'excellentes mères; seulement, lorsque leurs petits commencent à manger seuls, elles cèdent à leur instinct de gourmandise et s'empressent de saisir tout ce qu'on offre à leurs petits, ou même de le leur arracher; mais ceux-ci apprennent bientôt à se garantir de la gourmandise de leurs mères, auxquelles ils tournent le dos ou dont ils s'éloignent pour manger tranquillement. Les parents montrent aussi le plus tendre attachement à leurs petits, sauf toutefois les exceptions individuelles. Il y a au reste quelques exceptions relatives à la tendresse des mères pour leurs petits en captivité. Une femelle de Ouistiti, ayant eu trois petits à la Ménagerie du Muséum, dévora dès le premier jour la tête de l'un d'eux; les deux autres furent, au contraire, jusqu'à l'époque de leur mort qui arriva au bout de quelques mois, tendrement soignés par elle et par le père. Un fœtus de Mangabey, né longtemps avant terme, et par conséquent sans vie, eut également la tête dévorée par sa mère.

« Les femelles de Makis soignent aussi très-bien leurs petits, qu'elles portent fréquemment sur le dos, tandis que la position que j'ai indiquée

J. Chr. Gust. Jœrg, qui a publié, en 1808, un ouvrage sur l'utérus, dans son état de gestation et de non gestation chez l'homme et chez les mammifères (1), dit qu'il est à regretter que nous ne connaissions pas le mécanisme du part chez le Jocko (*Simia troglodytes*), l'Orang-Outang (*Simia satyrus*), et que nous ne possédions jusqu'ici aucune description de l'utérus en gestation, du placenta et des membranes de l'œuf dans les singes.

Avant l'ouvrage de Jœrg, plusieurs observations curieuses, mais incomplètes, avaient été publiées sur la gestation et le part de quelques quadrumanes, sans qu'aucun travail important eût paru sur la disposition des organes de la génération et sur l'œuf.

D'innombrables écrits ont été faits depuis cette époque sur les évolutions organiques, et plus spécialement encore sur les évolutions embryonnaires; mais rien n'a été donné sur la gestation des quadrumanes, si nous en exceptons

---

pour les jeunes singes est constante jusqu'à l'époque où ceux-ci commencent à quitter et à reprendre leur mère.

« Je n'ai pu recueillir aucun renseignement sur ce qui se passe à l'égard des délivres chez les femelles de Lémuriens et chez celles des singes américains. Chez les singes de la première tribu, le placenta suit quelquefois immédiatement le petit; d'autres fois il ne vient qu'une ou deux heures après. Il a fallu dans un cas le retirer. Quant à la mise bas, elle s'est faite chez toutes les femelles de la Ménagerie très-vite et avec très-peu de douleur.

« Le délivre a été abandonné par toutes sans être mangé, mais non quelquefois sans être déchiré, ou même sans que la mère en eût goûté. »

(1) Ueber das Sebœrorgan des Menschen und Sæugthiere im Schwangern und Nicht Schwangen Zuslande, etc. Leipzig, 1808, in-fol.

quelques observations recueillies au Jardin du roi, par Fr. Cuvier, ou par A. Rudolphi, dans l'île des Paons, près de Berlin.

Au rapport de Buffon, les singes peuvent vivre dans nos climats, mais c'est dans les pays très-chauds qu'ils peuvent surtout multiplier (1). G. Edwards, dans sa description du Sanglin, dit avoir vu, chez un marchand à Londres, un très-beau Sanglin. Ce négociant avait demeuré à Lisbonne, où sa femme avait essayé, pour se distraire, d'avoir de la race de Sanglin; c'est le nom qu'ils donnaient à ce petit animal; et elle réussit, car elle parvint à faire produire ces animaux, le climat la favorisant dans son projet.

Ces petits Sanglins étaient d'abord très-laids, n'ayant presque point de poils sur le corps. Ils s'attachaient très-fortement à la mamelle de leur mère, et, devenus plus forts, ils se cramponnaient sur son dos ou sur ses épaules. Lorsqu'elle était lasse de les porter, elle s'en débarrassait en se frottant contre une muraille. Dès qu'elle quittait ses petits, le mâle en prenait soin aussitôt, et les faisait grimper sur son dos (2).

Siret a consigné dans le Journal de physique, l'histoire de

---

(1) Voyez Buffon. « L'homme peut habiter tous les climats; il vit, il multiplie dans ceux du Nord et dans ceux du Midi; le singe a de la peine à vivre dans les contrées tempérées, et ne peut multiplier que dans les pays très-chauds. » (*Histoire naturelle générale et particulière avec la description du Cabinet du Roi.* T. XIV, in-4°, page 41. Paris, Imprimerie royale, 1766.)

(2) Tome Ier, pages 15 et 17, chap. VIII, pl. 218. The Sanglin, or *Cagui minor.* Glenings of natural history exhibiting figures of quadrupedes, birds, insects, plants, etc. By George Edwards. London, 1758.

deux jeunes Ouistitis mâles, nés sans poils, dans la maison du marquis de Neele, à Paris, pendant le mois d'août. Les petits tetèrent leur mère pendant deux mois, mais alors elle leur refusa la mamelle.

Elle conçut de nouveau dans le mois de février, et au bout de trois mois, mit bas un seul petit, que ses deux frères, dans un accès de jalousie, maltraitèrent et firent périr (1).

Pallas (2) nous a conservé l'histoire de la gestation et du partde deux Sagouins appartenant au comte de Trcherzni-

---

(1) « Le marquis de Neele, au mois de février dernier, mit deux petits Ouistitis, mâle et femelle, dans un cabinet éclairé par une seule petite fenêtre, exposée au midi : comme ces animaux sont très-sensibles au froid, il eut soin d'y faire entretenir, par le moyen d'un poêle, une chaleur de 30 à 35° R. A la fin de juin il porta ces animaux à Rouen, où il les fit mettre dans une grande cage à perroquet, et l'on présume que ce fut dans cette cage qu'ils s'accouplèrent. On les rapporta à Paris le 15 juillet, et vers le 15 août on fut surpris de voir sur l'épaule du mâle et de la femelle, un petit animal sans poils qui ne ressemblait nullement à des Ouistitis. Ces petits animaux étaient si fort attachés au dos de leurs parents, que, malgré les sauts prodigieux qu'ils faisaient dans le cabinet, les petits ne se dérangeaient point. Souvent la mère les portait tous les deux, mais plus souvent encore le père en avait un.

« Le poil leur est venu dans l'espace d'un mois, et la mère les a allaités environ deux mois. On a remarqué que la mère aimait moins ses petits que le père; lorsque celui-ci s'apercevait que la femelle n'en prenait pas assez de soin, il l'avertissait par un cri, et si elle ne lui obéissait pas, il la battait. Au bout de deux mois que ces petits ont été sevrés, la mère les a accoutumés à se passer d'elle, et pour s'en défaire, elle leur donnait des coups de patte lorsqu'ils étaient sur son épaule, pour les faire se détacher. » (P. 453-454. *Journ. de physique* de l'abbé Rozier, décembre 1778.)

(2) Neue Nordische Beytræge, etc., 2 B. 541-47.

cheff, qui firent trois fois des petits dans l'espace de deux ans. A chaque époque du rut, la femelle avait un flux sanguin. La durée de la gestation était de trois mois, et il pouvait y en avoir deux dans l'année. Chaque part avait produit deux petits, et presque toujours des mâles.

Ces petits singes s'accrochaient à leur mère pendant les premières semaines, temps pendant lequel ils étaient presque entièrement glabres. Lorsque la femelle était fatiguée, elle les jetait sur le dos du mâle, ou se disputait avec lui jusqu'à ce qu'il les reçût. Parvenus à l'âge d'un mois ou de six semaines, et dès que les poils eurent poussé, la mère commença à les sevrer et à ne plus les défendre contre les attaques de leurs frères.

M. Frédéric Cuvier dit que dans la Ménagerie du Jardin des Plantes, une femelle de Ouistiti (*Sim. Jacchus*, L.) fut mise en rapport avec un mâle, vers la fin du mois de septembre, et que le 27 avril suivant, elle mit bas trois petits, dont deux femelles et un mâle, sans qu'on ait pu déterminer la durée de la gestation. Ces petits Ouistitis naquirent les yeux ouverts, et la surface de leur corps offrait un poil très-court, à peine apparent sur la queue. Ils s'accrochaient à leur mère, qui, avant qu'ils ne pussent teter, arracha la tête à l'un d'eux et allaita les deux autres. Lorsqu'elle était fatiguée, elle chargeait le mâle de les soigner, ce qu'il faisait avec empressement. L'un de ces deux petits Ouistitis mourut au bout de quelques mois, et l'autre ne cessa de vivre que vers le milieu de juillet, époque à laquelle la femelle devint en chaleur et perdit son lait (1).

---

(1) « Deux Ouistitis ayant été réunis vers la fin de septembre 1819, quoi-

Pendant que nous rédigions ce mémoire, en 1828, nous reçûmes du professeur A. Rudolphi, plusieurs ouvrages, parmi

---

que assez imparfaitement apprivoisés, ne tardèrent pas à s'accoupler ; la femelle conçut et mit bas, le 27 avril 1819, trois petits, un mâle et deux femelles, bien portants; mais il n'a pas été possible de fixer la durée de la gestation, parce que ces animaux s'accouplèrent presque jusqu'au moment de la naissance des petits. Ceux-ci en venant au monde avaient les yeux ouverts, et étaient revêtus d'un poil gris foncé très-ras et à peine sensible sur la queue; ils s'attachèrent aussitôt à leur mère, en l'embrassant et en se cachant dans ses poils. Mais avant qu'ils tetassent, elle mangea la tête de l'un d'eux. Cependant les autres prirent la mamelle, et dès ce moment, la mère leur donna ses soins, que le père partagea bientôt. » (Voy. Fréd. Cuvier et Geoffroy Saint-Hilaire, *Histoire naturelle des mammifères*, tome Ier, *le Ouistiti et son petit.*)

Frédéric Cuvier donne des détails analogues très-intéressants sur plusieurs espèces de singes.

« Ce fut dans le mois de décembre 1817, que ces animaux (*les Makis à front blanc*) parurent éprouver pour la première fois les besoins du rut. Le mâle entrait souvent en érection, et les testicules paraissaient couverts d'une matière glutineuse. La femelle avait toutes les parties génitales gonflées et humides, mais non pas sanguinolentes; son rut n'a pas été accompagné d'une menstruation, et tous deux cherchaient à chaque instant à frotter contre les parois de leur cage la peau plissée qui entoure leur anus. L'accouplement se fit le 23, à la manière de tous les autres, et il se répéta souvent depuis, pendant cinq ou six jours, après lesquels les désirs de l'un et de l'autre parurent calmés. Au bout de quarante jours environ, on vit les mamelles de la femelle se gonfler et son ventre grossir, et le 13 avril suivant elle mit bas une petite femelle qui avait sa couleur, mais des poils très-courts, et les yeux étaient ouverts. Dès le moment de sa naissance ce petit s'attacha à sa mère avec ses quatre pattes, en travers du ventre, au-dessus des cuisses, et il s'allongeait pour teter. A sa naissance, sa taille était celle d'un petit rat. » (Fréd. Cuvier, *Histoire naturelle des mammifères*.)

lesquels était un travail fort intéressant sur les embryons de singes et de quelques autres mammifères (1). Nous nous en sommes servi pour compléter nos recherches, et pour comparer les résultats de nos dissections avec ceux de ce célèbre anatomiste, trop tôt enlevé aux sciences naturelles, aux progrès desquelles toute sa vie fut consacrée. A. Rudolphi raconte que dans l'hiver de 1828 il mourut, sur l'île des Paons, une femelle de Ouistiti (*Simia Jacchus*, Linn. *Hepale Jacchus*, Illig.) en état de gestation, et qu'il profita de cette circonstance pour étudier les membranes de l'œuf et les fœtus.

Quelques années auparavant, il avait vu à Berlin une femelle de Ouistiti qui s'était presque étranglée avec sa chaîne, et qui mit bas deux fœtus, avant le terme naturel de la gestation. Enfin, en 1830, un Ouistiti a aussi fait des petits dans l'île des Paons (2).

Nous ferons remarquer que le nombre de deux ou trois petits dans chaque portée des Ouistitis, est supérieur à celui qu'on observe pour quelques autres espèces de singes. Suivant M. Desmarest (3), la femelle des singes fait ordinairement un et quelquefois deux petits par portée. Il faut bien distinguer les singes de l'ancien continent, de ceux du nouveau monde. Les premiers paraissent être unipares, sans qu'on connaisse jusqu'ici d'exception, tandis que les singes

---

(1) Uber den Embryo der Affen und einiger Anderen Sœugthiere. Berlin, 1828.

(2) Rudolphi, loc. cit.

(3) *Dictionnaire des Sciences naturelles*, t. XLIX. Levrault, édit. 1827.

américains, et particulièrement les Lémuriens, les Ouistitis, etc., sont quelquefois multipares.

La durée de la gestation varie selon les espèces; mais elle est toujours moins longue que celle de la gestation de la femme. M. Fr. Cuvier l'a reconnue être de sept mois dans les Macaques (Maimon et Rhesus) (1).

Don Félix Azara (2) assure que tous les singes qu'il a vus,

---

(1) Frédéric Cuvier fit placer ensemble, dans la même loge, à la Ménagerie du Jardin des Plantes, deux Macaques de sexes différents; les deux animaux vécurent ensemble environ une année, s'accouplant chaque jour trois ou quatre fois, à peu près à la manière de tous les mammifères : la menstruation ne reparaissait plus, vers le commencement du mois d'août 1817; la femelle fut soignée séparément, et pendant les vingt-quatre jours qui suivirent aucun accident n'eut lieu : les mamelles se gonflèrent et le ventre prit son accroissement sans que la santé de l'animal en parût altérée. Enfin, dans la nuit du 17 octobre 1817, elle mit bas un petit Macaque femelle, très-bien développé et fort bien portant. Il avait les yeux ouverts; les ongles étaient entièrement formés, et les mouvements étaient libres; mais il ne pouvait pas se soutenir et restait couché; on ne lui a pas entendu jeter de cris. Cependant, sa mère ne l'adopta point; il ne fut pour elle qu'un animal étranger; rien ne la porta à lui donner des soins; elle ne manifesta d'aucune manière le besoin de l'allaiter, et l'abandonna bientôt entièrement. On essaya d'allaiter ce jeune Macaque artificiellement, mais il ne vécut que jusqu'au lendemain.

M. Frédéric Cuvier fait observer qu'il est peu vraisemblable que la gestation n'ait duré que de l'époque de la dernière menstruation jusqu'à celle de la mise bas; ce qui aurait fait environ trois mois. Une autre espèce de ce genre ayant eu une portée de sept mois, il faudrait donc en conclure que la menstruation de ce Macaque reparut plusieurs fois depuis la conception.

(2) « Le singe *Caraya* (*Sim. Belzebut*, L.), Ouarine de Buffon, Alouate

ne produisent qu'un seul petit, mais il n'indique pas toujours les espèces. Il parle souvent des Ouistitis, et ce qu'il en dit, comme le fait observer A. Rudolphi, porte à présumer qu'il ne possédait qu'un seul couple. Il parle aussi du singe Capucin, auquel Buffon accorde un ou deux petits; il ajoute que ce dernier cas est rare. A. Rudolphi assure qu'excepté le Ouistiti, il n'a jamais observé plus d'un petit pour chaque portée des diverses espèces de singes qu'il a vues dans les ménageries. Dans l'utérus du singe Hurleur (*Mycetes ursinus*), quadrumane qui, comme on sait, est une espèce du nouveau continent, et dont M. Olfers avait fait présent au Musée de Berlin, on n'a trouvé qu'un fœtus (1); mais Dampier en attribue deux à cette même espèce de singe, ce qui confirmerait ce que nous avons avancé plus haut (2).

Trois espèces de Macaques (*Sim. Nemestrina, Sim. Rhesus, Sim. Cynomolgus*), n'ont fait chacune, dans la Ménagerie du Roi, à Paris, qu'un seul petit (3). Enfin, J. R. Rengger, dans son *Histoire naturelle des mammifères du Paraguay,* dit

---

hurleur de Lacépède, fait en juin un petit que la mère porte sur son dos, et qui s'attache à son cou avec ses bras. » (*Le Caraya*, page 208, vol. II, *Essais sur l'histoire naturelle des quadrupèdes du Paraguay*, par D. Félix Azara. Paris, 1801.)

(1) A. Rudolphi, loc. cit.

(2) « Les femelles des singes sont fort embarrassées avec leurs petits, pour sauter et suivre les mâles, car elles en ont ordinairement deux; elles en portent un sous un de leurs bras, et l'autre, qui est assis sur leur dos, se tient accroché à leur cou avec ses deux pattes de devant. » (*Supplément du Voyage autour du monde*, par Guill. Dampier. Baie de Campêche, Nouvelle-Espagne, page 303, tome III. Rouen, 1715.)

(3) *Dictionnaire d'histoire naturelle*, t. IX, p. 586.

qu'il a vu trois femelles du *Cebus Azaræ,* chacune avec un petit (1). C'est aussi le nombre que nous avons trouvé dans

---

(1) Les détails donnés par Rengger sont fort intéressants; et comme son ouvrage est peu connu, je crois qu'on sera content d'en trouver ici un extrait pour ce qui regarde notre sujet.

« Quadrumanes genre Mycetes, Illig. — Mycetes Caraya, Desm. 1° Le Caraya. — *La femelle met bas un seul petit,* ordinairement au mois de juin, quelquefois cependant vers la fin de mai, ou même seulement au mois d'août. Le petit s'accroche pendant les premières semaines sur la poitrine et au cou de sa mère, mais plus tard celle-ci le porte sur le dos, où il se tient solidement aux poils.

« Quoiqu'elle ne fasse paraître son amour maternel par aucune caresse, elle n'abandonne jamais son nourrisson, bien qu'il soit encore très-petit. Ce n'est que lorsqu'il est en état de marcher, ou que sa mère a été blessée, qu'elle s'en sépare en le plaçant sur un arbre, pour pouvoir fuir plus rapidement. »

« 2° Le *Cay,* genre *Cebus,* Erxleben. — *Cebus Azaræ,* Rengger. On trouve ordinairement le *Cay* en petites familles de cinq à dix, très-rarement on en rencontre un seul. Mais lorsqu'il en est ainsi, on peut être certain que c'est un vieux mâle. La manière de vivre de ces singes, à l'état sauvage, est difficile à observer, soit à cause de leur habitation, soit à cause de leur pusillanimité. Ainsi j'ai pu voir sur la lisière du Coa-Gazu ou de la grande forêt, une famille très-nombreuse de *Cays,* qui s'était approchée de notre gîte, pendant que mes compagnons de voyage faisaient leur sieste. Je remarquai d'abord un vieux mâle, puis douze ou treize autres singes des deux sexes le suivaient. Trois femelles portaient chacune un petit singe sur leur dos ou sur leurs bras; un de ces animaux aperçut un oranger dans le voisinage, qui était chargé de fruits mûrs, et en un instant toute la société se trouva snr cet arbre, occupée à arracher et à manger les fruits mûrs.

« Les jeunes Cays portés par leur mère avaient aussi envie de fruits, de manière qu'ils rampaient sur le dos ou les épaules de leur mère, ou sous ses bras et sa poitrine, et cherchaient à enlever quelques morceaux d'o-

les deux utérus que nous avons examinés; mais ils appartiennent à des espèces de l'ancien continent, puisqu'il nous ont été envoyés du Sénégal.

---

range. Au commencement, la mère repoussait son petit très-doucement avec la main, puis elle lui montrait son impatience par des grincements de dents; mais comme il ne devenait pas plus obéissant, elle le saisissait par les poils de la tête, et le repoussait en le plaçant sur son dos. Aussitôt le repas terminé, elle reprenait doucement le jeune singe et le plaçait sur sa poitrine. Les trois femelles nourrices faisaient la même chose. Elles observaient avec une grande tendresse et sollicitude leurs petits pendant qu'ils tetaient; elles cherchaient les insectes dont ils étaient tourmentés, et menaçaient par des gestes les autres singes qui voulaient approcher. Dès que les petits singes eurent fini de teter, les deux plus grands retournèrent sur le dos de leur mère, et le plus jeune resta sous le bras gauche de la sienne. »

Une autre fois, J. R. Rengger rencontra une famille de singes qui pillait, près d'une forêt, la lisière d'un champ de maïs. « Après avoir observé pendant quelque temps ce que faisaient ces singes, je sortis du bosquet où j'étais caché, et aussitôt toute la troupe prit la fuite, en gagnant la cime des arbres et en poussant des cris, tout en emportant chacun un épi de maïs. Je tirai un coup de fusil sur les fuyards, et une femelle et son nourrisson fut atteinte et tomba d'une branche élevée sur une branche inférieure. Je croyais déjà l'avoir en ma possession, lorsque je la vis, combattant avec la mort, entortiller sa queue autour d'une branche et y rester suspendue. Ne voulant pas blesser le nourrisson, je fus obligé d'attendre un quart d'heure, jusqu'à ce que l'animal ayant commencé à devenir roide, sa queue se déroula par le propre poids du corps et il tomba de l'arbre. Le jeune singe n'avait pas abandonné sa mère mourante, mais il s'était de plus en plus cramponné à elle, en montrant une vive inquiétude. Aussi, après qu'elle eut expiré, je pris l'animal délaissé, qui essaya d'appeler du secours par des cris plaintifs, et il rampait jusque vers sa mère, lorsque je le laissais libre sur le sol. Ce ne fut qu'au bout de quelques heures, et lorsque le froid de la mort se fut emparé du corps de la mère, que le jeune singe parut avoir peur du cada-

Depuis quelques années, plusieurs femelles de singes ont mis bas dans la Ménagerie du Jardin du Roi à Paris, et constamment la gestation n'a produit qu'un petit. Dans deux

---

vre, quand je le mis sur le dos de sa mère. Alors il demeura tranquille dans mon sein.

« Le nombre des femelles surpasse ordinairement celui des mâles; on peut dès lors naturellement présumer que ces derniers vivent en polygamie. J'ai remarqué des familles de trois ou quatre individus, parmi lesquelles se trouvait seulement un mâle.

« La femelle met bas au mois de décembre *un seul petit*, qu'elle porte, pendant les deux premières semaines, sur la poitrine ou sous les bras, et plus tard sur le dos. Son amour maternel est très-grand. Il faut qu'elle soit très-grièvement blessée, ou surprise bien inopinément par un ennemi, pour quitter son petit. C'est ainsi que j'ai vu une femelle de *Cay*, que mon compagnon de voyage avait blessée à la cuisse d'un coup de feu, détacher son petit de son sein, et le placer sur une branche d'arbre pour pouvoir fuir.

« Ce n'est que rarement que les *Cays* s'accouplent dans la captivité. Je n'ai aucune observation certaine sur leur mode d'accouplement, ni sur la durée de leur gestation. Je présume que le premier se fait comme chez tous les mammifères quadrupèdes. J'ai cependant vu au Paraguay deux femelles apprivoisées qui avaient mis bas. Comme elles n'avaient pas, dans leur captivité, à songer à chercher leur nourriture, leur tendresse envers leurs petits était encore plus grande que lorsque ces animaux jouissent de leur liberté; elles s'en occupent constamment, et n'y laissent pas toucher. »

Genre : *Nyctipithecus*, Spix. — *Nyctipithecus trivirgatus*. — *Clotus*, Humboldt. — *Nœthora*, Fr. Cuvier.

« *Mirikina*, Rengger. — Il paraît que toute l'année les *Mirikinas* vivent par paire; car, dans toutes les saisons, on rencontre continuellement ensemble un mâle et une femelle. Ils ne forment guère de société plus nombreuse que quatre individus. La femelle, d'après le dire des chasseurs, met bas un seul petit vers la fin d'août ou le commencement de septembre;

femelles en gestation, que MM. Hoblon et Jacquinot ont apportées de Bornéo, lors du dernier voyage de circumnavigation de l'infortuné capitaine Dumont d'Urville, ils n'ont trouvé dans chaque utérus qu'un seul petit. Pour bien juger ce point de l'histoire naturelle de la génération, il faudrait pouvoir observer la gestation des quadrumanes lorsque ces animaux sont en état de liberté, car l'état d'esclavage doit avoir de l'influence sur la fécondation et sur le nombre de petits de chaque portée.

A. Rudolphi raconte que pendant la préparation du corps d'une femelle de Ouistiti, pour les collections du Muséum de Berlin, on s'aperçut que l'utérus était dans l'état de gestation.

Le bassin de cet animal était devenu en grande partie cartilagineux, sans que la symphyse des os pubis se fût écartée, comme cela se remarque chez d'autres animaux, dont les petits sont d'un certain volume. La gestation, dans le cas dont nous parlons, devait être près de son terme, car les deux petits singes renfermés dans l'utérus étaient très-développés. Cet organe semblait parvenu à son dernier degré de distension. On voyait en effet l'orifice vaginal complétement

---

elle porte d'abord son petit sur la poitrine, et plus tard sur le dos.

« J'ai remarqué un grand attachement entre le mâle et la femelle, de manière que lorsqu'on prend une paire de ces animaux, et que l'un d'eux vient à mourir, l'autre périt bientôt après. Ils ont un besoin extrême de liberté, et profitent de toutes les occasions pour s'enfuir, même lorsqu'ils ont été pris très-jeunes et qu'ils ont été déjà tenus depuis longtemps en captivité. Il ne serait donc pas impossible que le défaut de liberté soit cause de ce que le *Mirikina* donne, dans l'état de domesticité, si peu de signes d'intelligence. » J. R. Rengger.

effacé. Les parois de ce viscère étaient minces et égales dans tous leurs points. En haut, la face interne présentait des rugosités, aux points d'insertion du placenta.

La partie inférieure de cette même face était plus lisse, jusque vers un anneau saillant et rugueux, qui semblait offrir les traces du museau de tanche. Il n'y avait, dans l'épaisseur de ces parois de l'utérus, aucune trace de l'existence de fibres musculaires.

On regrette de ne rien trouver sur la gestation des quadrumanes, dans le recueil d'observations de zoologie et d'anatomie comparée, faites dans l'océan Atlantique et dans l'intérieur du nouveau continent, par MM. de Humboldt et A. Bompland. Ces savants voyageurs ont donné, dans cet ouvrage, une description exacte d'un grand nombre de singes; mais il paraît qu'ils ne les ont jamais vus dans l'état de gestation. Je n'ai trouvé qu'un seul passage relatif à ce sujet.

En parlant du Titi de l'Orénoque, M. A. de Humboldt dit : « Lorsque les Indiens tuent une femelle au moyen de leurs sarbacanes ou d'une pointe trempée dans du *curare*, le petit singe reste attaché à sa mère; il tombe avec elle; et s'il n'est pas blessé par la chute, il ne quitte plus l'épaule ou le cou de l'animal mort. La plupart des Titis que l'on trouve vivants dans les cabanes des indigènes ont été ainsi arrachés au cadavre de leur mère. On prend quelquefois des individus adultes blessés légèrement avec des pointes trempées dans du poison affaibli, *curare destemplado;* mais ces derniers périssent généralement avant de s'être accoutumés à cet état de domesticité (1).

---

(1) Al. de Humboldt et de Bompland, *Recueil d'observations de zoologie*

Spix dit avoir trouvé ces singes d'Amérique (*Myctes barbatus*, Spix; — l'*Alouate noir à grosse barbe*, Spix; — le *Caraya* d'Azara; — le *Stentor Niger* de Geoffroy et Desmarest), dans l'intérieur des *Minas de Geraes* et de Bahie, dans les forêts basses, que les habitants appellent *Catinga*. Ils vivent très-retirés et toujours en grande société. Ayant une fois entendu leurs hurlements épouvantables, semblables à ceux d'une troupe de grenouilles, Spix découvrit facilement l'endroit d'où provenait ce singulier concert, et il aperçut une vingtaine de singes sur des arbres, et qui hurlaient. En s'en approchant, Spix vit que les singes, au lieu de s'enfuir, comme les autres singes en ont l'habitude, grimpaient sur le sommet des arbres, et chacune des femelles portait un petit singe sur son dos; un autre plus âgé suivait par derrière. Après avoir tiré sur quelques-uns d'entre eux, les autres continuaient à hurler tristement, et chacun prit la retraite qui lui convenait. Pendant cette action, Spix eut l'occasion de remarquer qu'une femelle blessée continuait à porter un petit sur son dos, jusqu'à ce que, épuisée par la perte de son sang, elle employât en mourant ses dernières forces à lancer son nourrisson sur des rameaux voisins, et expira en tombant de l'arbre; trait qui semble démontrer une sorte de réflexion chez ces animaux (1).

Le prince Maximilien de Wied assure que les quadrumanes

---

et d'anatomie comparée, faites dans l'océan Atlantique, dans l'intérieur du nouveau continent et dans la mer du Sud, etc., Ier vol., page 334. Paris, 1811.

(1) *Simiarum et Vespertiliorum Brasiliensium species nova*, etc. Monochii, 1823, in-fol., page 48.

d'Amérique ne paraissent pas se distinguer de ceux de l'ancien monde, dans leur nourriture et leur mode de propagation; car ils sont tous omnivores comme l'homme, et ils prennent une nourriture végétale et animale, mais vivent surtout d'insectes. Ils ne mettent bas, à l'exception du *Jacchus Nepale, Jacchus Midas*, qu'un seul petit, qu'ils emportent sur les arbres. Ordinairement, dès leur naissance, ces petits singes ressemblent à leurs parents (1).

L'utérus des quadrumanes, hors l'état de gestation, ressemble beaucoup, suivant A. Rudolphi, à celui de très-jeunes filles vierges. On croit assez généralement que Galien a fait son ouvrage d'anatomie humaine en disséquant des singes; cependant, il paraît n'avoir eu presque aucune notion de la gestation de ces animaux. Cette circonstance, jointe à plusieurs autres, porte à penser que c'est principalement d'après les ruminants qu'il a décrit la gestation (2).

P. Camper, qui a de nouveau agité cette question si souvent et si longtemps controversée, à savoir, si Galien a disséqué des cadavres humains, conclut pour la négative, et dit que Galien n'a disséqué que des singes, et de préférence, ceux de l'espèce sans queue, ainsi que plusieurs autres espèces que l'on connaissait déjà de son temps. Mais, faute de singes, il se servait pour ses études anatomiques, d'ours, de chiens, de chats, etc. (3). Galien dit lui-même que le singe a,

---

(1) *Beytræge zur Naturgeschichte von Brasilien.* Von Maximilian Prinzen zu Wied. P. 29, t. II. Weimar.

(2) *De usu partium*, lib. XV, cap. V.

(3) *OEuvres de P. Camper*, t. I, p. 22. De l'Orang-Outang, etc.

parmi les animaux, la plus grande ressemblance avec l'homme; mais il ne veut parler que de quelques viscères, ainsi que des muscles, des artères et des os (1).

---

(1) *De administr. anatom.* 1-2, cap. I. Lorsqu'on a contemplé souvent la position et la grandeur des tendons et des nerfs chez les singes, on peut trouver facilement les mêmes parties sur le cadavre humain, si l'occasion s'en présente. (*De compos. medicam. per genera*, IIII-2, chap. 5.) Il ne disséquait donc que rarement des cadavres humains, et seulement pour vérifier ce qu'il avait vu sur le corps des animaux. Il conseille d'aller à Alexandrie pour voir un squelette humain, et de suffoquer un singe dans l'eau, lorsqu'on voudra disséquer les muscles. (*De muscul. dissect. Procemium*, l. I.) S'il ne reste aucun doute sur l'usage que Galien faisait des singes dans ses dissections, on est dans l'incertitude sur l'espèce dont il se servait. La grande ressemblance du singe avec l'homme provient de ce qu'il a la face ronde, les dents canines petites, l'os pectoral large, les clavicules longues et le poil médiocre. Cet animal se tient très-bien dressé. (*De usu partium*, XI, 2, I.) Les orteils plus petits que ceux des autres singes, les muscles temporaux et ceux de la cuisse assez longs, le coccyx petit, etc. (*Anatom. administr.* VI, 1.) La ressemblance de l'organe de la voix de l'Orang-Outang avec la description des mêmes organes que l'on doit à Galien, a fait croire à Camper que Galien disséquait des Orangs. Mais cette pensée de Camper n'est pas exacte, d'après les observations faites par M. de Blainville et par M. G. Cuvier, qui ont vérifié le fait, et reconnu par la dissection que tous les détails anatomiques de Galien se rapportaient au Magot (*Simia Sylvanus*, *Pithecia* et *Inuus*, L.). Si on lit attentivement les ouvrages de Galien, on voit qu'il décrit plusieurs espèces de singes dont il s'est servi, les unes sans queue, les autres à queue. Suivant lui, il faut choisir parmi les singes, ceux qui ont la plus grande ressemblance avec l'homme; à leur défaut, on prendra ceux qui ressemblent moins à l'homme; et quand les singes manquent tout à fait, on prendra un Cynocéphale, un Satyre, un Lynx; enfin tout animal dont les pattes sont fendues en cinq doigts, marchant sur deux jambes, mais comme un homme

Si les opinions de Vésale (*De corpor. human. fabrica, præfatio*) et de Camper sont trop exclusives, lorsqu'elles refu-

---

boiteux. Cette dernière classe, que Galien ne regarde pas comme appartenant aux quadrumanes, est cependant considérée comme telle par les naturalistes modernes.

Après ces animaux, il indique l'ours, le lion, les belettes, les chats, les souris. Il parle aussi des estomacs multiples des ruminants. Mais son anatomie a été faite principalement d'après les singes et rarement d'après les cadavres humains, quoiqu'il mette la structure humaine en parallèle avec celle des animaux. Par structure humaine il entend celle des singes, parce qu'il pensait qu'il y avait identité de disposition. (Voyez *de Musculor. dissectione. Procemium*, ch. I; *de Venar. et arter. dissect*, ch. I; *de Anat. administ.*, l. 2; *de usu partium*, XV, 8, ch. I.)

Avec plusieurs historiens modernes, il faut reconnaître que Vésale et Camper vont trop loin, lorsqu'ils affirment que Galien n'a pas disséqué de cadavres humains, ou qu'il n'en a pas fait usage pour composer ses descriptions anatomiques. On croit trouver une preuve, qu'au lieu de cadavres humains il disséquait des singes, dans ce qu'il dit des os intermaxillaires formant dans les singes et chez d'autres animaux un os particulier, distinct et séparé, tandis que chez l'homme on n'en trouve que des vestiges dans le fœtus, vestiges qui ont été aperçus fort tard, car c'est principalement à Goethe, philosophe et poëte, que l'on doit les notions les plus précises sur ces os, décrits depuis lors par Fischer, Oken, Meckel, Weber, Nicati, Leuckart, etc.

On ne peut pas croire que Galien ait examiné l'utérus de la femme, lorsqu'il donne à cet organe une longueur de onze pouces et des cornes s'étendant vers les hanches (*de Vulva*, n° 2); il veut que ce viscère ait, chez la femme, une cavité droite et une cavité gauche, pour contenir les différents sexes. Il attribue au chorion de l'œuf humain des cotylédons. Plus tard Sylvius, qui a défendu très-vivement Galien, a dit que celui qui refuse des cotylédons à la matrice en gestation de la femme, peut aussi renier Hippocrate!

Au cordon ombilical il admet deux veines, deux artères, et place l'ou-

sent à Galien d'avoir disséqué des cadavres humains, celles d'Eustachio et de Riolan sont aussi trop exclusives, en affirmant que toutes les descriptions de Galien ont été faites d'après le corps de l'homme. Le plus souvent, ces histoires sont celles des singes. Mais pour ce qui regarde les produits de la génération, les descriptions de Galien doivent être rapportées aux ruminants.

Vésale (1) ne peut pas nous fournir plus de lumières, et nous devons donner peu de foi à ses descriptions, puisqu'il a représenté un fœtus humain dans les enveloppes de l'œuf du chien, dont le placenta est en ceinture.

Les erreurs de Galien, relevées amèrement par Vésale, auraient dû tenir celui-ci sur ses gardes et l'empêcher d'en commettre d'analogues; aussi, Sylvius, dans son fanatisme pour Galien, ne garde-t-il aucune mesure envers Vésale (2). Mais comme il ne peut pas aller contre l'évidence, il prétend que les hommes de son temps présentent une autre conformation que ceux du temps de Galien.

Realdus Columbus ne paraît avoir étudié que l'œuf des ruminants, et Fallopia, que celui du cheval et du chien. Il rectifie les erreurs de Vésale, son maître, rend au chorion son véritable nom, et donne à la masse en gâteau, située entre le chorion et l'utérus, le nom de *placenta*. Il confirme

---

raque au milieu de quatre vaisseaux. Il fait trouver les vaisseaux hémorroïdaux sur la face intérieure de la matrice, pour former les cotylédons ou *acétabules*, semblables pour lui à des vaisseaux hémorroïdaux.

(1) *De re anatomicâ,* in-fol. Venet. 1559.

(2) *Vesani cujusdam calumniarum depulsiones Sylvii,* opp. p. 135; et *Sylvii in Isagogen*, opp. p. 81.

les observations antérieures sur l'existence de *l'allantoïde* dans quelques animaux, mais il refuse cette poche à l'œuf humain.

La distinction bien établie par Fabrice d'Aquapendente, de la variété des formes du placenta, démontre qu'il avait examiné un plus grand nombre d'œufs que ses prédécesseurs, et qu'il avait des idées plus exactes (1). Ses recherches sont très-variées et très-étendues sur l'œuf des oiseaux (2), des reptiles (3), sur celui de l'homme (4) et des mammifères (5).

Fabrice d'Aquapendente a très-bien reconnu la différence de forme du placenta de l'œuf humain, de celui de l'œuf des carnassiers, qui est en ceinture. Il parle avec justesse des placentas multiples ou des cotylédons des ruminants, et des granulations serrées dont est couvert le chorion des solipèdes et des pachydermes. Cependant, il ne croit à l'existence de l'allantoïde que chez les ruminants et les rongeurs. Il pense que chez les autres animaux, ainsi que dans l'œuf humain, l'ouraque est fermé, et que l'urine est versée d'une manière imperceptible entre l'amnios et le chorion; les feuillets de l'allantoïde avaient échappé à la sagacité de son observation.

Eustachio, si l'on en doit juger d'après les planches qu'il

---

(1) *Hyeronimi Fabricii ab Aquapendente*, *oper. omn. anat. et physiol.*, *etc.* B. S. Albini edente. Lugd. Batav., 1738.

(2) *De formatione ovi et pulli, etc.*

(3) Tab. XXXIII. C'est sur l'œuf d'un Ophidien.

(4) *De format. fœtûs, etc.*

(5) Sur l'œuf et le fœtus de la vache, de la brebis, de la jument, de la truie, de la chienne, du rat, du cochon d'Inde, etc.

a laissées, avait une idée assez exacte des principales différences des enveloppes de l'œuf humain, d'avec celles des ruminants et de quelques carnassiers; mais comme il n'a joint ni texte ni explication à ses planches, les éditeurs de ses œuvres anatomiques ont mal expliqué les figures d'Eustachio.

M. Cuvier reproche à Albinus, et avec juste raison, d'avoir pris la poche allantoïdienne pour la vésicule ombilicale.

Le grand Harvey s'est particulièrement attaché à étudier la gestation de plusieurs ruminants, et celle des chiens, des chats et des lapins. D'après les dissections de quatre singes par Cl. Perrault, dont un paraissait appartenir au genre *Cynocéphale,* les trompes utérines différeraient de celles des femmes et ressembleraient à celles des brutes, parce qu'elles sont plus longues à proportion, et plus repliées par des contours différents. Cependant le corps de l'utérus, ses membranes, son orifice interne, ses ligaments, longs ou larges, et tous les vaisseaux, avaient une conformation semblable à celle de ces mêmes parties dans la femme. Les testicules (ovaires) avaient trois lignes de long sur deux de large. Ils étaient, comme dans la femme, composés d'un grand nombre de petites vésicules, et attachés près des membranes de l'extrémité de la trompe et qu'on appelle les franges (1).

D'après les nombreuses dissections faites par Daubenton, l'utérus du Tatou n'a point de cornes et ressemble beaucoup à celui des singes, mais il a des trompes. Sur les planches

---

(1) Perrault, *Mémoires pour servir à l'histoire naturelle des animaux, etc.* Paris, 1676, p. 124 et 125.

publiées aussi par Daubenton, l'utérus du Mococo (*Lemur Catta*, Lin.), du Loris (*Lemur tardigradus*, Lin.), on voit que les cornes sont déjà grandes.

L'utérus de l'Orang-Outang, et de quelques autres singes, n'a point de cornes, comme celui de la plupart des quadrupèdes. La cavité de l'utérus de l'Orang n'a ni col ni glandes de Naboth, mais de petites rides fort déliées, qui courent en remontant vers le fond de sa matrice, et paraissent pénétrer de chaque côté dans les trompes de Fallopia.

Les ovaires, leurs vaisseaux sanguins et leurs trompes sont, comme chez la femme, retenus par les ligaments larges, qui ne sont qu'une duplicature du péritoine; telle est l'idée que P. Camper (1) nous donne de ces organes dans leur état de vacuité; et quoiqu'il n'ait pas observé de cornes, ni ce que M. Geoffroy Saint-Hilaire a nommé *ad uterum*, il fait remarquer que Galien n'en appelle pas moins la matrice des femmes *uterum bisinuatum* (2); ce qui semble indiquer que cette désignation avait été donnée, bien moins d'après l'inspection de l'utérus de la femme ou de la femelle du singe, que d'après celle de quelques autres mammifères.

J. Hunter parle d'une femelle de singe dont il n'indique pas l'espèce, et qui conçut en Angleterre, dans l'année 1782, après avoir eu de fréquents rapports avec son mâle. Elle mit bas au bout de six mois, et le part se fit régulièrement. Après la naissance du petit, cette femelle se délivra elle-même avec ses membres antérieurs, et J. Hunter ayant recommandé

---

(1) *OEuvres de P. Camper*, t. I, p. 104, 105, 106. Paris, 1803.

(2) *Dissert. de uter*, cap. III.

de conserver avec soin l'arrière-faix, il lui fut remis en bon état. Le jeune animal donna des signes de vie, mais il mourut peu de temps après sa naissance, et quoique mort, sa mère le prit dans ses bras et le pressa sur son sein (1).

Toutes les parties constituant les secondines ressemblaient parfaitement à ce qu'elles sont chez la femme (2).

Le placenta paraissait être divisé en deux corps oblongs, unis par leurs bords et se terminant chacun en une pointe obtuse; mais ils étaient à une petite distance l'un de l'autre.

J. Hunter croit que ces deux corps n'étaient ainsi divisés que parce que le placenta correspondait par son insertion à l'orifice des trompes de Fallopia, qu'on peut comparer à deux cornes.

Les membranes étaient l'amnios, le chorion et la membrane caduque, qui ressemblaient à ce qu'elles sont dans l'espèce humaine, excepté la membrane caduque, beaucoup plus épaisse, principalement dans les points où elle passe entre le placenta et l'utérus. Le cordon ombilical, dans le singe, toute proportion gardée, était moins long que dans l'homme. Il n'existait ni ouraque, ni ligament de la vessie, qui était ronde (3).

Vicq-d'Azyr cite une observation qui est trop semblable à celle de J. Hunter, d'après toutes les circonstances qu'il rapporte et d'après l'ordre suivi dans l'exposé des faits, pour ne pas faire croire que c'est le même fait. Pourquoi Vicq-

---

(1) *And although it is dead elapsep it to her breast.*

(2) *And very much ressembled the corresponding in the human subjet.*

(3) *Observations on the placenta of the Monkey*, p. 77. *Observations on certains parts of the animal œconomy*, by John Hunter. London, 1792.

d'Azyr semble-t-il s'attribuer cette observation et n'indique-t-il pas la source où il l'a puisée (1)?

M. Georges Cuvier a depuis longtemps indiqué que l'utérus est simple dans les singes, les édentés et les tardigrades, comme dans la femme, et il ne veut pas qu'on établisse une distinction entre la cavité du corps et la cavité du col de ce viscère. Sa forme générale est ordinairement plus allongée dans les singes que dans la femme. Le corps est ordinairement bien arrondi, et il se distingue du col par un étranglement plus ou moins marqué.

Dans un rapport fait à l'Académie des sciences, sur un mémoire de M. Dutrochet, M. Cuvier cite beaucoup d'observations curieuses sur l'œuf des mammifères; mais il ne paraît pas avoir pris pour sujet de son examen comparatif l'œuf des quadrumanes. Ses recherches, entreprises à l'occasion du beau travail de M. Dutrochet sur les enveloppes du fœtus, confirment presque tous les faits avancés par M. Dutrochet, ainsi qu'une observation bien antérieure appartenant à Needham, sur la vésicule ombilicale, laquelle offre, dans les Rongeurs, une disposition semblable à celle de l'allantoïde dans les autres mammifères.

M. Cuvier pense que les œufs des mammifères, comme ceux des oiseaux et des reptiles à poumon, se composent, 1° d'une enveloppe générale, qui, dans les œufs des oiseaux, porte le nom de membrane de la coque, et dans ceux des mammifères, celui de chorion; 2° d'un fœtus enveloppé dans

---

(1) *Anat. des singes*, t. V. *OEuvres de Vicq-d'Azyr*, p. 318, édit. de Moreau de la Sarthe.

un amnios qui n'est que la réflexion de la membrane extérieure du cordon ombilical; 3° d'un sac tenant à un pédicule au fond de la vessie du fœtus, et que l'on appelle *allantoïde;* 4° d'un autre sac lié par des vaisseaux au mésentère du fœtus, et fixé par un ou deux ligaments à quelque point du chorion. Ce sac, appelé dans les mammifères *vésicule ombilicale,* répond à ce qu'on a nommé *vitellus* ou le sac du jaune, et ses ligaments, *aux chalazes de ce vitellus.*

J. Ch. G. Jœrg, déjà cité, dit que les quadrumanes et les tardigrades sont les animaux les plus près de l'homme, sous le rapport de l'utérus, quoique la figure ovale de cet organe commence à prendre une forme plus allongée. Les animaux plus voisins de l'homme à cet égard, sont les singes sans queue; mais cet organe offre à sa base, ou vers le point d'insertion des trompes de Fallopia, une disposition en forme de cornes (1).

L'utérus est déjà proportionnellement plus long dans les singes à queue et les édentés tardigrades; mais dans les *Makis*, le *Loris* (*Lemur tardigradus*), le *Mongous* (*Lemur Mongos*), on distingue déjà des cornes à cet organe.

A. Rudolphi assure que l'arrière-faix des singes a beaucoup d'analogie avec celui de la femme, quoiqu'il en diffère sous quelques rapports. Les membranes de l'œuf sont le chorion, qui, comme chez les jumeaux humains, appartient en commun aux deux fœtus; mais il y a deux amnios distincts. Il n'a découvert aucune trace d'*allantoïde,* et l'ouraque disparaît de très-bonne heure, ainsi qu'il dit l'avoir observé sur les fœtus du *singe Hurleur* et sur le *singe Capucin.*

---

(1) I. Chr. G. Jœrg, loc. cit.

Quant à la vésicule ombilicale chez le fœtus humain, elle ne reste, suivant A. Rudolphi, que jusqu'au troisième mois, c'est-à-dire jusqu'à la fin du premier tiers de la grossesse, tandis que le Ouistiti, dont la gestation ne dure que trois mois, offre cette vésicule jusqu'au moment du part. Sous ce rapport, la gestation des singes se rapproche beaucoup de celle des autres mammifères. Cette vésicule, dont les vaisseaux sont extrêmement délicats, fort longs, et qui se rendent au mésentère, se comporte de la même manière que celle de l'espèce humaine.

A. Rudolphi n'a pas pu découvrir de canal de communication entre cette vésicule et l'intestin, communication admise par Meckel, Oken, etc., et refusée par Emmert. Ce que dit A. Rudolphi du placenta de l'Ouistiti est remarquable; ses observations s'accordent avec les nôtres, sous ce rapport que les dispositions anatomiques de l'œuf des singes de l'ancien continent diffèrent de celles des singes du nouveau continent. M. Schrœder van der Kolk a constaté après nous ces mêmes différences.

Suivant A. Rudolphi, le placenta de l'Ouistiti, de même que celui du *singe Hurleur*, est unique et plus ovale que celui de l'homme. Chez le *singe Hurleur*, cet organe est remarquable par son épaisseur, ce qui n'existe pas sur le placenta de l'Ouistiti; mais il est très-facile de distinguer, sur le dernier, la partie fœtale de la partie utérine, distinction rejetée par plusieurs anatomistes modernes.

Sur le fœtus de l'Ouistiti, comme sur celui du *singe Hurleur* et du *singe Capucin*, on trouve deux veines ombilicales, qui parcourent séparément tout le trajet, depuis le placenta jusqu'au foie, et ne se réunissent qu'au-devant de cet

organe. On a quelquefois observé la même disposition sur des fœtus humains, mais elle formait une exception, tandis qu'elle peut être considérée comme normale chez un grand nombre de mammifères, surtout chez les ruminants, les cétacés, etc. Je l'ai rencontrée sur deux fœtus de baleine (*Balæna mysticetus*) que j'ai disséqués.

L'ouvrage le plus récent sur l'anatomie comparée ne donne rien de précis et de rigoureusement exact sur l'œuf des quadrumanes. M. Ch. Gust. Carus (1), en parlant du placenta, dit que cet organe ressemble, chez les singes et les cheiroptères, à celui de la femme. Les mammifères qui ont le plus long cordon ombilical sont les singes et le Paresseux tridactyle.

Dans un mémoire lu par sir Ev. Home à la Société royale de Londres (2), il a tenté de faire une classification des placentas d'après leur conformation extérieure, mais il n'a rien dit de la disposition de celui des marsupiaux. Cela devait être, car en leur refusant un cordon ombilical, il ne pouvait pas admettre l'existence d'un placenta. Dans ce mémoire sur le placenta, il se borne à parler des formes variées de cet organe chez un grand nombre de mammifères ; il cherche à établir la classification d'après les variétés de configuration de l'organe, et il rapporte à la deuxième division le placenta des singes, sous la désignation de *placenta subdivisé* (*subdi-*

---

(1) Voyez *Tabulæ illustrantes*, cah. III, pl. IX, et *Traité élémentaire d'anatomie comparée*, t. III, p. 484 et suiv.; V, p. 398 et suiv.

(2) *Traité d'anat. comparée ; développement de l'organisme individuel*, t. II, p. 393. Philosop. transact. 1822, page 401.

vided placenta). Cette disposition, considérée comme commune à tous les singes (*all the monkey tribe*), présente deux lobes. C'est probablement d'après le placenta décrit par J. Hunter, que sir Ev. Home s'est servi de cette appellation. Nous sommes d'autant plus porté à penser ainsi, qu'il n'existe pas d'autre placenta de singe dans le musée de J. Hunter, d'après ce que nous assure M. R. Owen, qui a mis dans cette recherche une obligeance toute particulière, ainsi que notre ami M. J. Van der Hœven, professeur à Leyde, me l'a encore récemment répété (1).

---

(1) Voici cette classification de sir Ev. Home pour le placenta de tous les animaux mammifères dont l'œuf est attaché à l'utérus de leur mère. Il a fait *une classe* et *sept ordres* :

Ordre 1er. *Placenta lobuleux* (*lobulated placenta*). Ex. : L'HOMME.

Ordre 2e. *Placenta subdivisé* (*subdivided placenta*). Ex. : TOUTE LA TRIBU DES SINGES.

Ordre 3e. *Placenta en ceinture* (*belted placenta*).

2 genres : { 1° *à ceinture épaisse*. Ex. : LES LIONS.
2° *à ceinture mince*. Ex. : LES CHIENS.

Ordre 4e. *Placenta à plusieurs divisions*. Ex. : la tribu des LIÈVRES.

Ordre 5e. *Placenta cotyloïde* (*cotyloïd placenta*).

1° Simple.... LE HÉRISSON.

2° Uni..... LA TAUPE.

3° Épais..... LA CHAUVE-SOURIS.

4° Pédiculé.. LE COCHON D'INDE.

5° Pédonculé. LE RAT.

Ordre 6e *Placenta avec de nombreux cotylédons.*

1° Les artères se terminant avec des branches latérales. Ex. : LA VACHE.

2° Les artères se terminant par des filets déliés. Ex. : LE DAIM.

La science doit au savant Ant. Alessandrini, professeur à l'université de Bologne, de posséder une intéressante description de l'œuf du *phoque à ventre blanc* (*phoca bicolor*) (1). Cet œuf ressemble à celui des carnivores; le *placenta* est en ceinture, le cordon ombilical se compose de deux veines et d'une artère, des vaisseaux omphalo-mésentérique et de l'ouraque. M. Alessandrini a trouvé la vésicule ombilicale, mais il n'a pu découvrir la tige par laquelle cette petite poche communique avec l'intestin. L'ouraque était oblitéré par une substance celluleuse. *Aperto quivi il canale ho trovato che erasi già chiuso, e cangiato in un grosso funiculo celluloso, particularità, che demonstra sempre più essere il feto prossimo al suo perfetto sviluppo nell' utero* (2). »

Nous n'insistons pas sur les autres parties de cet intéressant opuscule, parce qu'il ne traite pas des fœtus, dont nous avons ici spécialement à parler.

C'est aussi pour cette raison que nous ne parlerons point

3° Des villosités terminant les artères. Ex. : LA BREBIS.

4° Les artères finissant en formant une surface veloutée ou pelucheuse. Ex. : LA CHÈVRE.

Ordre 7ᵉ. *Chorion sans placenta.*

4 genres :
- 1° *avec des plexus vasculaires*
  - A. épais. Ex. : LA JUMENT.
  - B. minces. Ex. L'ANESSE.
- 2° en étoile. Ex. : LA TRUIE.
- 3° *en membrane vasculaire.* Ex. : LE CHAMEAU.
- 4° en touffes. Ex. : LA BALEINE.

(1) Shaw, *General zoology*, t. I, p. 2, t. 70.

(2) *Observazioni su gl'inviluppi del feto della* PHOCA BICOLOR.

de l'ouvrage de D.-Frédéric Eschricht, qui, à l'occasion de l'histoire d'un fœtus de dauphin, disséqué par lui, entre dans des considérations fort intéressantes sur plusieurs organes appartenant au fœtus dans le sein maternel. M. D.-F. Eschricht ne parle point des singes et de ce qui est relatif à leur génération, circonstance qui nous interdit de donner ici une analyse de son livre.

M. J. Muller (1) veut que chez les singes le placenta soit simple et d'une disposition semblable à celle de l'homme, avec un développement minime de la vésicule ombilicale. Il veut aussi que le cordon ombilical soit pourvu de deux veines et de deux artères. Il donne pour exemple le *Cebus*, le *Mycetes*, l'*Hœpale*.

On voit que le célèbre physiologiste de Berlin ne parle point d'après sa propre observation, mais d'après A. Rudolphi, et son erreur résulte de ce qu'il n'a point, dans la disposition de ces organes, distingué les singes du nouveau, d'avec ceux de l'ancien continent.

---

(1) *De Organis qui respirationi et nutritioni fœtus mammatium inserviunt.* Hafniæ, 1837.

PARTIE DESCRIPTIVE.

Occupé depuis longtemps de recherches sur la structure de l'embryon et du fœtus, un de mes confrères, M. Calvé, médecin en chef au fort Saint-Louis de notre établissement du Sénégal, m'envoya dans de l'alcool deux matrices de singe en état de gestation, sans me fournir aucun renseignement sur l'espèce de singe à laquelle appartenait cet organe; mais il m'annonçait qu'avec de nouveaux envois qui suivraient cette première expédition, il me donnerait tous les renseignements désirables. Je les ai attendus pendant longtemps, et ne les recevant point, j'ai terminé la dissection de ces deux utérus, à laquelle j'avais commencé de procéder il y a plus de quinze ans.

La détermination rigoureuse des espèces animales sur lesquelles nous opérions serait difficile à faire, s'il fallait y apporter une grande exactitude. Les zoologistes savent quelles sont les principales espèces de singes qui habitent les terres voisines du Sénégal, et bien que les caractères fournis par des fœtus soient peu prononcés, et que ceux qui sont déduits du nombre ou de la forme des dents, de la couleur du pelage, etc., ne puissent ici être invoqués, nous dirons cependant que la longueur et la forme de la queue de ces fœtus, la

saillie de leur museau, suffisent pour faire présumer que les œufs que nous allons décrire, et les fœtus qui y sont renfermés, appartiennent à une espèce du genre *Guenon* (*Cercopithecus*); et comme l'espèce la plus commune au Sénégal est le *Callitriche, Simia Sabæa*, c'est peut-être à elle que nous devons rapporter les fœtus dont nous avons essayé de faire l'histoire anatomique.

Cependant cette saillie du museau et cette longueur de la queue de nos deux fœtus ont semblé indiquer à quelques personnes que ces jeunes mammifères ont eu pour parents une espèce de *Cynocéphale :* ces singes vivent aussi en Afrique, et principalement en Guinée et au Sénégal.

Mais sans nous arrêter plus longtemps sur cette détermination zoologique, suivons le conseil des anciens, et attachons moins d'importance aux nomenclatures qu'à l'examen et à l'acquisition des faits. Par nos dissections, nous avons cherché à faire connaître de nouvelles particularités de structure, et à détruire quelques dissidences des auteurs sur divers points d'anatomie; dissidences que nous avons signalées dans notre historique, et qu'on ne devrait pas rencontrer dans une science d'observation.

DESCRIPTION DE DEUX UTÉRUS DE CALLITRICHE (*Simia Sabæa*, LINN.) EN ÉTAT DE GESTATION.

ŒUF N° 1er (voyez pl. 1 et 2).

L'utérus est en gestation, il a le volume d'une grosse orange; il est ovoïde, et se rapproche beaucoup par sa forme de l'utérus humain. Il a dix centimètres de hauteur, sur huit de largeur.

Vers les parties latérales et supérieures, on aperçoit les trompes de Fallopia, plus longues que celles de la femme, et n'offrant pas à leur extrémité de franges bien distinctes. Ces canaux ne présentaient pas à leur origine de dilatation comparable aux cornes utérines des autres mammifères, ou à ce que des modernes ont appelé *ad uterum*. En arrière de cette insertion, on découvre l'ovaire sous son repli du péritoine, et attaché à l'utérus par un pédicule fibreux de dix ou douze millimètres de longueur. Cet ovaire ressemblait, par sa forme et sa grosseur, à un gros pepin de poire.

Structure. — L'épaisseur de l'utérus est beaucoup plus considérable inférieurement que supérieurement, excepté dans les points où s'insèrent les placentas. Cette épaisseur varie de quatre à six millimètres; mais comme les pièces sont restées longtemps plongées dans l'alcool, il est à croire qu'à l'état frais cette épaisseur est plus considérable. Les parois utérines sont manifestement composées, du dehors en dedans : 1° d'un feuillet péritonéal; 2° de faisceaux musculaires obliques, horizontaux et longitudinaux. Ces derniers surtout sont très-distincts et se portent inférieurement sur le vagin; 3° d'une membrane muqueuse, sur l'existence de laquelle il n'est pas permis d'élever de doutes; très-adhérente par sa face externe à la membrane charnue, et comme réticulée à sa face interne; 4° la membrane caduque qui tapisse toute la cavité utérine, oblitère en haut l'orifice des trompes, et en bas l'orifice du vagin. La surface externe de cette membrane caduque est inégale, et adhère à la membrane muqueuse par une infinité de filaments comme celluleux. Elle offre en outre une multitude de petits pertuis. La face interne ou fœtale est lisse et polie; lorsqu'elle est arrivée au point d'insertion des

placentas, elle paraît séparée en deux lames, dont l'une passe entre les placentas et l'utérus, et l'autre semble contourner la circonférence de ces placentas pour s'appliquer sur la face externe du chorion de l'œuf. Dans les points correspondants à l'insertion des placentas, on voit un très-grand nombre de lames comme celluleuses, interceptant des espaces pentagones ou hexagones, de deux ou trois millimètres de largeur, et ressemblant par leur aspect général à des *favus*.

Vagin.—L'étendue du vagin depuis le col de l'utérus jusqu'au méat urinaire est de quatre centimètres cinq millimètres; on voit manifestement à l'extérieur des faisceaux à fibres distinctes, que nous croyons être de nature musculaire, venant de l'utérus pour se porter sur le vagin. Depuis l'orifice interne du col de l'utérus fermé par la membrane caduque, jusqu'à l'extrémité de la lèvre supérieure de l'orifice vaginal de l'utérus, il y a deux centimètres trois millimètres. Dans cet espace, la membrane muqueuse présente des rides longitudinales assez profondes, et l'on y remarque une mucosité dense et limpide, qui envoie comme des prolongements entre les froncements de cette duplicature longitudinale. C'est l'existence de cette mucosité que quelques praticiens considéraient comme un signe certain de grossesse.

Le col de l'utérus, dans le point qui est embrassé par le vagin, a six ou sept millimètres d'épaisseur. Des deux lèvres qui terminent le col de l'utérus, la supérieure ou antérieure est beaucoup plus épaisse que l'inférieure ou postérieure; elle la dépasse de cinq ou six millimètres, ce qui est le contraire dans l'espèce humaine. L'orifice de ce col de l'utérus est manifestement transversal.

La cavité du vagin présente de nombreuses rides trans-

versales, rugueuses, saillantes, séparées les unes des autres par de petits espaces qui leur donnent l'apparence d'un cône dont la base correspond au col de l'utérus et le sommet à la vulve. Toutes ces rugosités ne dépassent pas la hauteur du méat urinaire.

Structure. — Ce canal est recouvert sur ses faces antérieure et postérieure, dans la moitié de son étendue, par le péritoine; sa plus grande épaisseur est formée par des fibres longitudinales, qui s'étendent parallèlement de l'utérus à l'extrémité antérieure du vagin. A l'intérieur, une membrane muqueuse, épaisse, forme une multitude de duplicatures et de rugosités, dont nous avons déjà parlé, et l'on aperçoit sur cette surface les orifices d'un nombre considérable de follicules muqueux.

Parties génitales externes. — Les grandes lèvres sont couvertes, sur leur face externe et interne, d'un poil soyeux, d'une teinte rousse, tirant sur le blond. Tout le pourtour de l'entrée du vagin est garni d'un nombre considérable de follicules sébacés très-distincts. Les petites lèvres ou nymphes ne sont bien exprimées que dans le point correspondant au clitoris, qu'elles recouvrent comme le ferait un petit capuchon. Celui-ci paraît au dehors, et il a l'apparence d'un petit gland, divisé en deux parties sur la ligne médiane, et particulièrement vers sa partie antérieure et supérieure. Cette cannelure est-elle destinée à imprimer une direction particulière au jet de l'urine?

Vessie. — La vessie urinaire, située au-dessus de la partie antérieure du vagin, forme un contraste remarquable par son petit volume comparé à celui de l'utérus. En effet, ce volume égale à peine celui d'une grosse aveline, et cette circonstance

tient peut-être à ce que l'animal a péri d'une mort violente, et peut-être aussi au long séjour des parties dans l'alcool. Cet organe conoïde a sa base tournée en haut et en arrière, et son sommet est en bas et en avant. Ce cône est surtout arrondi sur sa face antérieure, tandis qu'il est plane ou déprimé sur sa face postérieure, pour s'accommoder à la forme cylindrique du vagin. Sur cette face postérieure, près de la base, on aperçoit distinctement les deux uretères, qui convergent l'un vers l'autre et traversent obliquement le tissu de cet organe. La base présente en avant, comme dans le *Bradypus tridactylus*, l'insertion de l'ouraque, caché par les deux feuillets du péritoine.

L'urètre. — Depuis le col de la vessie jusqu'au méat urinaire, l'urètre a trois centimètres de longueur; ce qui est fort remarquable, comparativement à la longueur de ce même canal chez la femme. On voit à son extérieur des colonnes charnues courir de la vessie vers son extrémité vulvaire. La contraction de la vessie, portée à un très-haut degré, ne nous ayant pas permis de décrire ce réservoir avec détail, nous nous bornerons à dire qu'on aperçoit à sa partie antérieure et supérieure, et sur la membrane muqueuse, un point ou une tache de couleur orangée, correspondant à l'entrée de l'ouraque dans la vessie.

DE L'ŒUF ET DE SES MEMBRANES.

Les membranes de l'œuf, considérées de l'extérieur à l'intérieur, nous ont permis de reconnaître : 1° *la membrane caduque* fœtale, que l'on peut enlever avec facilité de la surface du chorion, et qui s'engage manifestement entre

les placentas et l'utérus lui-même; car, d'une part, sur la surface des placentas, et d'autre part, sur celle de l'utérus, dans les points par lesquels ces deux organes correspondaient l'un à l'autre, on reconnaît la présence de cette membrane adventive, qui a tous les caractères qu'elle présente dans l'espèce humaine. 2° *Le chorion*, recouvert à l'extérieur par cette même membrane caduque, offre une disposition analogue à celle qu'elle a chez le fœtus humain. 3° *L'amnios*, situé à la face interne du chorion, peut en être détaché avec facilité. On le voit se réfléchir sur le cordon ombilical, le recouvrir dans toute son étendue, et se porter de là sur la surface du fœtus, où cependant il est moins facile à reconnaître et à séparer. L'amnios a donc la disposition d'une membrane séreuse, couvrant le fœtus, son cordon ombilical, et la face interne du chorion, par sa surface externe, et en rapport avec lui-même par son autre surface, qui est baignée par la liqueur amniotique. 4° *L'allantoïde :* malgré les soins les plus minutieux et l'attention la plus grande, nous n'avons pu parvenir à reconnaître et à constater la présence de l'allantoïde. Sur l'ombilic des deux fœtus, l'ouraque, qui s'élève de la vessie, n'a pu être suivi dans l'épaisseur du cordon que pendant une distance de quelques centimètres de l'ombilic. 5° *Vésicule ombilicale :* nous n'avons pas pu constater non plus l'existence de la vésicule ombilicale d'une manière bien certaine. Cependant, sur un de ces œufs de singe, nous avons aperçu, près de la base du cordon ombilical, vers son insertion au placenta, lorsque les vaisseaux se séparent et se divisent en branches, un petit corps arrondi, jaunâtre, ou espèce de petite poche vide, qui pourrait à la rigueur être considérée comme les vestiges de la vésicule ombilicale ; mais il nous a

été de toute impossibilité de découvrir son pédicule, soit vers le point d'insertion, soit le long du cordon ombilical. Il faut attribuer à la gestation trop avancée cette impossibilité d'avoir pu reconnaître cette vésicule et d'avoir mis son existence hors de doute. 6° *Placenta :* une des circonstances les plus remarquables de ces œufs de quadrumanes, est l'existence de *deux placentas,* dont chacun a un volume supérieur à celui d'un cotylédon d'œuf de vache parvenu à l'époque naturelle du part. Chacun de ces placentas présente parfaitement, mais en petit, le placenta de l'œuf humain. Ils sont plutôt légèrement elliptiques que circulaires. Un de ces deux placentas a sept centimètres dans sa plus grande longueur, et six centimètres de large. L'autre placenta présente six centimètres de longueur sur six de largeur.

De leurs deux surfaces, l'utérine est inégale, bosselée, comme s'il existait des espèces de cotylédons, au nombre de cinq ou six et de grandeurs différentes, mais peu profondément séparés les uns des autres, ce qui est une nouvelle analogie avec l'œuf humain. Sur cette face utérine du placenta, il est facile de détacher une lame ou feuillet membraneux, appartenant à la membrane caduque, et sous ce feuillet on voit parfaitement la substance du placenta qui est à nu. — Sur la surface fœtale, on reconnaît la présence du chorion, et sous ce chorion les vaisseaux provenant du cordon ombilical et se ramifiant sur la surface des deux *placentas.*

Mais ces *placentas* sont distincts l'un de l'autre par un caractère bien tranché : car sur l'un, le cordon vient se terminer au centre comme dans le fœtus humain, et les vaisseaux de ce cordon ombilical, en se répandant sur la face interne de ce premier *placenta,* se portent, lorsqu'ils sont parvenus

à sa circonférence, sur le pourtour du second *placenta*, pour aller de là se ramifier sur sa surface, et s'anastomoser entre eux un grand nombre de fois, et procédant toujours de la circonférence au centre, d'où résulte un réseau vasculaire des plus remarquables.

Dans ce passage des vaisseaux de l'un à l'autre *placenta*, les éléments vasculaires du cordon ne sont pas dissociés, et l'on voit la *veine* et les *deux artères* marcher ensemble et traverser, en conservant cet ordre d'association, l'intervalle qui sépare un *placenta* de l'autre. Cet espace entre les deux *placentas* présente, sur l'œuf le plus développé, deux centimètres d'étendue, tandis que sur l'autre œuf cet intervalle n'est que d'un centimètre et demi. Enfin ces *placentas* sont recouverts sur leur surface interne par la membrane *amnios*, qui s'en détache sans beaucoup de difficulté.

7° *Cordon ombilical.* Ce cordon est remarquable par sa longueur de neuf centimètres, depuis l'ombilic jusqu'au *placenta*, où il arrive sans que les vaisseaux se séparent. Ce cordon, composé de deux artères et d'une seule veine, est enveloppé par l'*amnios* et le *chorion*. Les artères nous ont paru moins flexueuses et moins en spirale sur la veine qu'on ne les observe sur le fœtus humain. Nous n'avons reconnu dans ce cordon aucune trace d'*ouraque*, si ce n'est vers son origine à l'ombilic; mais l'examen le plus attentif n'a pu nous faire découvrir de fibrille qu'on aurait pu considérer comme un vestige de pédicule de la *vésicule ombilicale*, ou comme quelque vestige de l'ouraque. Du côté de l'ombilic, et dans la cavité abdominale, nous avons constaté la présence des *vaisseaux omphalo-mésentériques*. Ces vaisseaux se dirigeaient du cordon vers l'ombilic et la cavité de l'abdomen,

pour se rendre aux troncs qui les fournissent. L'existence de ces vaisseaux ne suffit-elle pas pour autoriser ici l'admission d'une *vésicule ombilicale?* En effet, à quoi serviraient ces vaisseaux s'il n'existait point de *poche vitelline!* La découverte d'une petite poche entre les membranes de l'œuf, et que nous avons signalée, aurait pu laisser quelques doutes sur l'existence de la vésicule ombilicale, tandis que la présence de ces vaisseaux bannit toute incertitude.

FOETUS. *Disposition générale du corps.*

La tête est plus volumineuse, toute proportion gardée, que les autres parties du corps. Le crâne est mou, compressible, membraneux, et ne présente pas dans les noyaux centraux qui en constituent la voûte, la résistance que l'on soupçonnerait d'après la forme bien déterminée de la tête. Le museau est saillant. Les yeux sont couverts par le rapprochement des paupières; mais l'on peut facilement les écarter l'une de l'autre. Les narines sont bien ouvertes, et dirigées obliquement de haut en bas et de dehors en dedans. La bouche est largement fendue, et les lèvres sont garnies de poils. C'est le seul point de la surface du corps qui montre cette production. Le pavillon de l'oreille est large et dépourvu d'hélix. Les membres sont fléchis sur le tronc. Les mains antérieures affectent la même direction que les avant-bras, tandis que les pieds ou mains des membres abdominaux forment un angle droit avec la jambe. Le talon est très-saillant, et le gros orteil très-court comparativement aux autres orteils, et il est séparé d'eux par un espace qui fait parfaitement ressembler cette partie à une main plutôt qu'à un pied.

Quant aux mains proprement dites, le pouce est écarté des autres doigts, mais il est beaucoup plus court qu'il ne le serait dans un fœtus humain de la même grandeur. Tous les doigts et les orteils présentent à leurs extrémités, du côté de la surface palmaire, un petit renflement arrondi, en manière de pelote. Les ongles sont formés.

La surface du corps est recouverte dans sa totalité par une pellicule que nous avons déjà reconnu recouvrir le cordon, et appartenir à l'amnios. Cette pellicule membraniforme, sur plusieurs points, se détache avec une grande facilité et ne tient à la peau par aucun tractus ou filament; il n'y a donc entre ces deux surfaces qu'une simple juxtaposition, sans continuité aucune. Ces circonstances sont des preuves suffisantes que cette pellicule provient de l'*amnios*, et non d'une desquammation de l'épiderme; voyez aussi pl. 3 et 4.

Organes intérieurs. 1° *Poumons,* voyez pl. 1 et 2. — Celui du côté droit présente sur sa face externe deux sillons qui donnent à cet organe trois lobes latéraux distincts, et en arrière de cette même face externe, le lobe inférieur, qui est le plus grand, est divisé en deux parties. — Le poumon gauche ne présente que deux lobes à sa face externe, et en arrière le lobe inférieur est divisé pour produire deux lobes semblables à ceux que nous venons d'indiquer pour le côté droit, mais beaucoup plus petits; d'où résulte que le poumon droit possède cinq lobes, et que le poumon gauche n'en présente que quatre.

2° *Foie.* — Le foie volumineux, placé comme chez l'homme, s'étend beaucoup plus loin dans l'hypocondre, et présente quatre lobes distincts (fig. 6, pl. 1) : deux lobes médiaux, séparés l'un de l'autre seulement dans le point où s'engage la

veine ombilicale, tandis que les lobes latéraux sont séparés des lobes du centre dans presque toute leur étendue, excepté en arrière. Vus par leur partie inférieure, les quatre lobes sont bien distincts et bien isolés les uns des autres. La vésicule biliaire est détachée, pendante, et correspond au lobe médian, en dehors et à droite du sillon de la veine ombilicale.

3° *Estomac.* — L'estomac (*a*, fig. 12, pl. 1 et 2) est conoïde, du volume d'un haricot, et à peu près du même calibre dans toute sa longueur. L'intestin présente dans toute son étendue le même calibre. Le cœcum (*b'*) est court, et pourvu d'un appendice qui a presque le diamètre de l'intestin lui-même.

4° *Reins.* — Les reins (fig. 8, *b*, *b*, pl. 1 et 2), situés sur les parties latérales de la colonne rachidienne, surmontés de capsules (*capsules susrénales*) volumineuses, *c*, *c*, offrent à leur partie interne deux petits corps blanchâtres, rosés, qui paraissent être les restes des corps de Wolf, *d*, *d*.

5° *Vessie urinaire.* — La vessie (*e*, pl. 1 et 2, fig. 8 et 3), conoïde, située dans la région hypogastrique, se termine par un corps filiforme, placé entre les deux artères ombilicales. Ce cordon délié est cependant creusé d'un canal à son centre, et paraît être l'ouraque (*f*, *f*, *f*). Sur les côtés de cette vessie on voit les artères ombilicales (*g*, *g*, pl. 1 et 2, fig. 3 et 8), desquelles naissent deux artères de chaque côté, destinées à la vessie (fig. 9 et 10, pl. 1 et 2). Au-dessus de l'ombilic, vers le sillon du foie (fig. 3, *h*, pl. 1 et 2), on reconnaît la veine ombilicale; et plus bas, entre cette veine et les artères qui convergent vers l'ombilic, on distingue les vaisseaux omphalo-mésentériques (*i*, fig. 3, pl. 1 et 2).

6° Organes génitaux. — *Utérus.* Cet organe est conoïde, aplati en avant et en arrière, et laisse voir les ligaments sus-

pubiens. Les trompes de Fallopia sont cylindroïdes, et nullement comparables, sous ce rapport, aux cornes de l'utérus des autres mammifères.

Œuf de Callitriche (*Simia sabæa*). Pl. 3 et 4.

1° *Utérus.*— Cet organe est ovoïde, un peu plus volumineux que celui du fœtus précédent. Il a, de son fond à son col, dix centimètres neuf millimètres, et, dans son diamètre transverse, huit centimètres deux millimètres. Ouvert sur sa face postérieure, depuis son fond jusqu'à son col, et de là jusqu'à la vulve, on peut voir facilement la forme de la cavité de son corps et de son col. On aperçoit sur les côtés de cet utérus les ovaires et les trompes, ainsi que les ligaments ronds et les replis péritonéaux ou grandes ailes. Les ovaires, du volume d'un gros pepin de poire, sont situés un peu au-dessus du tiers supérieur de l'organe, et se rapprochent davantage de la face postérieure que de la face antérieure de l'utérus.

L'analyse anatomique a permis de reconnaître à l'utérus un feuillet péritonéal, et au-dessous de cette lame, les fibres musculaires affectant des directions variées, fort horizontales, ou longitudinales, très-obliques. Les fibres longitudinales sont surtout très-distinctes, et inférieurement se portent sur le vagin pour le constituer en très-grande partie.

Ces fibres, d'abord longitudinales, se contournent vers la partie inférieure du vagin pour couvrir l'urètre, et alors elles deviennent successivement obliques et presque horizontales (pl. 1 et 2, et pl. 3 et 4, fig. 1).

L'épaisseur des parois de la matrice est d'environ deux millimètres vers le col de l'organe, et elle domine vers le fond

de l'utérus; mais vers les points correspondants aux insertions des *placentas,* cette épaisseur est de trois à quatre millimètres d'épaisseur. Le diamètre du col, en y comprenant les parois et la cavité, est d'un centimètre six millimètres.

La longueur du vagin, de l'orifice du col utérin au méat urinaire, est de quatre centimètres. La face interne du vagin et de l'utérus est incontestablement revêtue d'une membrane muqueuse, et l'on peut reconnaître les lambeaux de membrane caduque sur les points correspondants aux insertions placentaires (1).

La vessie urinaire, qui correspond sur cette pièce anatomique à la partie antérieure et inférieure du vagin, est très-petite et très-contractée. Son volume est celui d'une aveline. Sur ses parties latérales, et un peu en arrière, on aperçoit les artères. A sa partie supérieure, et un peu en avant, l'on découvre les vestiges de l'ouraque.

La disposition intérieure du vagin est absolument semblable à celle de la pièce de la pl. 1 et 2, fig. 1. Les petites dimensions de la vessie et le peu d'épaisseur des parois de l'utérus peuvent certainement être en partie attribuées au séjour prolongé de ces tissus animaux dans l'alcool.

Utérus de papion. Pl. 3, fig. 1.

Indépendamment des deux utérus en gestation appartenant, d'après nos présomptions, à l'espèce appelée Callitri-

(1) Nous avons vainement cherché sur les parois du vagin et sur celles de l'utérus les canaux de Gœrtner (*).

(*) Anatomisk beskrivelse overetved nogle sur-arters uterus under sugl glandulof organ. (Af Dr M. H. Gœrtner. Kiœbenhavn, 1822.)

che (*Simia Sabæa*), et dont nous venons de donner une description rapide, nous avons encore examiné le placenta d'un papion (*Cynocephalus Sphynx, Sim. Sphynx*). La femelle de ce papion avait mis bas, au terme naturel de la gestation, dans la Ménagerie du Jardin du Roi, et nous devons l'avantage d'avoir pu faire cet examen à l'obligeance de notre confrère M. Isidore Geoffroy Saint-Hilaire.

Ce placenta, de forme elliptique, avait huit centimètres dans son plus petit diamètre, et neuf centimètres sept millimètres dans sa plus grande étendue; il paraissait être unique; mais il avait été arraché des mains de cette femelle de papion peu après le part, parce qu'elle voulait le dévorer, et déjà une bonne partie de l'arrière-faix avait été détruite. Sur un des points de la circonférence de ce placenta, on reconnaissait une déchirure avec perte de substance dans une étendue d'environ quatre centimètres. Ici, comme dans les Callitriches, le placenta était double, et nous sommes d'autant plus porté à croire que près de ce placenta lacéré avait dû en exister un autre, et que sur le disque examiné par nous, et sur lequel le cordon ombilical venait s'implanter, les vaisseaux du cordon ne se terminaient point en se ramifiant et en se perdant dans l'épaisseur du gâteau; mais on reconnaissait qu'ils se prolongeaient au delà de ce placenta, pour aller sur le disque placentaire voisin, lequel a été dévoré par l'animal immédiatement après le part.

Sous le rapport de l'organisation et de la forme, ce placenta s'éloigne très-peu de la disposition du placenta humain, si ce n'est qu'il est beaucoup plus petit, et que les cotylédons sont au nombre de cinq ou de six, et sont séparés les uns des autres par des sillons assez profonds.

La membrane caduque revêt cette face externe ou utérine du placenta, excepté cependant vers la circonférence de ce disque, où elle est séparée par un espace de neuf millimètres et par un repli du chorion et de l'amnios. Le chorion, après s'être comporté ainsi sur la surface du placenta, s'étend jusque sur le cordon. Ce cordon ombilical avait trente-six centimètres de longueur. Il était composé de deux artères et d'une seule veine. Les artères ne commençaient guère à s'enrouler autour de la veine que vers le milieu du cordon.

Fœtus de Saïmiri (1).

C'est à l'obligeance et à l'amitié de l'illustre savant, le professeur Schrœder van der Kolk d'Utrecht que je dois les desseins n° 1, 2, 3 et 4 de la planche 6 et 7. Je vais donner ici l'extrait de la partie de sa lettre, écrite en latin, qui est relative au sujet de ce mémoire.

« J'allai trouver M. Klenkeberg pour lui demander la permission de visiter son musée, où notre ami le professeur van der Hœven me disait, de votre part, qu'on trouvait des fœtus de singe avec leurs membranes. Après bien des recherches, je découvris enfin, dans un coin isolé, trois jeunes singes qui paraissaient être sortis de l'utérus à des époques différentes de la gestation. Il n'y avait plus d'utérus. Ces trois sujets appartiennent à une seule et même espèce, celle du *Simia sciurus saïmiri*. Deux individus étaient parfaitement conservés, mais, hélas! ils n'avaient pas de placenta. Le troisième *specimen* en était pourvu; ce sujet, qui avait

(1) *Simia sciurea*, Buff. *Sim. sciurus saïmiri*. Pl. 6 et 7.

tant de prix à nos yeux, était malheureusement très-mal conservé, car il paraissait avoir été d'abord desséché, je ne sais pourquoi, puis mis dans l'alcool, ce qui avait rendu les membranes rigides, contractées et rugueuses. Quant au *placenta double* et aux enveloppes fœtales, ils étaient noircis, d'où je désespérais pouvoir en tirer quelque chose.

« M. K. m'ayant accordé la permission de les examiner plus attentivement, et même de les extraire des bocaux, je fis ce que je pus, et je vous envoie mon travail. J'ai fait dessiner le sujet le mieux conservé; bien que je ne sois pas très-content de ce dessin, cependant il pourra suffire pour constater que c'est le singe *Simius sciurus*, L. Quant à l'autre sujet muni d'un placenta, je l'ai mis pendant plusieurs jours tantôt dans de l'eau froide, tantôt dans de l'eau tiède, pour ramollir les tissus; et ce procédé ne m'ayant pas bien réussi, j'ai désiré joindre au dessin de l'artiste un dessin du placenta que j'ai fait moi-même. Toutefois je dois vous prévenir que j'ai commis une petite erreur, en ne faisant pas attention que le fœtus muni du placenta était plus jeune et conséquemment plus petit que celui qu'avait dessiné le peintre. Le dessin de ce singe ne vous servira donc qu'à constater l'espèce, et les autres figures serviront pour démontrer la disposition des parties. Cependant elles sont dans des proportions trop petites, et l'on reconnaît aisément que les membranes ne pourraient pas contenir un pareil fœtus. C'en est assez sur ce point; je vais maintenant expliquer ce qui m'a paru le plus digne de remarque.

« La longueur du cordon était de quatorze centimètres, ce que j'ai indiqué sur le dessin. La dessiccation de la pièce a sans doute diminué cette longueur. Sur les deux autres

sujets, la partie conservée du cordon adhérait à l'abdomen. J'en ai coupé un morceau, et je l'ai fait représenter sur le dessin, tant en grandeur naturelle (fig. 2 A, pl. 6 et 7) que grossi (fig. 2 B, pl. 6 et 7); on voit facilement par cette figure qu'il y a réellement deux veines, *b*, *b*, et deux artères plus petites, *a*, *a*. J'ai ouvert l'abdomen d'un sujet, j'en ai fait faire un *schema* (fig. 4, pl. 6 et 7) pour indiquer le trajet des vaisseaux. Les deux veines *c*, *c*, pl. 6 et 7, fig. 4, sitôt après leur entrée dans le ventre, se réunissent en un seul tronc *b*, qui se jette dans le foie comme de coutume, et par un point où cet organe présente un sillon; les deux artères plus petites *a*, *a*, pl. 6 et 7, fig. 2, B, se rendent sur les côtés de la vessie. Le fond de ce réservoir de l'urine était rond, sans aucune trace d'ouraque, autant que j'ai pu le voir et comme on peut le reconnaître sur la figure *schématique e*; ce qui me porte à penser que les fœtus que vous avez étudiés étaient plus jeunes. Il est facile de comprendre qu'il ne peut pas être question ici des restes de la vésicule ombilicale; mais la structure du placenta d'apparence bilobé que j'ai fait dessiner avec le plus de soin possible (fig. I', pl. 6 et 7), me paraît être du plus grand intérêt. Après l'avoir fait ramollir assez longtemps dans l'eau, je suis arrivé à pouvoir déplier et séparer soigneusement les membranes adhérentes et rigides, et à examiner la disposition des vaisseaux. Dès que le cordon entre dans les enveloppes, pl. 6 et 7, il se divise en deux grandes branches *b*, *b*, dont l'une, plus considérable, se rend au placenta, qui est aussi le plus grand, en même temps que le premier A, et dont l'autre se rend au second placenta plus petit. Cette dernière branche offre deux vaisseaux,

dont l'un est une artère, et l'autre, marqué *c*, une veine. Dans le trajet de ces vaisseaux qui se trouvent entre les deux placentas dans l'épaisseur du chorion, j'ai rencontré une ramification vasculaire remarquable, que j'avoue ne pas bien comprendre. Après l'avoir bien étudiée, je l'ai exprimée dans la figure. Vous verrez entre les deux placentas beaucoup de vaisseaux qui établissent une communication entre les deux disques. Ce qui m'a surtout frappé d'admiration, c'est que plusieurs vaisseaux paraissent naître du premier placenta A, pl. 6 et 7, et de son bord, en envoyant des rameaux, les uns plus grands, les autres plus petits, dont les divisions se dirigent vers le second placenta B. On en voit un bel exemple du côté *c*, où le vaisseau sortant du placenta B se divise en deux rameaux, l'un se rendant au cordon et l'autre au bord du second placenta, dans lequel il pénètre non loin du point *c*. Quels sont maintenant ces vaisseaux? Sont-ce des veines qui ramènent le sang du placenta B? Mais alors elles offriraient une nouvelle ramification, comme la veine-porte. Sont-ce des artères qui, après une première division dans le placenta, se réuniraient de nouveau en de très-petits troncs pour se rendre dans le placenta B, puis offriraient une double ramification, la première dans le placenta A, et l'autre dans le placenta B? Je ne comprends pas bien cela; je regrette que la dessiccation, la rigidité et la noirceur du cordon m'aient empêché de constater cette disposition, et pour ne pas gâter la préparation, je me suis abstenu d'inciser le cordon, pour pouvoir l'examiner à la loupe, moyen qui eût peut-être dissipé mes doutes. Je vous laisse donc le soin de le découvrir vous-même sur votre sujet. Ces vaisseaux marchent

entre les deux lames du chorion, ce qui m'a permis de séparer facilement les membranes, et de constater la disposition vasculaire précédemment décrite. On connaît plusieurs exemples de double placenta; ainsi, chez la belette (*Mustela*), dont Daubenton a donné le dessin dans l'Histoire naturelle de Buffon. Mais ici les deux placentas adhèrent aux flancs du fœtus, ce qui rend le cordon ombilical très-court. Je soupçonne ici, d'après la forme des membranes, qu'un des placentas correspondait à la tête et l'autre à la région fessière, de manière à envelopper le fœtus dans sa longueur, la plus grande partie du cordon y adhérant : ce que l'on retrouve peut-être aussi sur votre sujet. Je pense qu'il faut chercher la cause d'un double placenta, non dans le fœtus, mais dans la forme de l'utérus : ce qui me fait vivement regretter de n'avoir pas vu l'utérus; mais j'espère que vous expliquerez tout cela.

Foetus du singe Alouate rousse (*Simia seniculus*).

Je me réjouis d'avoir pu examiner un autre sujet, que je dois à la complaisance de mon cher collègue le docteur de Jende, professeur d'histoire naturelle et d'anatomie comparée, sujet qui provient de son magnifique musée. Ce fœtus est parfaitement conservé, mais il n'a qu'un seul placenta ; ce paraît être un fœtus de l'*Alouate rousse* (*Simia seniculus*). Il est intermédiaire à cette espèce et au singe *Apelle* (*S. apella*, L.), (*Sajou*). Ce qui porte à croire qu'il appartient à la première espèce, c'est la fin de la queue qui est recouverte en dedans d'un épiderme nu, circonscrit, montrant évidemment que la queue, privée de poils en dessous, est un organe préhenseur,

car on pourrait expliquer cette disposition par la jeunesse du sujet, comme pour notre jeune singe *Saïmiri* (*Simia sciurus*). La forme générale, telle qu'on la voit dans l'ouvrage remarquable d'Audebert (*Singes*), la longueur des extrémités et la figure de l'oreille elle-même, répondent assez bien à cette espèce et la distinguent du singe *Coaïta* (*Simia paniscus*) comme du *Sajou* (*Simia apella*). Chez ce sujet, comme je l'ai déjà dit, il n'y a qu'un seul placenta, mais il y a quatre vaisseaux au cordon, deux artères et deux veines : ce que j'ai pu très-bien constater, en incisant longitudinalement le cordon pour ne pas l'endommager. La double veine du cordon est-elle propre, comme vous paraissez le présumer, aux singes d'Amérique? C'est ce que j'ignore; mais comme, du reste, je n'ai rien trouvé de particulier dans ce sujet, je ne vous en envoie pas la figure; si vous la désiriez, je la ferais faire et vous l'adresserais. J'ai remarqué seulement dans ce cordon que le calibre (*lumen*) des artères différait moins de celui des veines que dans le premier sujet de singe (*Simia sciurus*), fig. 2 et 3, pl. 6 et 7. »

Ce dessin, que m'offrait M. le professeur Schrœder van der Kolk, m'a, en effet, été envoyé plus tard, et voici un extrait de la lettre de ce savant, qui accompagnait cet envoi :

Alouate rousse.

« Je me réjouis de pouvoir enfin vous envoyer le dessin du jeune singe avec son placenta (*Simia seniculus*) (*Alouate rousse*), que je vous avais promis. Ce dessin a été fait sous mes yeux, par M. Bakker, un de mes élèves les plus dis-

tingués, et j'aime à penser qu'il pourra vous satisfaire, car il a été exécuté avec beaucoup de soin et de fidélité.

« Sur la petite figure qui représente le cordon disséqué, on voit qu'il y a dans ce cordon ombilical deux veines, dont le diamètre surpasse de beaucoup celui des artères; ici les veines sont très-rapprochées l'une de l'autre, et les artères sont plus éloignées, rejetées sur le côté opposé du cordon. Je n'ai pu constater aucune anastomose entre les veines de ce cordon, et il ne m'a pas été permis malheureusement de poursuivre dans l'abdomen le trajet des veines. Il est probable qu'elles se réunissent avant leur entrée dans le foie, comme dans ce *Simia sciurus* dont je vous ai déjà envoyé la figure et la description. Le placenta, comme le montre le dessin, est simple, et le cordon s'insère sur un point de la circonférence. La surface de ce gâteau est recouverte par l'amnios, qui laisse apercevoir les vaisseaux sanguins. La surface *glabre* de la queue *préhensile* a été, suivant moi, exprimée très-élégamment et avec une grande netteté. D'après la disposition de cette surface caudale, on est porté à croire que ce fœtus appartient au *Simia Seniculus* ou *Alouate rousse;* mais la teinte rousse ne paraît pas encore sur la périphérie du corps, qui est complétement nue. Du reste, le dessin est d'une telle fidélité, qu'il ne vous sera pas difficile de déterminer à quelle espèce de quadrumane appartient ce fœtus (1), etc. »

On doit reconnaître, d'après ces précieux renseignements, donnés par un savant médecin et un des zoologistes les

(1) Trajecti ad Rhenum, 28 jan. 1842.

plus habiles, qu'il est des points qui paraissent infirmer ce que nos premières observations semblaient avoir démontré, à savoir : que chez quelques singes du nouveau continent, le placenta pouvait être bilobé. Désirant posséder les données les plus exactes sur ce point, j'écrivis à M. le professeur Schrœder van der Kolk, pour l'engager à examiner de nouveau le fœtus et ses enveloppes, *Simia Sciurus*, L. Car, d'après la première description de cet œuf, faite par l'habile professeur d'Utrecht, j'élevais quelques doutes, soit sur l'exactitude de la disposition des parties, soit sur celle de l'espèce de quadrumane examinée. M. Schrœder van der Kolk, avec son obligeance accoutumée, m'a répondu de la manière la plus explicite sur l'existence des deux placentas et sur leur isolement. Il me donne aussi l'assurance que cet œuf de quadrumane appartient bien à un singe du nouveau continent (*Simia sciurus*).

Ainsi dans cet état de la question, il faut attribuer cette observation, qui vient infirmer tous les faits que nous avons rapportés, à la mauvaise conservation de la pièce anatomique, à sa dessiccation, puis à sa macération dans un liquide. Ne peut-on pas présumer que dans ce mauvais état de conservation, les tissus sont devenus friables, et que, pendant les opérations qui ont précédé l'examen anatomique, le placenta se serait accidentellement séparé en deux? C'est possible, mais les paroles de M. Schrœder van der Kolk sont trop claires et trop positives pour permettre cette interprétation.

S'il ne s'est glissé aucune erreur dans l'histoire de ce fait anatomique, il faut avouer que la loi que j'établissais de l'existence d'un double placenta dans l'œuf des singes de l'ancien continent, et d'un seul placenta dans celui des singes

d'Amérique, n'est pas exacte, ou qu'elle souffre des exceptions. Le mieux serait peut-être d'attendre que de nouvelles observations vinssent éclaircir la question et lever tous les doutes sur ce point.

Dans un voyage que j'ai fait en Hollande il y a deux ans (1842), pour visiter les universités et tous les établissements scientifiques de cette importante portion de l'Europe, j'ai eu l'avantage de voir M. le professeur Schrœder van der Kolk, qui m'a donné la facilité d'examiner tout à mon aise les pièces anatomiques dont je viens de rapporter la description. J'ai reconnu l'exactitude des détails communiqués par M. Schrœder, et les altérations des pièces anatomiques qui avaient subi différents procédés de conservation, par lesquels, probablement, les parties avaient éprouvé des altérations dans leur volume, leurs rapports et la continuité des tissus. Dans plusieurs points, le racornissement des tissus était tel, qu'il ne permettait pas leur séparation ou leur déroulement, pour apprécier leur arrangement, sans craindre de les déchirer.

Foetus de singe nasique (*Sim. nasica*, Schr.). Pl. 6 et 7, fig. 5 et 7.

Deux fœtus de quadrumanes Semnopithèques nous ayant été remis par MM. les docteurs Hoblon et Jacquinot, qui ont fait avec M. Dumont d'Urville le dernier voyage de circumnavigation, nous sommes heureux de devoir à ces honorables confrères les moyens de vérifier nos premières observations, et de pouvoir ici leur témoigner notre gratitude pour leur obligeance; malheureusement, sur un de ces fœtus, les enveloppes avaient été si mutilées, qu'il a été impossible de nous assurer

convenablement de certaines dispositions anatomiques ; mais sur l'autre fœtus les parties principales avaient été très-bien conservées, et nous avons pu les examiner et en faire une description exacte. Ces deux fœtus ont été extraits du sein maternel par les naturalistes que nous venons de nommer, et c'est à Bornéo que l'une et l'autre femelle du *Simia nasica* avaient été tuées à la chasse.

Ce fœtus mâle est le plus grand des deux dont nous allons parler ; il a, du sommet de la tête au bout de la queue, trente-cinq centimètres neuf millimètres ; il est courbé sur lui-même; les deux bras élevés sont placés de manière à ce que les mains occupent les deux côtés de la tête et viennent se toucher, vers la partie postérieure du crâne, par le bout des doigts. Les jambes sont pliées légèrement ; les genoux sont en dehors. Ce fœtus était replié pour occuper le moins de place possible dans la cavité utérine. La tête est plus volumineuse qu'elle ne le sera plus tard probablement, toutes proportions gardées. Le crâne est déjà assez solide, mais non tellement que les divers os qui le composent ne puissent chevaucher un peu les uns sur les autres. Les yeux sont couverts par les paupières rapprochées, mais on peut écarter facilement celles-ci l'une de l'autre. Le museau est saillant, en grande partie formé par le nez qui, dans cette espèce, a des proportions telles, qu'il a mérité à ce singe le nom qu'il porte (*le Nasique*). Ce nez a un centimètre de longueur, les narines ouvertes sont dirigées d'arrière en avant, mais cependant un peu obliquement, de haut en bas. La partie antérieure du nez est aplatie, irrégulièrement arrondie, et ressemble tant soit peu à la terminaison d'une petite trompe. Nous ferons aussi observer que le nez, pour pouvoir présenter ainsi ses

narines en avant, est fortement courbé dans sa partie moyenne. La bouche, largement fendue, ne proémine pas autant que dans certaines espèces de singes. Les lèvres sont minces, la supérieure garnie de quelques poils un peu plus longs que ceux qui sont répandus sur la surface générale du corps; la lèvre inférieure n'est pas séparée du menton, qui se continue avec elle. Le pavillon de l'oreille est large, presque rond, mince, et n'a pas d'hélix très-prononcé. Les membres thoraciques sont comparativement presque aussi longs que les membres pelviens. Les doigts et les orteils sont très-bien conformés, et les ongles bien développés. Les doigts et les orteils présentent à leur extrémité, du côté de la face palmaire, un petit renflement arrondi en manière de pelote. Le gros orteil est court, comparativement aux autres orteils, et séparé d'eux par un espace qui fait ressembler cette partie à une main plutôt qu'à un pied. Le talon est très-saillant. Aux mains, le pouce aussi est écarté des autres doigts; mais il est plus court qu'il ne le serait dans un fœtus humain de même grandeur.

Toute la surface du corps est recouverte de poils très-petits et très-fins; mais sur la tête ils sont épais, forts et très-foncés en couleur, ce qui les fait ressembler à de vrais cheveux; puis sur le dos, dans l'espace compris entre les dernières vertèbres dorsales et les premières lombaires, ils sont aussi assez nombreux et assez foncés. A la lèvre supérieure, on aperçoit quelques poils longs et rares. Les cils sont longs, les sourcils assez marqués. Le pénis est petit; les testicules ne sont pas encore apparents à l'extérieur.

Le fœtus tient au placenta par le cordon ombilical; les enveloppes fœtales ont été dilacérées. Nous avons pu cepen-

dant reconnaître la présence de l'amnios et du chorion sur la face fœtale du placenta, et celle de la membrane caduque sur la face utérine; mais sur le corps du fœtus, ainsi que sur le cordon, le feuillet réfléchi de l'amnios n'existe plus distinctement partout. Le cordon a, de son insertion ombilicale à son insertion placentaire, vingt et un centimètres de long; il a neuf millimètres de large à son insertion fœtale; il est composé de deux artères et d'une seule veine. Les artères sont très-flexueuses et se contournent fortement sur la veine. Ce cordon présente plusieurs renflements. Les vaisseaux ombilicaux viennent se terminer à peu près au centre du placenta, et parvenus là ils se ramifient sur sa face interne. Le placenta affecte un peu la forme ovale; il a huit centimètres deux millimètres de longueur, sur sept centimètres cinq millimètres de largeur; son épaisseur varie suivant qu'on l'examine au centre ou à la circonférence. Par sa forme, il se rapproche beaucoup du placenta humain, si ce n'est que, chez ce dernier, les cotylédons ne sont pas aussi distincts. Sa face fœtale est lisse, recouverte qu'elle est par l'amnios et le chorion, qui permettent d'apercevoir sur cette face les principales divisions des vaisseaux ombilicaux; sa face utérine est inégale, et présente encore, dans plusieurs points, des portions de la membrane caduque. Cette face offre aussi plusieurs sillons assez profonds, qui séparent les divers cotylédons qui concourent à former le placenta: ces cotylédons sont au nombre de cinq, et tous ont à peu près la même forme et le même volume.

Ce qui nous a le plus surpris chez ce fœtus, c'est de ne rencontrer qu'un seul placenta, cette espèce de singe en présentant deux, et le second fœtus que nous avons eu

en notre possession, et dont nous allons aussi donner l'histoire, les ayant l'un et l'autre. Nous avons alors cherché, avec la plus grande attention, à la circonférence du placenta et sur les débris des membranes de l'œuf, si nous ne trouverions pas des vestiges des vaisseaux qui passent ordinairement d'un placenta à l'autre; mais l'état d'altération des parties et l'absence d'une grande portion des membranes ne nous a pas permis de poursuivre ces vaisseaux et de découvrir le second placenta, qui, certainement, avait été enlevé lorsqu'on a extrait le fœtus de la cavité utérine de l'abdomen de la mère. Nous avons essayé de pousser du mercure dans le placenta par les vaisseaux ombilicaux, mais le gâteau placentaire avait été tellement déchiré en certains endroits, que nous n'avons pu obtenir aucune notion par ce moyen. Les divers fœtus de singe que nous avons examinés jusqu'ici nous ayant toujours présenté des vaisseaux assez considérables, passant d'un placenta à l'autre, l'étude de ces vaisseaux sur les membranes de cet œuf nous aurait conduit à un résultat certain, si ces tissus n'avaient pas été altérés et mutilés. Maintenant, est-ce une anomalie? ou le placenta est-il assez volumineux pour suffire seul à la nutrition du fœtus? D'une part, ce fœtus est un peu plus grand que le second, que nous allons étudier; d'une autre part, le placenta unique a huit centimètres deux millimètres de longueur, sur sept centimètres cinq millimètres de largeur; il n'est composé que de cinq cotylédons, tandis que chez l'autre, le plus grand placenta a neuf centimètres de longueur sur sept centimètres de largeur, et est aussi formé par cinq cotylédons; le plus petit placenta a six centimètres de longueur sur cinq de largeur. Ainsi, si nous nous fondions sur ce calcul, nous serions porté

à penser que l'un des deux placentas a été arraché chez le fœtus de la fig. 7, pl. 6 et 7. Nous ajouterons que le placenta unique du fœtus fig. 7, pl. 6 et 7, est absolument semblable, moins un peu de superficie, au plus grand placenta du fœtus fig. 5. La seule différence que nous ayons remarquée entre ces deux fœtus, c'est que le cordon ombilical du fœtus fig. 7 a vingt et un centimètres de longueur et neuf millimètres de largeur à son insertion fœtale, que les vaisseaux se rendent au placenta en s'enroulant les uns sur les autres et en présentant des renflements; tandis que chez le fœtus fig. 5, qui possède les deux placentas, le cordon n'a que dix-sept centimètres de longueur; sa largeur, à son insertion fœtale, est aussi de neuf millimètres; mais les vaisseaux ombilicaux sont peu enroulés les uns sur les autres et ne présentent pas de renflements. Il résulte de cet examen que, pour nous, la disposition était la même chez les deux fœtus, pour les placentas et leurs membranes, et que si nous n'avons rencontré sur l'un qu'un placenta entier, c'est que l'autre avait été enlevé, par manque d'attention, lorsqu'on a extrait le fœtus du sein maternel. Nous ajouterons que les deux fœtus appartiennent à la même espèce de singe, que les deux mères ont été tuées le même jour, dans les mêmes localités, par les mêmes naturalistes, et que les autres exemples d'œufs de singes de la même espèce, venant, comme ceux-ci, de l'île de Bornéo, et qu'on conserve dans les collections du musée de Leyde, où je les ai vus, et dont M. le professeur Van der Hœven m'a envoyé le dessin, possèdent deux placentas; il ne peut pas rester de doute sur l'existence de deux placentas dans l'œuf du *S. nasica.* (Voyez la description que nous donnons dans ce mémoire des autres fœtus du *Sim. nasica.*)

Nous avons ouvert l'abdomen du fœtus fig. 5, pl. 6 et 7 (l'incision est située tout près du côté gauche de l'ombilic); elle a été pratiquée pour chercher les vaisseaux omphalo-mésentériques ; mais ce fœtus était déjà beaucoup trop grand, aussi n'avons-nous pu rien découvrir. L'ouraque est d'un certain volume, et vient se terminer entre les deux artères ombilicales, à leur passage à l'ombilic; ce conduit est encore creux, mais il nous a été impossible de le suivre dans le cordon. Inutile de dire qu'il ne reste nulle trace de la vésicule ombilicale.

DIMENSIONS DU FOETUS NASIQUE, ET DES PARTIES QUI LE COMPOSENT. Pl. 6 et 7, fig. 7.

	cent. mill.
Longueur du fœtus, du sommet de la tête au bout de la queue..	35,9
Longueur, du sommet de la tête à l'extrémité du sacrum......	18,5
Longueur de la queue..................................	17,4
Diamètre occipito-mentonnier..........................	6,3
Id. occipito-frontal..................................	6,5
Id. auriculaire......................................	5,2
Id. occipito-bregmatique..............................	4,2
Id. occipito-nasal....................................	7,0
Longueur du nez.......................................	1,0
Hauteur de la face, depuis les arcades sourcilières jusqu'au menton..	2,8
Depuis les arcades sourcillières jusqu'au sommet de la tête.....	2,4
Du trou occipital à l'extrémité du sacrum..................	14,3
Hauteur du fœtus, du sommet de la tête à la plante des pieds...	22,5
Longueur de l'épaule, au bord supérieur de la crête iliaque.....	10,0
Id. du grand trochanter au genou........................	5,2

	cent. mill.
Longueur du genou au talon	6,0
Id. du pied	6,5
Id. de l'épaule au coude	5,0
Id. du coude à l'articulation du poignet	5,3
Id. de la main	4,8
Hauteur, du sommet de la tête à l'insertion du cordon	14,4
Hauteur de l'insertion du cordon au périnée	4,5
Longueur du cordon, de l'ombilic au placenta	21,0
Largeur du cordon à son insertion fœtale	0,9
Longueur du placenta	8,2
Largeur du placenta	7,5

FOETUS DE SINGE NASIQUE (*Simia nasica*). Pl. 6 et 7, fig. 5.

Ce second fœtus, mâle aussi, est un peu plus petit que le premier; il a, du sommet de la tête au bout de la queue, trente-quatre centimètres sept millimètres de longueur. Il était courbé de manière à ce que le menton était appuyé sur la poitrine; les bras serrés contre le tronc, les avant-bras fléchis sur les bras et un peu dirigés de dehors en dedans, les mains fermées et placées près des yeux, comme il arrive souvent chez les fœtus humains; les cuisses fléchies, élevées, et un peu en dehors; les jambes ramenées sur les cuisses, mais les mollets dirigés en dehors, de telle sorte que les pieds se touchent par la plante, et que les talons se trouvent presque au niveau du périnée. Tout ce que nous avons déjà dit pour la description extérieure du fœtus pl. 6 et 7, fig. 5, peut se rapporter à celui-ci : aussi, nous ne le répéterons pas, et nous passerons de suite à la description des placentas, ce qui est pour nous d'un intérêt beaucoup plus grand. Nous ferons cependant remarquer que le nez a, de même que chez le premier fœtus, un centimètre

de long, et que les poils sont distribués de la même manière.

Ce fœtus tient encore aux deux placentas par le cordon ombilical; mais les enveloppes fœtales ont été déchirées: il en reste cependant une plus grande partie que chez le premier fœtus. Nous avons pu, de même que chez celui-ci, reconnaître facilement, du côté de la face fœtale des placentas, la présence de l'amnios et du chorion; et du côté de la face utérine, celle de la membrane caduque réfléchie: mais, de même que chez l'autre fœtus, l'amnios ne paraissait plus appliqué bien distinctement sur le corps du fœtus.

Le cordon a, de son insertion ombilicale au grand placenta, dix-sept centimètres de longueur, et neuf millimètres de largeur à son insertion fœtale. Ce cordon est peu volumineux; les artères sont très-peu flexueuses, et presque pas en spirale sur la veine, si ce n'est vers les extrémités.

Ce fœtus possède deux placentas, comme nous l'avons déjà dit: le plus grand a neuf centimètres de longueur sur sept centimètres de largeur; le plus petit a six centimètres sur cinq; l'espace membraneux qui sépare les deux placentas est de trois centimètres cinq millimètres. Le plus grand placenta est formé par cinq cotylédons assez distincts; le plus petit, par trois. Le plus grand ressemble assez au placenta humain; de même que chez ce dernier, le cordon ombilical vient se terminer au centre du gâteau; de là, les vaisseaux se ramifient sur la face interne de ce placenta, et lorsqu'ils sont parvenus à sa circonférence, ils se portent vers celle du second placenta, où ils pénètrent. Il faut remarquer ici que ces vaisseaux, qui sont pourtant en assez grand nombre, sont ténus, mais non à l'état de vaisseaux capillaires: nous ajouterons que tous ces vaisseaux nous ont paru être situés au-

dessous du chorion. Maintenant, outre ces vaisseaux qui sont, comme nous venons de le dire, assez nombreux, il existe, sous l'amnios, deux vaisseaux assez considérables, qui partent presque du point central où vient se rendre le cordon ombilical sur le premier placenta, rampent sur la surface interne de ce placenta, sans pénétrer dans sa substance, et, parvenus à un des points de la circonférence de ce premier placenta, ils traversent l'espace compris entre ce placenta et le second, en conservant entre eux dans ce passage, à peu de chose près, la même distance qu'ils ont eue en y entrant : cette distance est d'un peu plus d'un centimètre. Ces deux vaisseaux, après avoir franchi cet espace, se rendent sur le second placenta, et à peine en touchent-ils la circonférence, qu'ils s'entrecroisent de suite et pénètrent dans la substance placentaire sans être parvenus au centre. Ce second placenta a une forme elliptique, et c'est vers une de ses extrémités que ces deux vaisseaux viennent se rendre.

Nous avons donné une figure de la manière dont ces vaisseaux se comportent. (Voyez pl. 6 et 7, fig. 6.)

VÉSICULE OMBILICALE.

Nous avons inutilement cherché cette vésicule près de l'ombilic, le long du cordon lui-même; et enfin, nous avons poussé nos recherches sur le placenta, où on la rencontre le plus souvent, dans un point correspondant à l'insertion des vaisseaux du cordon. Nous pouvons affirmer que, dans l'espèce humaine, sur des placentas à terme, nous mettons presque toujours à découvert, et sans difficulté, les vestiges de cette vésicule. Déjà nous avons dit l'avoir rencontrée sur le placenta

d'un fœtus de Callitriche (*Simia sabæa*, L.). Cette vésicule se trouvant quelquefois enclavée pour ainsi dire entre les vaisseaux ombilicaux, nous l'y avons aussi cherchée, mais nous n'en avons point découvert le moindre vestige. Nous dirons cependant que ce n'est pas une raison suffisante contre sa non-existence dans les cas présents, parce que les membranes fœtales et les placentas ayant été dilacérés et très-attaqués en plusieurs endroits, il ne serait pas étonnant que les vestiges de la vésicule aient été détruits ou mutilés en même temps que les membranes. Nous devons donc nous borner à déclarer que, malgré toutes nos recherches, nous n'avons découvert aucune trace de la vésicule ombilicale, ni sur l'un ni sur l'autre œuf de ces singes Nasiques (*Sim. nasica*).

UTÉRUS.

Trompes utérines.

Les trompes, qui existent encore sur le seul utérus de singe que nous ayons eu en notre possession, sont presque semblables à celles de l'utérus humain. Ces trompes peuvent avoir de huit centimètres à huit centimètres et demi de longueur. Le canal est très-petit, et n'offre rien de semblable à ce que l'on remarque dans les autres mammifères. Il n'a pas plus de deux à trois millimètres de large, et on introduit assez facilement une soie de sanglier dans son intérieur.

Le pavillon de cette trompe avait été en partie coupé, et ce qu'il en reste est situé près de l'ovaire, et tient encore à l'utérus par un ligament blanchâtre, de cinq ou six centimètres d'étendue.

DIMENSIONS DU FOETUS ET DES PARTIES QUI LE COMPOSENT.

	cent. mill.
Longueur du fœtus, du sommet de la tête au bout de la queue. .	34,7
Id. du sommet de la tête à l'extrémité du sacrum.	18,5
Id. de la queue.	16,2
Diamètre occipito-frontal.	6,4
Id. occipito-mentonnier.	7,3
Id. occipito-bregmatique.	3,3
Id. sincipito-mentonnier.	6,5
Id. auriculaire.	5,2
Id. occipito-nasal.	7,2
Longueur du nez	1,0
Hauteur de la face depuis les arcades sourcilières jusqu'au menton.	3,5
Id. depuis les arcades jusqu'au sommet de la tête.	2,3
Du trou occipital à l'extrémité du sacrum.	14,0
Hauteur du fœtus, du sommet de la tête à la plante des pieds. . .	22,3
Longueur de l'épaule au bord supérieur de la crête iliaque.	9,2
Id. du grand trochanter au genou.	5,0
Id. du genou au talon.	5,8
Id. du pied.	6,0
Id. de l'épaule au coude.	5,1
Id. du coude à l'articulation du poignet.	5,4
Id. de la main.	4,2
Hauteur du sommet de la tête à l'insertion du cordon.	14,5
Id. de l'insertion du cordon au périnée.	3,7
Longueur du cordon de l'ombilic aux placentas.	17,0
Largeur du cordon à son insertion fœtale.	0,9

PREMIER PLACENTA.

	cent. mill.
Longueur	9,0
Largeur	7,0

DEUXIÈME PLACENTA.

Longueur	6,0
Largeur	5,0
Espace qui sépare les deux placentas	3,5

Diverses dimensions de l'utérus, qui se trouvent sur les deux fœtus.

Hauteur de la matrice, depuis son fond jusqu'à son col	18,4
Largeur de la matrice	11,8
Id. du col	3,0
Hauteur du fond de l'utérus à l'ovaire	11,0
Espace qui sépare l'ovaire du corps de la matrice	3,3

EXPLICATION DES PLANCHES.

PL. 1 ET 2.

Fig. 1re. Utérus en état de gestation du singe callitriche (*Simia sabœa*).

On aperçoit sur le vagin et l'utérus les fibres charnues longitudinales et transversales. Le vagin possède principalement des fibres longitudinales. Les replis latéraux du péritoine laissent voir en *a*, les ligaments sus-pubiens.

b, *b*, les trompes utérines.
c, l'ovaire.
d, *d*, *d*, le corps de l'utérus.
e, *e*, le vagin.
f, *f*, des poils qui garnissent le pourtour de la vulve.
g, la vulve.
h, l'orifice du vagin.
i, *i*, les grandes lèvres.
k, *k*, les petites lèvres, laissant apercevoir à leur centre le clitoris.

Fig. 2. L'utérus et le vagin ouverts, et contenant les placentas, etc.

a, *a*, *a*, *a*, *a*, le plan musculaire de l'utérus.
b, *b*, *b*, *b*, *b*, *b*, la membrane muqueuse.
b′, *b′*, *b′*, *b′*, *b′*, *b′*, la membrane périone ou les deux feuillets de la membrane caduque.

c, *c*, *c*, le chorion.

d, *d*, *d*, *d*, l'amnios.

e, *e*, *e*, *e*, l'amnios recouvrant le cordon ombilical.

f, *f*, veine ombilicale.

g, *g*, *g*, artères ombilicales.

H, cordon ombilical venant se rendre d'abord dans le placenta, sur lequel il s'insère, et envoyant des branches qui vont se terminer sur le deuxième placenta *y*.

K, mucosité claire s'accumulant hors de l'utérus et envoyant des prolongements dans le col de cet organe.

l, *l*, face interne de la cavité du col de l'utérus.

m, *m*, vagin ouvert et laissant voir sa cavité plissée et tapissée par la membrane muqueuse, faisant des replis nombreux.

y, *y*, premier placenta.

y', *y'*, *y'*, *y'*, *y'*, deuxième placenta.

Fig. 3. Le même fœtus dont le ventre est ouvert.

a, intestins refoulés à droite.

b, *b*, artères ombilicales.

e, vessie urinaire allongée, pour se continuer dans

f, l'ouraque.

h, veine ombilicale se terminant au foie et allant se réunir aux autres vaisseaux du cordon.

i, *i*, vaisseaux omphalo-mésentériques.

Fig. 4. Fœtus communiquant par le cordon ombilical avec les placentas que nous avons décrits fig. 2.

On voit le cordon dépouillé de ses membranes dans la partie qui correspond au fœtus, et parcourant à peu près la moitié de son trajet, ainsi privé de ses membranes.

f, *f*, la veine ombilicale.

g, *g*, *g*, les deux artères ombilicales.

Fig. 5. Poumons vus par leur partie postérieure et inférieure.

a, Thymus couvrant le lobe supérieur des poumons.

b, *b*, lobes moyens des poumons.

c, *c*, lobes inférieurs du même organe.

Fig. 6. Le foie vu par son bord antérieur et sa face supérieure.

On n'aperçoit que quatre lobes dans cette position, et au centre la veine ombilicale.

Fig. 7. Le foie vu par ses faces postérieures et inférieures.

On aperçoit quatre lobes, et au centre des deux moyens on voit la veine qui vient du cordon. Sur le côté droit on peut distinguer la vésicule biliaire.

Fig. 8. Portion du tronc du fœtus précédemment décrit. La paroi antérieure de l'abdomen est détruite et les intestins sont enlevés.

b, *b*, les reins avec les uretères.

c, *c*, les capsules susrénales.

d, *d*, on aperçoit profondément à la partie interne des reins deux petits corps qu'il faut regarder comme étant les reins succentoriaux.

e, la vessie urinaire.

f, *f*, l'ouraque.

f', la fin de la vessie urinaire allant se terminer dans l'ouraque.

g, *g*, les deux artères ombilicales.

Fig. 9 et 10. Connexions du cordon ombilical.

a, *a*, artères ombilicales.

b, *b*, deux petites artères naissant des artères ombilicales, et allant à la vessie.

d, terminaison, en haut, de la vessie en un petit canal ou ou-

raque, qui va communiquer avec le réservoir ou allantoïde.

e, corps de la vessie.

Fig. 11. Parties génitales internes du fœtus du callitriche (*Simia sabæa.*)

a, corps de l'utérus.

b, *b*, ovaires.

c, intestin rectum.

d, *d*, trompes utérines.

e, vessie.

f, artères ombilicales.

Fig. 12. Canal intestinal séparé.

a, estomac.

b, *b*, *b*, *b*, canal intestinal offrant à peu près le même calibre dans tous les points de son étendue.

b', le cœcum avec son volumineux appendice.

c, rate.

Fig. 13. Figure de l'alouate rousse (*Simia seniculus*), du sexe mâle, avec son placenta et ses enveloppes.

a, *a*, *a*, cordon ombilical.

b, *b*, les membranes de l'œuf.

c, *c*, *c*, le placenta, avec les vaisseaux artériels et veineux se ramifiant sur lui.

Fig. 14. Coupe du cordon ombilical.

a, *a*, section des deux veines ombilicales plus grosses que les artères.

b, *b*, les deux artères ombilicales.

Pl. 3 et 4.

Fig. 1re. L'utérus du callitriche *Simia sabæa.*

a, *a*, corps de l'utérus en état de gestation. On aperçoit les fibres musculaires longitudinales et transversales.

b, *b*, les ligaments sus-pubiens.

b', *b'*, *b'*, les trompes utérines.

c, *c*, *c*, portions du péritoine formant les replis dans lesquels sont renfermés les ligaments sus-pubiens et les trompes utérines.

d, *d*, le vagin, sur lequel on aperçoit les fibres musculaires.

e, *e*, les poils de l'entrée de la vulve.

f, *f*, la vulve.

g, clitoris recouvert en partie par les petites lèvres.

Fig. 2. L'utérus et le vagin ouverts.

a, portion du péritoine détachée de la surface de l'utérus.

b, *b*, *b*, *b*, *b*, plan musculaire de l'utérus.

c, col de l'utérus.

d, l'orifice antérieur qui établit une communication entre la cavité du vagin et celle de la cavité utérine.

e, petite cavité placée entre la partie antérieure de la membrane caduque et l'orifice intérieur du conduit qui va de l'utérus au vagin.

f, *f*, *f*, membrane caduque ne paraissant former dans quelques points qu'un feuillet, et dans quelques autres deux feuillets.

g, *g*, *g*, le chorion.

h, *h*, l'amnios.

i, *i*, *i*, les vaisseaux du cordon, artères et veines ombilicales, paraissant se réunir pour marcher ensemble.

k, placenta auquel arrivent les vaisseaux.

k', deuxième placenta et les vaisseaux.

l, artères ombilicales dans un point où l'on a enlevé les enveloppes membraneuses.

m, *m*, enveloppes fournies au cordon par l'amnios.

n, l'amnios recouvrant le cordon.

o, clitoris enveloppé par les petites lèvres.

p, les grandes lèvres.

q, *q*, *q*, poils de la partie externe des grandes lèvres.

r, *r*, membrane muqueuse de l'intérieur du vagin.

r', division des vaisseaux du cordon.

s, *s*, *s*, ramifications sur l'un et sur l'autre placenta, deux artères et une veine.

t, *t*, *t*, *t*, partie de ces vaisseaux arrivant du placenta *K'* au placenta *k*.

v, *v*, espace compris entre les deux placentas.

Fig. 3. Le placenta principal.

a, l'extrémité externe du cordon ombilical.

b, *b*, *b*, *b*, ramifications des artères du cordon ombilical sur le placenta.

c, *c*, *c*, le chorion.

d, *d*, *d*, membrane caduque.

e, la vésicule ombilicale à l'origine du cordon.

f, l'amnios.

Fig. 4. *a*, *a*, *a*, les deux placentas recouverts par la membrane caduque.

b, la membrane caduque soulevée et détachée.

c, *c*, *c*, *c*, vaisseaux du cordon, deux artères et une veine allant de la terminaison du cordon du grand placenta sur les intervalles membraneux.

d, cordon ombilical coupé ; deux artères et une veine.

e, *e*, *e*, membranes de l'œuf.

Fig. 5. *a*, *a*, *a*, cotylédons du placenta, recouverts par la membrane chorion.

b, *b*, *b*, tissu celluleux et vasculaire du placenta.

c, *c*, *c*, face interne du placenta.

Pl. 5.

Fig. 1re. Callitriche (*Simia sabœa*).

a, *a*, *a*, corps de l'utérus en état de gestation, du *Simia sabœa*.

On aperçoit les fibres longitudinales et transversales.

b, *b*, origines des trompes utérines.

c, *c*, trajet des trompes utérines.

d, *d*, ligaments sus-pubiens.

e, *e*, portions du péritoine formant les replis.

f, *f*, *f*, vagin, où l'on voit des fibres musculaires transversales.

g, vessie urinaire.

h, l'origine du canal allant à l'allantoïde; dans la partie où ce cordon est coupé, il est encore pourvu d'un canal perméable.

i, *i*, les deux conduits qui mènent l'urine des reins dans la vessie. Cette vessie est très-petite; ce qui est dû probablement au genre de mort de l'animal.

Fig. 2. Fœtus de callitriche.

a, veine ombilicale mise à nu.

b, *b*, les deux artères ombilicales mises à nu.

c, *c*, la membrane qui enveloppe le cordon.

d, *d*, le cordon ombilical pourvu de son enveloppe.

e, portion latérale droite du tronc, où l'on a enlevé l'amnios,

f, portion d'amnios enlevée à la partie précédente, et différente de l'épiderme.

g, parties génitales.

Pl. 6 et 7.

Fig. 1re. Fœtus du *Simia sciurus saïmiri.*

a, *a*, *a*, cordon ombilical.

b, *b*, divisions du cordon.

A, premier renflement considéré par M. Schrœder-Vander-Kolk comme un premier placenta. *B*. Comme un deuxième placenta.

d, intérieur des membranes, où l'on aperçoit de nombreux vaisseaux allant du placenta *c* au deuxième placenta *f*.

e, *e*, paroi externe des membranes, recouvertes par des vaisseaux provenant du cordon.

f, *f*, *B*., deuxième placenta, considéré comme tel par M. Schrœder-Vander-Kolk.

Fig. 2. Section du cordon pour montrer le nombre des vaisseaux sanguins qui le forment, et leur arrangement dans le cordon.

a, *a*, les deux artères du cordon ombilical.

b, *b*, les deux veines de ce même cordon.

Fig. 3. Le même cordon considéré dans ses dimensions naturelles.

Fig. 4. Fig représentant la veine ombilicale, les artères ombilicales et la vessie urinaire, etc., qui sont un développement de la fig. 1.

a, le cordon ombilical avec ses enveloppes.

b, *b*, le foie et la veine ombilicale formée, en sortant du foie, d'une seule branche; mais un peu plus bas elle se divise en deux parties.

c, *c*, les deux branches de la veine ombilicale.

d, *d*, les deux artères ombilicales.

e, la vessie urinaire. A son sommet on ne voit pas de prolongement ou d'ouraque.

Fig. 5. Fœtus de *Singe Nasique* (*Simia nasica*).

a, *a*, *a*, le cordon ombilical offrant, dans les points qui n'ont pas été fendus, des ondulations indiquant que des vaisseaux sont enroulés sur d'autres.

b, veine du cordon allant de l'ombilic à la face inférieure du foie.

c, *c*, les deux artères ombilicales, allant de l'intérieur du bassin

jusqu'à l'ombilic, et s'associant aux autres éléments du cordon.

d, le conduit qui s'élève du sommet de la vessie pour aller jusqu'à l'ombilic, car nous n'avons pas pu le suivre beaucoup plus loin.

e, le corps de la vessie urinaire.

f, la paroi interne de la membrane amnios qui enveloppe le cordon.

g, les deux artères ombilicales roulées sur la veine.

h, *h*, *h*, les vaisseaux se ramifiant sur le grand placenta, puis deux artères et une veine se rapprochant les unes des autres pour former des faisceaux de deux artères et d'une veine qui vont ensemble, en traversant l'espace membraneux qui sépare les deux placentas, se ramifier sur le deuxième placenta, et particulièrement sur celui qui a moins de développement. On voit sur les bords des membranes, qui sont coupés et marqués de la lettre *h*, ces vaisseaux divisés.

h, *h*, *h'*, on aperçoit sur un point des membranes où l'on a enlevé une partie de l'amnios *h*, *h*, *h'*, trois vaisseaux marchant, jusqu'au petit placenta, parallèlement. *h*, *h*, sont les artères, tandis que le vaisseau du centre, qui est le plus gros, *h'*, est la veine.

i, *i*, portion membraneuse de l'amnios qui a été détachée pour mettre à nu cette membrane et les vaisseaux.

k, *k*, surface dépouillée de l'amnios, où l'on voit les trois vaisseaux qui vont au deuxième placenta.

l, *l*, *l*, *l*, *l*, cinq cotylédons de la face interne du grand placenta.

Fig. 6. Une petite portion du cordon ombilical pour montrer le nombre des vaisseaux qui sont dans ce cordon, et leur arrangement. Deux artères et une veine; la veine est facile à distinguer,

parce qu'elle est d'un diamètre supérieur à celui de l'une et de l'autre artères.

Fig. 7. Le second fœtus du *Singe nasique*, qui a été apporté de Bornéo à Paris par MM. Hoblon et Jacquinot.

a, *a*, *a*, cordon ombilical pénétrant dans la cavité pour aller se terminer au placenta *b*.

d, *d*, membranes fœtales sur lesquelles on aperçoit les vaisseaux qui vont se rendre au placenta.

e, *e*, la section des deux artères et la veine ombilicale dans l'espace membraneux.

f, *f*, ces vaisseaux vus sur la face interne de la membrane.

Pl. 8 et 9.

Fig. 1re. *Semnopithecus Hilobates*, apporté en Europe par Reinwardt. Cette espèce de singe, de l'ancien continent, présente un cordon ombilical avec deux artères et une veine, et deux placentas; dessiné et donné par M. J.-Vander-Hœven.

a, *a*, *a*, cordon ombilical.

b, *b*, *b*, division du cordon ombilical sur le premier et plus grand placenta. On voit les divisions et les subdivisions du cordon se ramifier sur la surface du placenta, et envoyer des branches au deuxième.

b', *b'*, *b'*, branches vasculaires qui vont au deuxième placenta.

c, *c*, *c*, le second placenta.

Fig. 2. Le Singe nasique (*Semnopithecus nasicus*), donné à l'auteur par M. le professeur J.-Vander-Hœven.

a, *a*, *a*, cordon ombilical.

b, *b*, *b*, *b*, artères placentaires naissant des artères ombilicales.

c, *c*, *c*, branches veineuses placentaires du tronc veineux ombilical.

d, d, branche artérielle allant sur l'espace membraneux qui réunit les deux placentas.

d′, d′, artères placentaires du second placenta.

c′, c′, c′, branches veineuses sur l'espace qui sépare les deux placentas.

e, e, e, e, ramifications veineuses, suites des précédentes, et qui se ramifient sur le second placenta.

f, f, f, circonférence de ce second placenta, où viennent se rendre les membranes.

Pl. 10.

Fœtus du Semnopithecus mitratus.

a, a, a, cordon ombilical.

b, b, b, division du cordon ombilical sur le premier placenta.

c, c, c, branches vasculaires se rendant au deuxième placenta.

c′, c′, c′, vaisseaux se ramifiant sur le second placenta.

d, d, d, e premier placenta.

Pl. 11 et 12.

Singes allaitant leurs petits.

Fig. 1re. Papion allaitant son petit.

Fig. 2. Le même animal remplissant les mêmes fonctions.

Fig. 3. Papion allaitant son petit.

Fig. 4 et 5. Jeune Callitriche allaité par sa mère.

Pl. 13 et 14.

Ces planches représentent deux figures de squelettes de fœtus humain d'âge différent, et un squelette de fœtus de singe (*Sim. sabœa*). C'est pour comparer ces squelettes les uns aux autres, et, par

cette comparaison, en faire sortir les analogies et les différences, que ces planches ont été composées.

Fig. 1re. Squelette de fœtus humain. On voit le corps des vertèbres présenter au centre un point d'ossification très-peu volumineux. Chaque vertèbre reçoit en arrière l'extrémité des côtes pour s'articuler avec les parties latérales des vertèbres. En avant, les points osseux centraux qui sont sur les vertèbres cervicales, sont très-petits, mais les pièces latérales sont beaucoup plus développées dans la région cervicale. L'os iliaque est très-développé et plus osseux dans sa partie supérieure, excepté vers les bords, que dans le reste de son étendue ; le pubis et l'ischion sont entièrement cartilagineux. La ligne supérieure du pubis correspond vers la partie inférieure de la région sacrée et vers le coccyx.

La tête : la mâchoire inférieure est formée de deux pièces dont les branches sont très-obliques sur le corps de l'os; cet os est constitué par deux portions qui s'unissent vers le menton.

L'os maxillaire supérieur, très-développé, présente ses articulations avec l'os du côté opposé, avec l'os malaire et le frontal; et son articulation avec le maxillaire supérieur paraît se faire dans une étendue plus grande qu'il ne le semble. La clavicule est grande et forte, ossifiée dans toute son étendue; l'épaule, composée de l'omoplate et de la clavicule, ne peut pas cependant servir beaucoup au bras, parce que ces os ne s'articulent encore que par des cartilages. L'humérus, le cubitus et le radius ne sont véritablement osseux qu'à leur partie moyenne. Leurs extrémités supérieure et inférieure sont cartilagineuses. Les doigts se composent tous, les pouces exceptés, de trois portions osseuses, et entre l'extrémité de chaque phalange on voit les bouts de ces os encore cartilagineux. Les cinq métacarpes présentent cinq petits os dont les extrémités sont cartilagineuses.

La tête, représentée sur le côté gauche *a*, n'offre rien de particulier qui puisse nous intéresser.

La même tête, vue par sa face inférieure, *b*, n'a non plus rien qui puisse nous arrêter.

Fig. 2. Le même fœtus humain vu par sa face postérieure.

La colonne vertébrale, vue en arrière, n'offre, dans aucun point, d'apophyses épineuses; sur les côtés on ne voit pas d'apophyses ou de saillies pour constituer les éminences transversales. L'os coxal est encore, dans la portion qui forme les fosses iliaques, la seule partie osseuse. La partie antérieure, ainsi que les autres portions du pubis, de l'ischion, le sacrum et le coccyx, sont entièrement cartilagineux.

Fig. 3. Squelette humain, plus âgé que le précédent. La face antérieure présente, dans la colonne vertébrale, des points d'ossification; dans la région cervicale, sur la ligne médiane, deux petits noyaux osseux placés à côté l'un de l'autre, et dans la région dorsale et lombaire, les deux noyaux latéraux osseux sont confondus en une seule masse. Sur les côtés de la tige vertébrale, principalement dans la région cervicale, on voit les pièces osseuses latérales très-développées.

Les os coxaux sont ossifiés, excepté vers leur bord supérieur. Une dernière pièce osseuse existe en avant, au-dessus de l'apophyse de l'ischion. Si ce n'est le volume, je ne vois pas de différence sensible dans l'ensemble des membres inférieurs de ce sujet et les membres du sujet précédent.

Les membres thoraciques n'ont aussi aucun nouvel organe d'ossifié; les os fémur à leur extrémité sont encore cartilagineux; mais le corps de l'os est plus gros et plus grand, et les cartilages qui garnissent leurs extrémités ont commencé à avoir les éléments des condyles. Il en est de même pour le tibia; le tarse reste encore cartilagineux, et le métatarse et les phalanges offrent leur partie

moyenne à l'état osseux. J'en dirai autant pour les membres thoraciques.

Le sternum n'a encore aucun point d'ossification.

On voit aussi les cartilages des articulations des membres thoraciques se prononcer davantage, et les formes des extrémités des os paraître dans l'épaisseur des articulations encore cartilagineuses. Les articulations carpiennes et métacarpiennes, ainsi que celles des phalanges, laissent voir des espaces remplis par des cartilages, dans l'épaisseur desquels naîtront les extrémités articulaires des os. Le sternum n'offre pas encore de point d'ossification.

d, la tête présente son côté gauche, *a;* les os de la pommette sont grands, et vont s'articuler avec l'apophyse externe du frontal. Plus profondément on aperçoit l'apophyse du sphénoïde, et comme dans le fœtus du n° 1, le cercle tympanal de l'oreille se rapproche de la ligne horizontale.

La tête *e* montre la face inférieure des os du crâne.

Fig. 4. Le même squelette vu par sa face postérieure.

La colonne rachidienne, examinée sur sa partie moyenne, montre que sur la ligne centrale il n'y a pas encore de portion osseuse.

Les lames latérales du rachis sont beaucoup plus étendues, et cependant il existe encore un espace membraneux au centre du rachis. Le bassin présente, dans la région ischiatique, deux noyaux osseux inférieurs ; et dans la poche fémoro-tibiale on aperçoit, en haut, deux éminences arrondies qui indiquent qu'elles sont destinées à former la partie inférieure du fémur, et au-dessous, deux couches cartilagineuses et osseuses indiquant que celles-ci formeront la partie supérieure du tibia.

Les omoplates sont très-développées; une bande cartilagineuse règne cependant encore sur le bord interne ; l'acromion

paraît osseux jusqu'à son sommet, mais l'articulation est encore cartilagineuse.

Fig. 5. Le squelette du fœtus du singe callitriche (*Simia sabæa*).

La colonne vertébrale présente deux petits noyaux osseux. Les pièces du sacrum offrent la même disposition. Dans la région cervicale on aperçoit, outre les points centraux, des lames latérales, et sur le bassin, en arrière, le sacrum a deux points osseux, sans aucune autre trace d'ossification. Les vertèbres de la queue présentent une succession décroissante de vingt petits os. Le bassin offre en haut deux petits os allongés, surmontés d'une portion quadrilatère cartilagineuse, représentant l'os coxal. Les pièces du pubis sont entourées d'un petit cercle osseux; mais en arrière les pièces sont entièrement cartilagineuses. Le thorax, formé par le sternum en avant, est entièrement cartilagineux. Les clavicules recourbées sont entièrement osseuses et les extrémités des os du bras et de l'avant-bras sont en grande partie osseuses, mais forment une épiphyse. Il en est de même des os de l'avant-bras qui sont entièrement épiphysaires. Le carpe est aussi cartilagineux, mais le métacarpe et les phalanges sont formés de petits os dont les extrémités ne sont point osseuses.

Fig. 6. La face postérieure de ce squelette de singe présente une ouverture longitudinale sur la partie médiane du rachis formé par l'absence de l'apophyse épineuse et par les deux lames qui la constituent.

Les os des membres ont des courbures qu'on n'aperçoit que chez l'homme adulte. Les extrémités des os longs ont donc partout la courbure qu'ils doivent avoir, bien que leurs extrémités soient encore cartilagineuses.

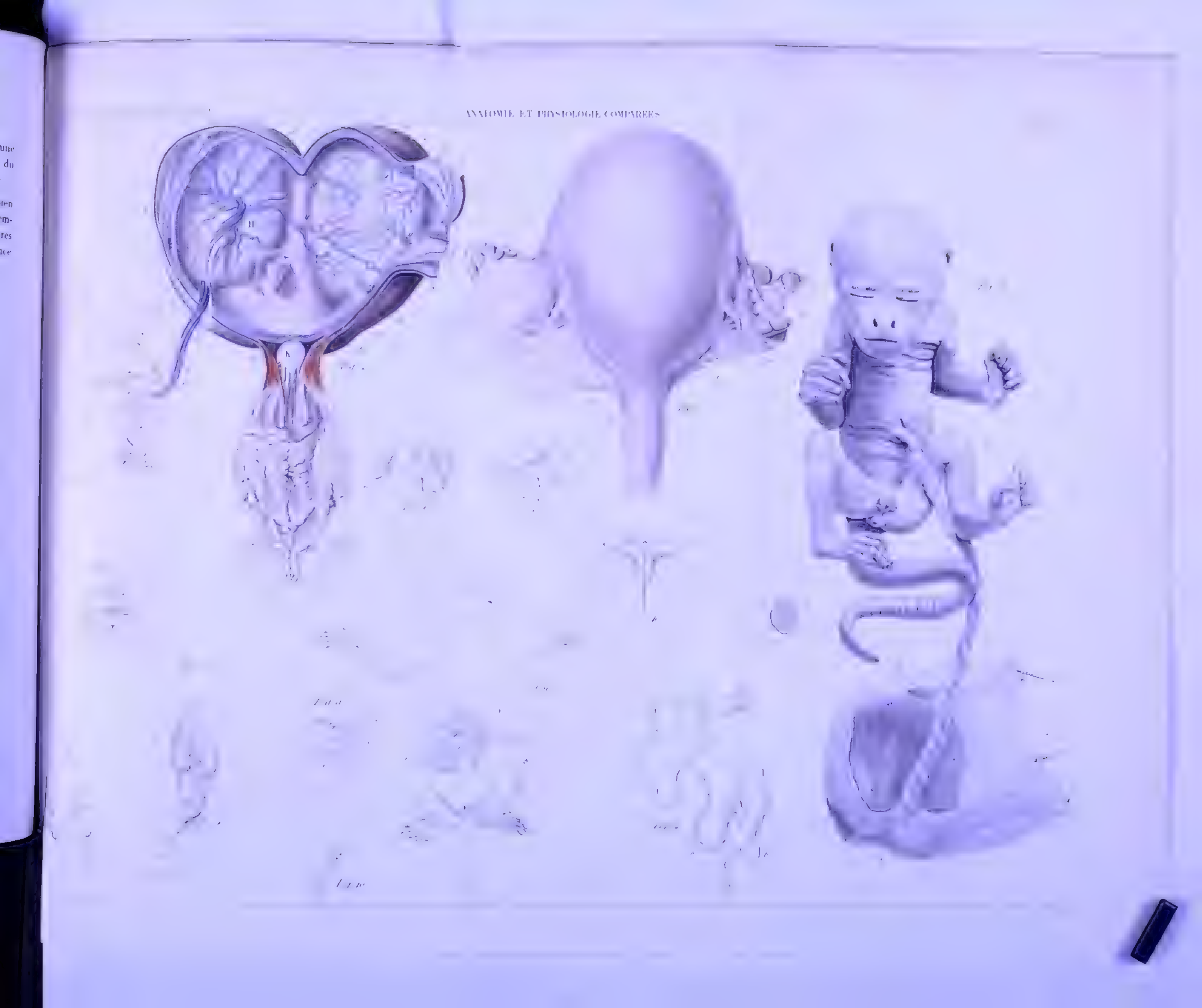
Fig. *g*. Les deux têtes qui sont entre ces deux petits squelettes présentent, l'une le côté gauche *f*, l'autre la face inférieure de la tête *g*. Nous ferons remarquer que la mâchoire inférieure, vers sa

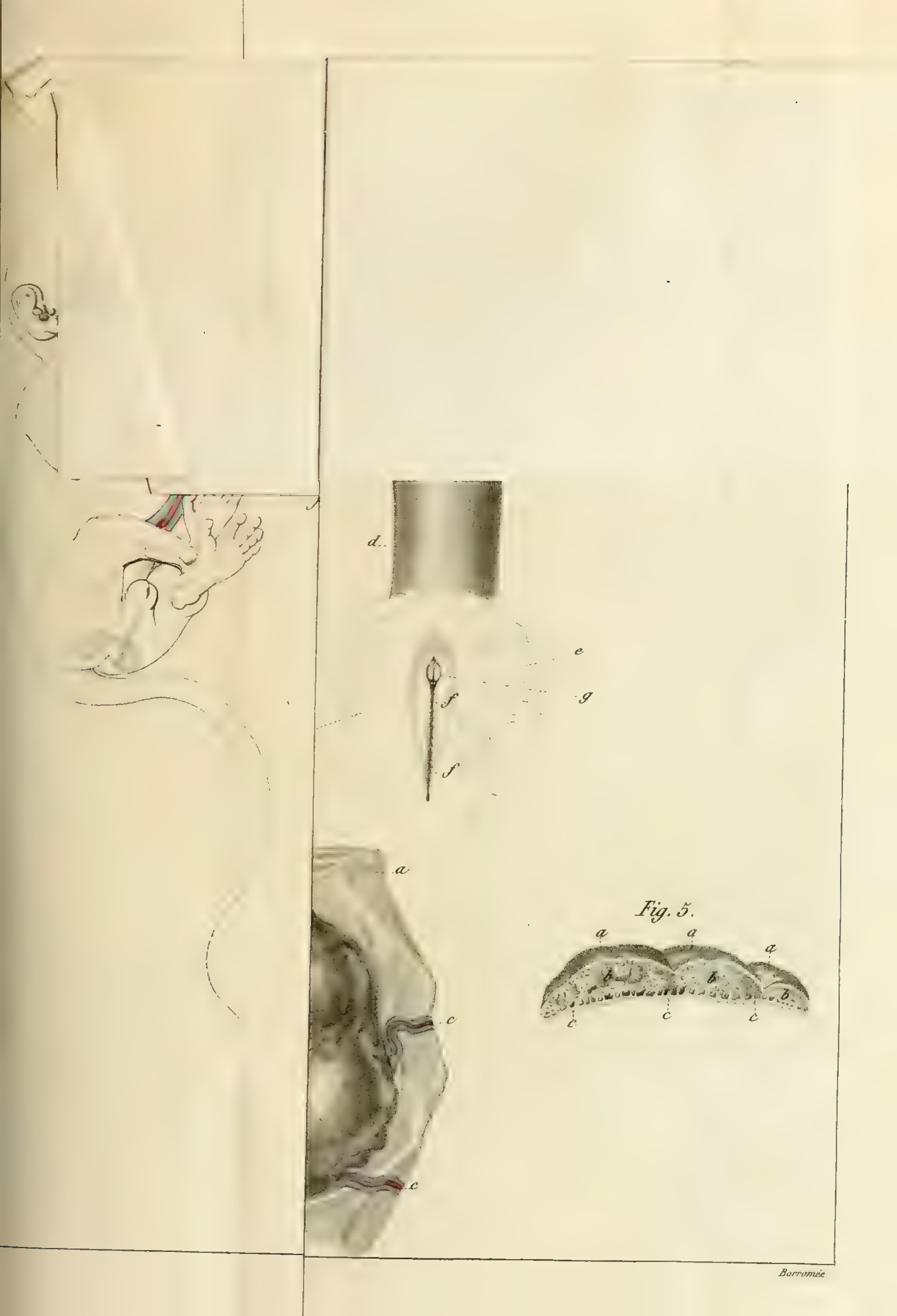
partie médiane, a une suture, et que dans cette partie, l'os a une hauteur plus grande que sur les parties latérales. L'ouverture du tympan est triangulaire, et occupe la face inférieure de la tête.

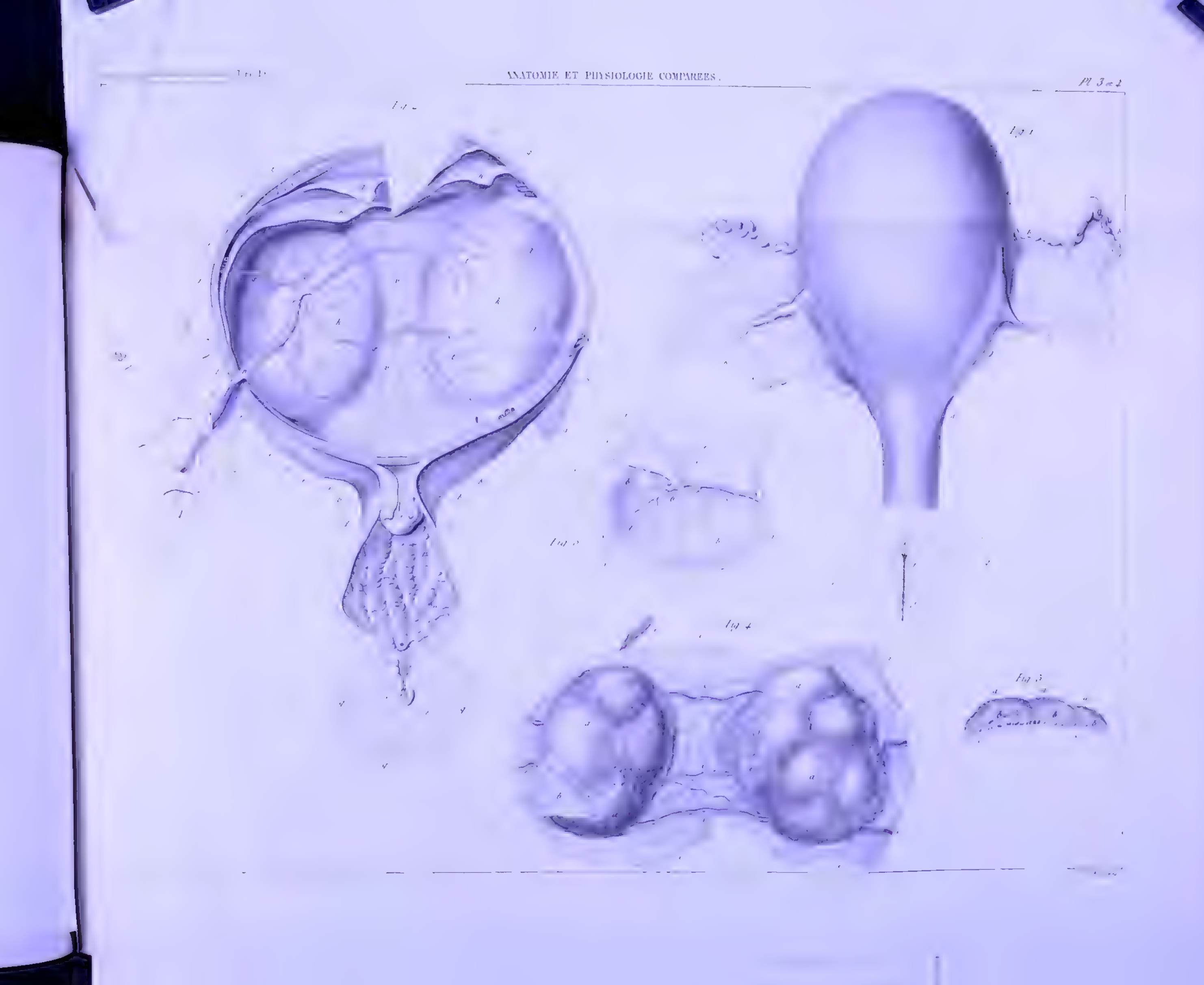
Fig, *h*. La partie inférieure des membres abdominaux ressemble bien plutôt à la terminaison des membres supérieurs qu'à celle des membres inférieurs. Le pouce, ou gros orteil, est séparé des autres os, il est beaucoup plus court, et a bien plus de ressemblance avec un pouce qu'avec un gros orteil.

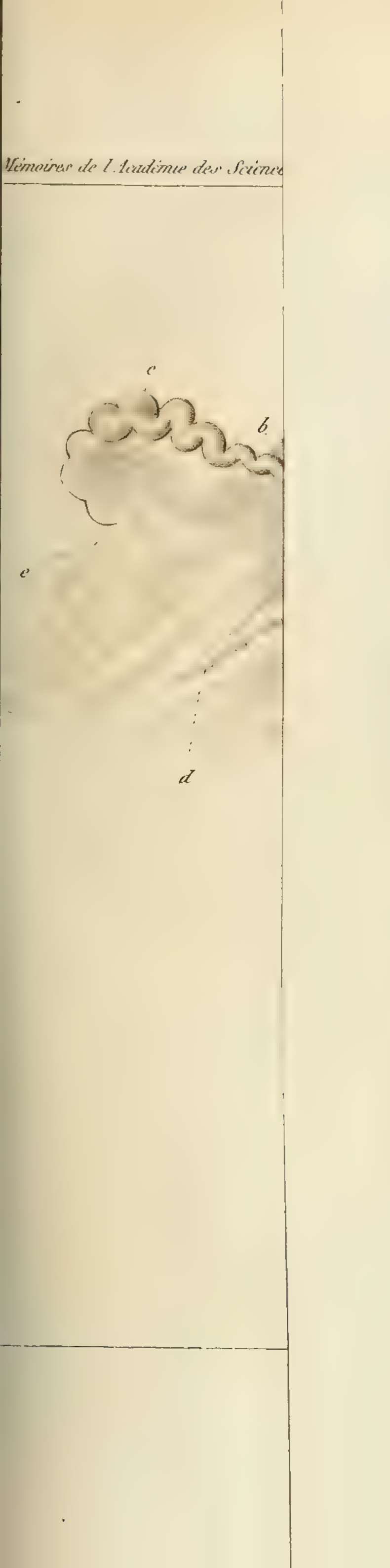


c
o
a
b'
c
d
c
g
b'
b
g
a
Fig. 13.
a
...4.
Fig. 5.
a
b
b
c
c
b
a
b
a
Fig. 14.
a
b

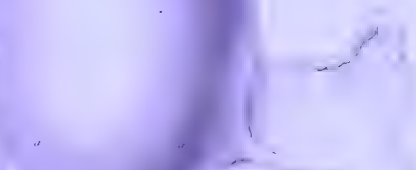


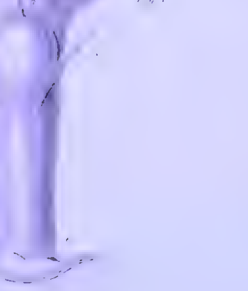

d
e
g
f
f
a
c
c
Fig. 5.
a
a
a
b
b
b
c
c
c
Borromée




Mémoires de l'Académie des Science
c
b
e
d



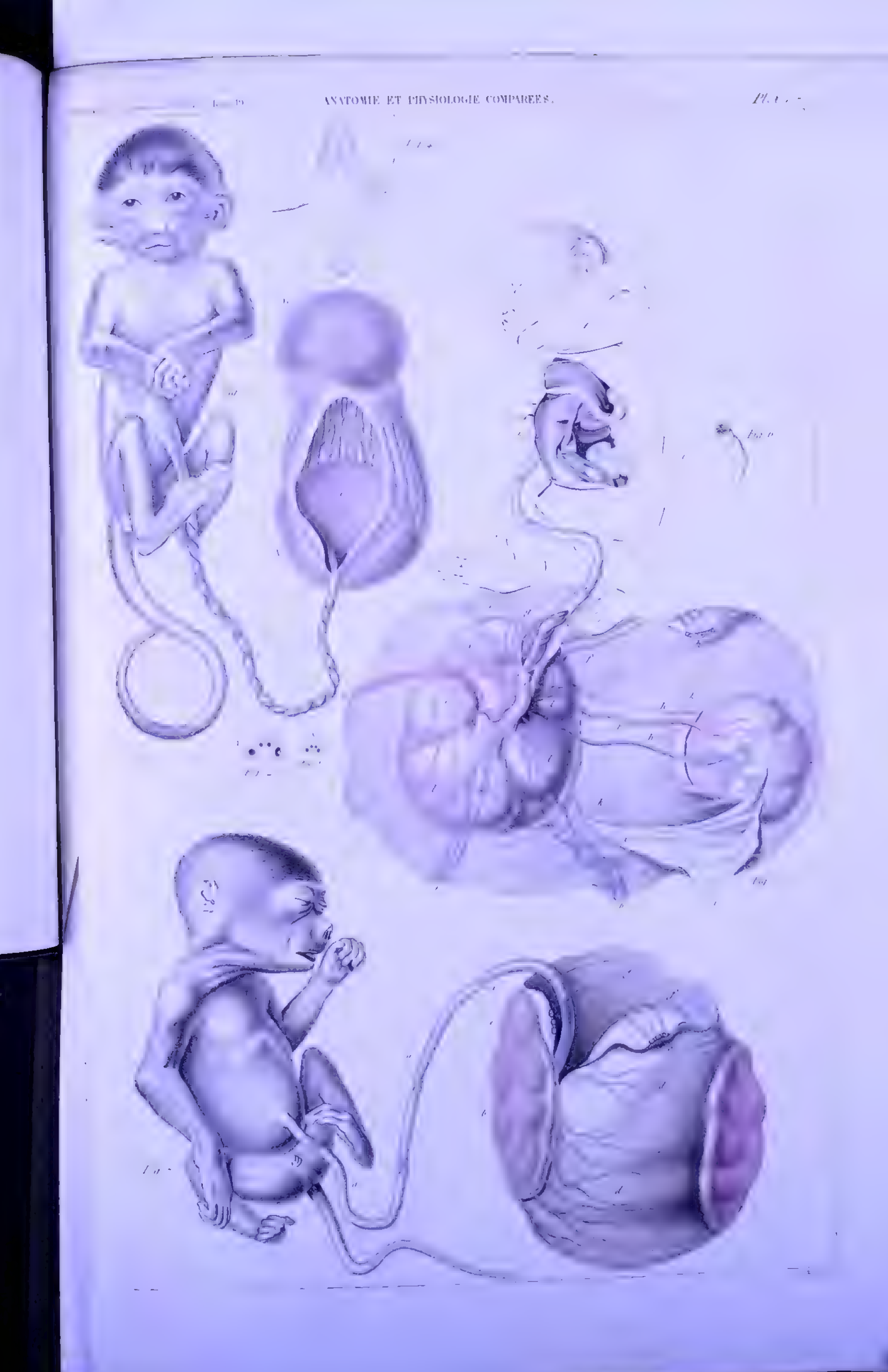






...pewin fecit Nov. 1837 et 21 Mai 1838.

Fig. 1. SEMN...



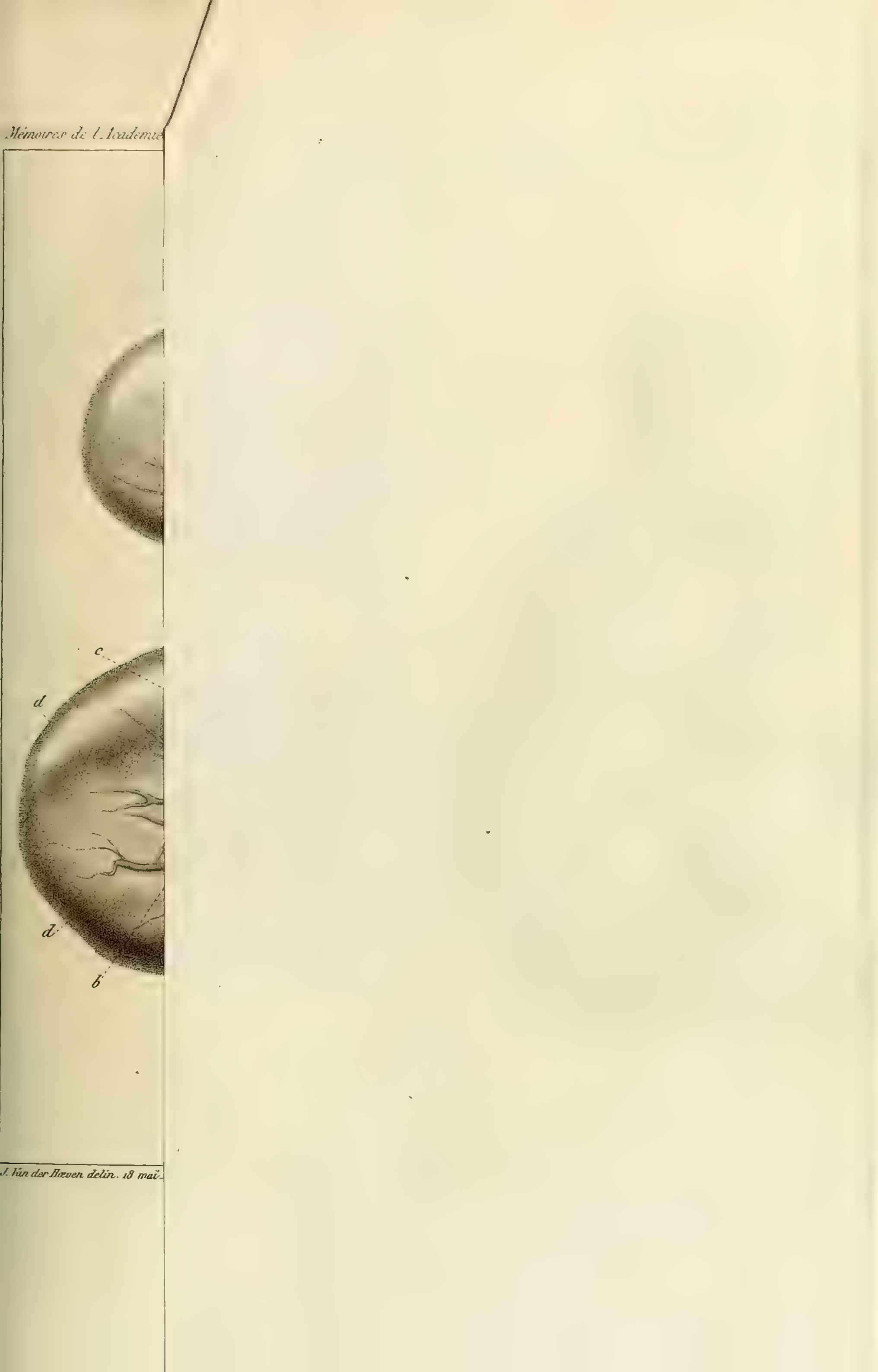


...oeven fecit Nov 183? et 21 Mai 1838.

Fig. 1. SEMN



Fig. 1. SEMNOPITHECUS HILOBATES (Gibbon?) Fig. 2. SEMNOPITHECUS NASICUS, SIMIA NASICA


Mémoires de l'Académie
c
d
d
b
J. Van der Hoeven delin. 18 mai



SEMNOPITHECUS MITRATUS


Fig. 1.



Fig. 1. PAPION allaitant son petit. Fig. 2. Le même amoral. Fig. 3. PAPION allaitant son petit.

Fig. 4 et 5. JEUNE CALLITRICHE allaité par sa mère.

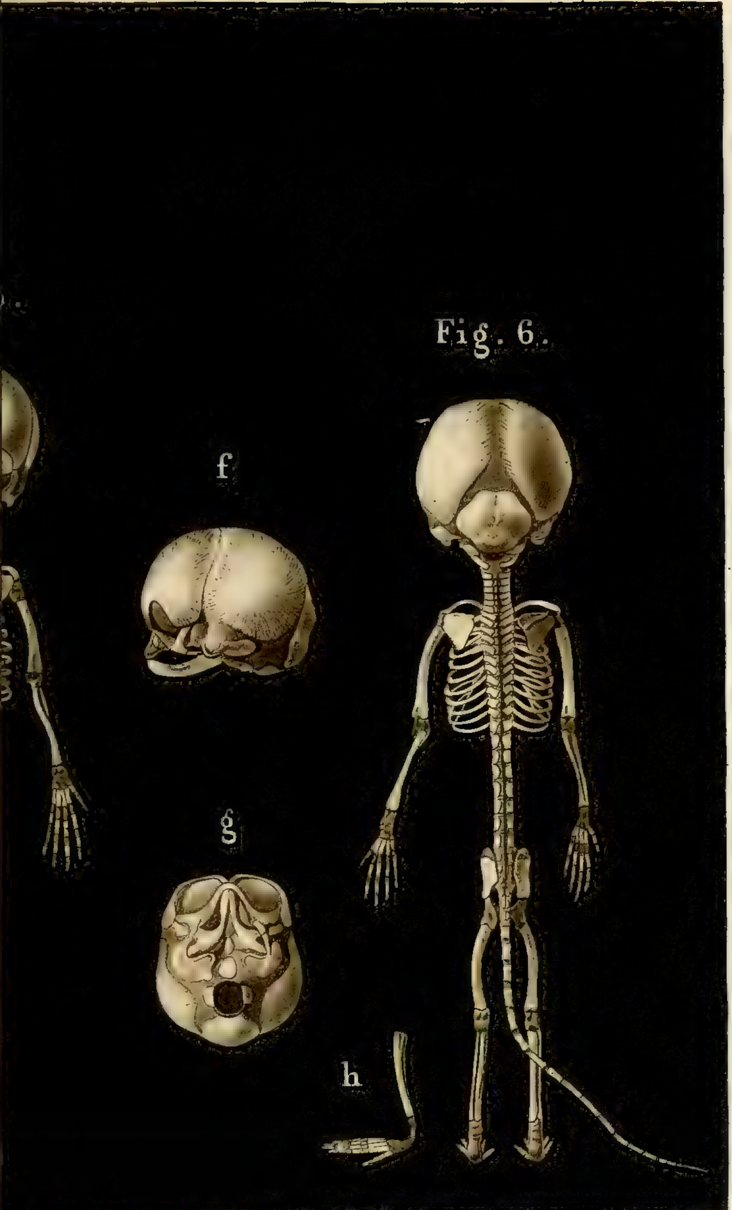

Fig. 6.
f
g
h
Borromée.


Fig. 1.
a
b
Fig. 2.
Fig. 3.
c
d
e
Fig. 4.
Fig. 5.
f
g
Fig. 6.
h

RECHERCHES CHIMIQUES

SUR LA TEINTURE.

Par M. CHEVREUL.

SIXIÈME MÉMOIRE.

DE PLUSIEURS CHANGEMENTS DE COULEUR QU'ÉPROUVE LE BLEU DE PRUSSE, FIXÉ SUR LES ÉTOFFES, ET APPENDICE A CE MÉMOIRE, CONTENANT QUELQUES CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET INDUCTIONS RELATIVES A LA MATIÈRE DES ÊTRES ORGANISÉS VIVANTS.

Lu à l'Académie des sciences le 7 août 1837.

1. L'art de la teinture doit à la chimie moderne un corps colorant, le bleu de Prusse, qui peut remplacer l'indigotine avec avantage dans plusieurs cas. Ce corps est non-seulement important à étudier sous le point de vue de son application, mais il l'est encore sous celui des changements qu'il présente dans un grand nombre de circonstances diverses,

une fois qu'il a été appliqué sur les étoffes. Ce sont ces changements que je me propose d'examiner dans ce mémoire, et si parmi eux il en est qu'on n'aperçoit que hors des ateliers de teinture, d'autres peuvent être observés dans ces ateliers mêmes, et, sous ce rapport, ils font partie de l'étude de l'histoire des procédés de l'art.

2. On observe surtout dans les circonstances suivantes les changements de couleur les plus remarquables du bleu de Prusse, appliqué sur les étoffes, et ici, je ne parlerai que de ceux qui n'ont point été expliqués.

1° Lorsqu'une étoffe teinte avec le bleu de Prusse est exposée dans le vide à la lumière.

2° Lorsque l'étoffe qui a perdu sa couleur bleue par cette exposition, la reprend dans l'atmosphère.

3° Lorsque l'étoffe teinte avec le bleu de Prusse perd sa couleur bleue par son exposition dans le vide à une température convenable.

4° Lorsque l'étoffe qui a été ainsi décolorée redevient bleue dans l'atmosphère.

5° Lorsque l'étoffe teinte avec le bleu de Prusse pâlit sous l'influence du soleil au sein de l'air atmosphérique, et qu'elle reprend sa couleur primitive dans l'obscurité; phénomène remarqué par toutes les personnes qui ont fait un long usage d'étoffes de soie teintes avec cette matière colorante.

6° Lorsqu'une étoffe teinte avec le bleu de Prusse, plongée dans l'eau distillée non aérée, et l'eau distillée aérée, perd sa couleur bleue sous l'influence de la lumière du soleil.

7° Lorsqu'une étoffe teinte avec le bleu de Prusse perd sa couleur bleue dans l'eau bouillante.

8° Lorsqu'une étoffe teinte avec le bleu de Prusse perd sa couleur bleue par des macérations dans l'eau froide.

9° Lorsqu'une étoffe de soie teinte avec le bleu de Prusse et avivée au moyen de l'eau de Seine, d'après le procédé que j'ai décrit dans un mémoire lu à l'Académie, en 1826, se fonce par son exposition à l'atmosphère.

3. L'étude de ces changements me paraît d'autant plus digne d'intérêt, qu'ils se rapportent à une espèce de sel de nature dite inorganique, espèce qui, mieux connue dans sa composition élémentaire que ne le sont la plupart des matières colorantes des végétaux et des animaux, laisse cependant encore beaucoup de choses à désirer dans l'histoire de ses réactions chimiques, et même dans sa composition absolue (1). Au reste, il n'est pas jusqu'à l'indécision où

---

(1) J'appelle *composition élémentaire d'un corps* l'énoncé de ses éléments en poids, en équivalents, en volumes ou en atomes;

Compositions équivalentes, l'énoncé des différents composés qui peuvent résulter des proportions respectives des éléments du corps;

Composition absolue, l'énoncé qui indiquerait les proportions respectives des éléments, leur ordre de combinaison, et leur arrangement moléculaire.

Je repousse ;

1° L'expression de *formule brute* comme synonyme de *composition élémentaire;*

2° L'expression de *formule rationnelle*, comme synonyme de l'expres-

l'on peut être sur plusieurs points de son histoire, qu'il ne soit important de constater, pour donner aux personnes qui ne se sont pas occupées spécialement de teinture, une idée juste de ce qu'il importe de savoir, quand il s'agit d'établir une théorie ou un système de principes propres à expliquer les faits de la pratique de cet art.

4. Avant d'exposer les recherches qui me sont propres, je dois dire que, conformément aux idées reçues, je considère le bleu de Prusse fixé sur des étoffes qui ont été d'abord unies à du peroxyde de fer, puis mises en contact avec du cyanoferrite de cyanure de potassium (*prussiate jaune de potasse*) acidulé, comme représenté par

$$4({}^{3}\mathrm{Cy}\,\mathrm{F}e) + 3({}^{2}\mathrm{Cy}\,\mathrm{F}e) + \dot{\mathrm{H}}\mathrm{H} \text{ (quantité indéterminée),}$$

parce que cette composition correspond à celle du précipite bleu que l'on obtient de la réaction du cyanoferrite de cyanure de potassium sur le sulfate de peroxyde de fer; mais je préviens que je n'ai fait aucune recherche directe pour m'assurer de cette composition qui est généralement admise.

---

sion de *composition équivalente*, que j'ai proposée il y a plus de vingt ans, par les raisons suivantes :

1° La détermination exacte de la *composition élémentaire* d'un composé quelconque, ne peut être qualifiée du mot *brute*, qui tend à rabaisser la chose à laquelle on l'applique ;

2° Si l'expression de *formule rationnelle* signifie quelque chose, c'est l'emploi qu'on en fera comme synonyme de *composition absolue;* car il n'y a rien qui justifie le sens du mot *rationnel* appliqué à une des *compositions équivalentes* d'un corps donné, si l'on ne démontre pas que cette composition équivalente à une composition élémentaire est l'expression de la composition absolue de ce même corps.

§ Ier.

De la décoloration dans le vide, sous l'influence de la lumière solaire, du bleu de Prusse fixé sur les étoffes.

5. J'ai fait voir, dans le quatrième mémoire de mes recherches chimiques sur la teinture, 1° que le bleu de Prusse fixé sur le coton, la soie et la laine, se décolore sous l'influence de la lumière solaire, dans le vide séché par le chlorure de calcium.

2° Que la décoloration est plus rapide dans le vide humide que dans le vide sec, et que si l'exposition est prolongée deux ans, par exemple, on remarque, dès le second mois, un dépôt de matière d'un brun roux sur les étoffes et sur les parois du flacon, qui sont humides; tandis qu'aucun dépôt semblable ne se manifeste dans le flacon où le vide est maintenu sec, au moyen du chlorure de calcium.

Avant d'aller plus loin, il faut remarquer qu'une même étoffe de coton ou de soie, dont toutes les parties ont été également exposées à la lumière, peut donner lieu, à partir de la limite où elle vient de perdre sa couleur bleue, à deux résultats distincts, suivant qu'on arrête l'exposition à cette limite, ou qu'on la prolonge au delà de un an, dix-huit mois, deux ans.....

PREMIER RÉSULTAT.

A un œil peu habitué à juger des couleurs, une étoffe dont le ton bleu ne dépassait pas le n° 19 d'une gamme de 33 tons, peut paraître blanche; mais en la comparant à une étoffe

blanche, elle présente une nuance de nankin plus ou moins jaune, plus ou moins grise.

Il est possible même qu'il y ait encore une petite quantité de bleu non apparent , neutralisé qu'il est par du jaune orangé, conformément au principe du mélange des couleurs complémentaires.

Si l'étoffe avait un ton bleu foncé, la couleur nankin serait sensible, sans qu'il fût nécessaire d'y juxtaposer du blanc.

DEUXIÈME RÉSULTAT.

Si l'étoffe ne dépassait pas le ton 19, la couleur n'a plus la nuance nankin; elle est grise, comme si elle eût été teinte légèrement avec du peroxyde de manganèse.

Si l'étoffe était au ton 27, la ressemblance de sa couleur avec celle du peroxyde de manganèse, serait frappante, et alors le ton de l'étoffe décolorée serait le 19e environ, après une exposition de quatre ans et demi.

Il est entendu que je ne parle ici que du cas où l'étoffe exposée dans un flacon à recevoir l'influence du soleil ne touche pas le verre. Car il pourrait arriver alors que l'alcali du verre agît sur le bleu de Prusse, si le verre était avec excès de base.

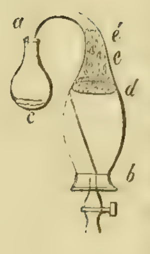
6. La décoloration du bleu de Prusse étant plus rapide dans le vide humide que dans le vide sec, je n'ai pas cru devoir attribuer le phénomène à une déshydratation. C'est ce qui m'a tout d'abord suggéré l'idée qu'il pourrait dépendre d'une separation de cyanogène, de manière que le percyanure du bleu de Prusse serait ramené à l'état de protocyanure sous l'influence de la lumière solaire, parce qu'il pourrait arriver que, dans le

vide sec, sous cette influence, l'existence du percyanure de fer ne fût pas plus possible que l'existence du peroxyde de mercure n'est compatible avec une température de 600^{d}. (Introduction aux 3e, 4e, 5e mémoires de ces recherches (6).) Mais le protocyanure de fer est-il jaune, brun ou incolore? C'est ce que je ne déciderai pas dans l'état actuel de la science. Quoi qu'il en soit, les sels de protoxyde de fer donnent un précipité jaune avec le cyanure de potassium, tandis qu'ils en donnent un blanc avec le cyanoferrite de cyanure de potassium (prussiate jaune de potasse). Robiquet considérait ce dernier précipité comme un composé de protocyanure de fer et de cyanoferrite de cyanure de potassium.

7. Je soumis cette conjecture à l'expérience suivante : je mis 2 grammes de potasse hydratée dans un petit tube de verre courbé fermé à un bout; l'ouverture fut garnie de plusieurs doubles de tulle, afin d'empêcher que des corps solides pussent y pénétrer. Le tube ainsi disposé fut fixé au moyen d'un fil de laiton à un bouchon armé d'un robinet pneumatique, qui s'adaptait à un flacon contenant des étoffes teintes au bleu de Prusse. Le bouchon était revêtu de caoutchouc. Le flacon ayant été vidé d'air, à l'aide de la machine pneumatique, fut exposé au soleil. Au bout d'un an les étoffes étaient décolorées. A cette époque, le petit tube contenant la potasse, ayant été retiré du flacon et *parfaitement essuyé extérieurement,* on ôta le tulle (1) et on

(1) Lorsque la potasse se liquéfie et cristallise ensuite, elle peut s'élever par capillarité de l'intérieur du tube jusqu'au tulle, et dans ce cas il se produit un cyanure de potassium qui adhère au tissu, et diminue d'autant la quantité du cyanure de l'intérieur du tube.

fit dissoudre la potasse dans l'eau. La solution fut mêlée avec du sulfate de protoxyde de fer, de manière à laisser prédominer l'alcali. Après un contact de 24 heures, je versai de l'acide hydrochlorique faible, afin de redissoudre le protoxyde et le peroxyde de fer précipités. Il fallut 24 heures pour que tout le peroxyde disparût; mais alors *j'observai du bleu de Prusse en flocons bleus au fond du verre, tandis que dans une expérience faite comparativement avec des quantités égales de la même potasse, du même sel de fer et du même acide hydrochlorique employés dans l'expérience précédente, je n'obtins pas de bleu de Prusse.* Enfin, je répétai l'expérience avec le même résultat de la manière suivante :



Au moyen d'un bouchon maintenu par du caoutchouc, j'adaptai à une allonge dont l'extrémité *a* avait été courbée à la lampe, un petit ballon *c* renfermant 2 grammes de potasse à l'alcool. J'introduisis des bouchons de papier *e é*, puis un bouchon de liége *d* percé de trous dans l'allonge, de manière que les bouchons de papier posaient sur le liége. Cette disposition avait pour objet d'empêcher qu'en rendant l'air à l'allonge, le vent n'entraînât du bleu de Prusse dans la potasse. J'introduisis une plaque de porcelaine, sur laquelle une pâte de bleu de Prusse avait été étendue et séchée dans l'allonge; après quoi, je la fermai avec un bouchon de liége *b* conique, auquel on avait laissé un rebord pour que la pression de l'air ne l'enfonçât pas dans l'intérieur du vaisseau. Au bouchon *b* était adapté un robinet pneumatique. L'allonge fut ensuite vidée d'air, puis exposée au soleil. Au bout d'un an on trouva du cyanogène dans la potasse en quantité considérable, relativement à celle qu'on obtient d'une étoffe teinte en bleu de Prusse au 23[e] ton. Et j'ajoute que, pour

empêcher l'insufflation de l'air dans l'intérieur, on avait détaché le ballon *b* de l'allonge, sans ouvrir le robinet. Mais la matière soumise à la lumière était loin d'avoir perdu toute sa couleur bleue; je reviendrai sur ce résultat à la fin du mémoire (73). Il est hors de doute que *sous l'influence du soleil dans le vide sec, le bleu de Prusse fixé sur une étoffe, en se décolorant perd du cyanogène ou de l'acide hydrocyanique.*

8. Nous sommes en mesure d'expliquer l'origine du dépôt d'un brun roux, qui se produit dans le vide humide. Il est clair, d'après ce qu'on sait de l'altération du cyanogène gazeux humide ou de l'acide hydrocyanique, que le cyanogène ou l'acide hydrocyanique séparé du bleu de Prusse, sous l'influence de la lumière, donne ensuite, par le contact de l'eau, le dépôt signalé plus haut (5-2°), dans l'expérience où du bleu de Prusse a été exposé comparativement au vide sec d'une part, et au vide humide d'une autre part.

§ II.

De la recoloration, par l'atmosphère, du bleu de Prusse fixé sur les étoffes, qui a perdu sa couleur bleue dans le vide, sous l'influence de la lumière solaire.

9. Le bleu de Prusse appliqué sur les étoffes, qui est devenu dans le vide, sous l'influence de la lumière, d'un gris nankin ou brun, redevient bleu par son exposition à l'air, et la couleur est, sur le coton et la soie surtout, plus intense, plus violette qu'elle n'était auparavant, ainsi qu'on peut s'en convaincre, en comparant les étoffes recolorées avec leurs normes respectifs. Il s'agit de démontrer que c'est le gaz

oxygène de l'atmosphère qui fait reparaître la couleur bleue sur les étoffes décolorées.

10. On prend deux flacons semblables, dans lesquels des étoffes ont été décolorées par la lumière dans le vide, séché par le chlorure de calcium ; on les adapte, au moyen de leurs robinets, l'un à une cloche à robinet, posée sur le mercure, pleine de gaz acide carbonique pur, et séché par le chlorure de calcium, l'autre à une cloche semblable, pleine de gaz oxygène pur et séché pareillement par le chlorure de calcium. Le canal qui sépare les deux robinets dans chaque appareil, doit avoir été préalablement rempli de mercure. Après ces dispositions, on ouvre avec précaution les robinets, afin d'introduire les gaz dans les flacons.

Les étoffes qui ont le contact du gaz acide carbonique n'éprouvent aucune recoloration, même au bout de dix jours.

Les étoffes qui ont le contact du gaz oxygène se recolorent au contraire assez rapidement.

11. Voici la marche de la recoloration d'une étoffe de soie, qui, avant l'exposition au soleil, était au ton 19 d'une gamme de 33 tons.

Après	1 minute de contact avec l'oxygène,				coloration en bleu sensible.			
—	5 minutes	—	—	—	coloration correspondante au ton 6.			
—	5 heures	—	—	—	la coloration qui avait été graduellement croissante en bleu violet, était parvenue au ton 17,5.			
—	12 heures	—	—	—	coloration correspondante au ton 18,5.			
—	24 heures	—	—	—	—	—	—	19,5.
—	48 heures	—	—	—	—	—	—	20,5.
—	120 heures	—	—	—	—	—	—	20,5.

La soie avait donc gagné 1 $\frac{1}{2}$ ton; elle était plus violette que le norme.

Dans les mêmes circonstances, le coton n'avait gagné que $\frac{1}{2}$ ton, et la laine 1 ton.

L'expérience est la même, en employant le gaz oxygène qui a séjourné pendant huit jours avec de l'acide sulfurique concentré, et une étoffe de bleu de Prusse qui a été décolorée dans le vide séché par l'hydrate de potasse.

12. Si on extrait le gaz acide carbonique sec du flacon contenant les étoffes qui ne se sont pas recolorées, et qu'on le remplace par du gaz oxygène pur et séché par le chlorure de calcium, les phénomènes de recoloration se reproduisent alors progressivement, comme je viens de le dire.

La recoloration m'a paru plus rapide avec le gaz oxygène humide qu'avec le gaz oxygène séché par le chlorure de calcium.

13. Les étoffes décolorées dans le vide ne se recolorent pas dans l'eau privée d'air, comme elles le font dans l'eau qui est en contact avec le gaz oxygène. Les expériences suivantes démontrent cette proposition.

On fait bouillir de l'eau dans deux ballons pendant $\frac{1}{2}$ heure, on les retire du feu, et on remplit exactement l'un d'eux, en y versant de l'eau de l'autre ballon, puis on applique promptement un obturateur de verre sur l'orifice du premier, de manière à en exclure tout l'air, et on le renverse aussitôt dans une cuve à mercure; on ôte l'obturateur, et on fait passer un même volume d'eau dans deux cloches remplies de mercure. Lorsque l'eau est refroidie, on fait passer rapidement un morceau de toile de coton décolorée dans chaque cloche, et dans l'une d'elles seulement, un volume de gaz oxygène égal à celui de l'eau. Après cela, au moyen d'une tige de platine introduite dans chaque cloche, on élève les morceaux de toile de manière à les mettre hors du contact

du mercure. *Au bout de 24 heures, la toile qui a le contact de l'eau et de l'oxygène est seule colorée.*

On peut opérer encore de cette autre manière, lorsqu'on ne veut pas ou qu'on ne peut se servir d'une cuve à mercure :

On fait bouillir de l'eau dans deux ballons égaux, et dans un troisième, pendant $\frac{1}{4}$ heure; on les retire du feu ; avec le troisième on remplit les deux premiers, jusqu'à 1 centimètre au-dessus de la naissance du col, puis on plonge dans chacun une même quantité d'étoffe décolorée, et on verse de l'huile dans un des ballons seulement, afin d'intercepter le contact de l'air. Au bout de 24 heures, l'étoffe de ce ballon ne s'est pas recolorée, tandis que l'autre étoffe plongée dans l'eau, qui a pu absorber de l'oxygène atmosphérique, est redevenue bleue. J'ai remarqué que l'eau surnageant l'étoffe décolorée contenait un peu de cyanoferrite sensible au sulfate de peroxyde de fer, et que l'eau surnageant l'étoffe redevenue bleue acquérait, par le contact de l'air, une légère teinte jaune que n'avait pas la première, et donnait, par l'addition de sulfate de peroxyde de fer, plus de bleu de Prusse.

Si l'étoffe décolorée que l'on emploie à cette expérience n'avait pas reçu un ton suffisamment élevé de bleu de Prusse, il pourrait arriver que, dans la seconde manière d'opérer, la température de l'eau réduisît tout le fer du bleu de Prusse en peroxyde (37).

14. Comment expliquer la recoloration du bleu de Prusse? D'une manière fort simple, s'il était démontré :

1° Que le percyanure de fer ($^{3}Cy\ Fe$) constituant le bleu de Prusse perd, sous l'influence de la lumière dans le vide, le $\frac{1}{3}$ de son cyanogène (7).

2° Que l'oxygène de l'atmosphère, en se portant sur du protocyanure de fer, produit du peroxyde de fer ($\dddot{F}e\dot{F}e$), sans qu'il se dégage de cyanogène.

3° Que l'eau d'hydratation du bleu de Prusse n'a pas d'influence dans les phénomènes. En effet, le bleu de Prusse étant représenté par

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{4 atomes de percyanure de fer. . .} & = 4\,{}^{3}Cy\,Fe \\ \text{3 — protocyanure de fer. .} & = 3\,{}^{2}Cy\,Fe \\ \text{eau d'hydratation. . . . .} & = y \text{ aqua.} \end{array}\right.$$

chaque atome de bleu de Prusse fixé sur les étoffes, perdrait 4 atomes de cyanogène, provenant des 4 atomes de percyanure de fer, et il resterait sur les étoffes 7 atomes de protocyanure de fer.

Lorsque le protocyanure de fer repasserait au bleu sous l'influence de l'oxygène, il y aurait pour 9 atomes de protocyanure de fer, et 3 atomes d'oxygène, 1 atome de peroxyde de fer ($\dddot{F}eFe$), produit par l'union de 3 atomes d'oxygène avec 2 atomes de fer, tandis que les 4 atomes de cyanogène séparés du fer se concentreraient sur 4 atomes de protocyanure, lesquels en s'unissant avec les 3 atomes de protocyanure qui n'ont pas éprouvé de changement, formeraient un atome de bleu de Prusse. Voici l'équation :

$$3\,O + 9({}^{2}CyFe) + aq. = \dddot{F}eFe + [4({}^{3}CyFe) + 3({}^{2}CyFe) + aq.]$$

Conséquemment, pour 9 atomes de bleu de Prusse qui seraient réduits à 63 atomes de protocyanure de fer, il y aurait 14 atomes de protocyanure qui, en prenant 21 atomes d'oxygène à l'air, donneraient 7 atomes de peroxyde de fer, tandis que les 28 de cyanogène qu'ils abandonneraient, s'uni-

raient à 49 atomes de protocyanure pour constituer 7 atomes de bleu de Prusse.

15. S'il est démontré que *le bleu de Prusse, en se décolorant dans le vide lumineux, perd du cyanogène,* il ne l'est pas que *cette quantité soit $\frac{1}{3}$ de celle du percyanure de fer contenu dans le bleu de Prusse.*

S'il est démontré que *l'oxygène fait repasser le bleu de Prusse décoloré au bleu,* il ne l'est pas que ce soit *en formant du peroxyde de fer.*

Conséquemment, l'explication précédente (14) ayant besoin de preuves pour être définitivement admise, je vais rapporter des expériences et des observations que j'ai faites, dans l'intention d'éclairer la question.

16. J'ai cherché d'abord s'il était possible de démontrer qu'une étoffe teinte en bleu de Prusse, puis décolorée, absorbe un volume de gaz oxygène atmosphérique assez considérable pour qu'on soit en droit d'attribuer à cette absorption la recoloration du bleu de Prusse. J'opérai sur deux échantillons de calicot de même poids : l'un avait été teint en bleu de Prusse, l'autre ne l'avait pas été. Chacun fut mis dans un flacon dont on enleva l'air. Après deux ans d'exposition au soleil, toute couleur bleue ayant disparu, on adapta au robinet de chaque flacon un tube de verre ouvert aux deux bouts, de 1 mètre de longueur ; on rendit l'air, et aussitôt on plongea l'extrémité libre du tube dans un bain d'huile; celle-ci s'y éleva peu à peu, à cause de l'absorption de l'air intérieur. Mais on reconnut bientôt que cette absorption avait été produite principalement par l'étoffe agissant comme corps poreux, et par l'huile dont les bouchons étaient imprégnés ; celle-ci absorba de l'oxygène ;

dès lors il devint impossible de voir si la petite quantité de bleu de Prusse avait réellement absorbé de ce gaz, comme on avait voulu s'en assurer.

17. J'ai cherché ensuite s'il serait possible, en soumettant à plusieurs décolorations et recolorations successives, un même échantillon d'étoffe colorée en bleu de Prusse, de démontrer qu'il se forme des quantités de peroxyde de fer croissant sensiblement avec le nombre des recolorations. Je donne, en note, un tableau des quantités relatives de peroxyde de fer et de bleu de Prusse, qui se produiraient si l'hypothèse exposée plus haut, était complétement vraie (14) (*).

(*) Tableau des proportions de peroxyde de fer et du bleu de Prusse reproduit dans les recolorations du bleu de Prusse exposé successivement à la lumière dans le vide, et au contact de l'oxygène atmosphérique, en supposant que 9 atomes de protocyanure de fer, absorbant 3 atomes d'oxygène, produisent 1 atome de peroxyde de fer ($\dddot{Fe}Fe$) et 1 atome de bleu de Prusse $(4\,{}^3CyFe + 3\,{}^2CyFe + x\,aq.)$

On suppose que l'étoffe contient 36 atomes de bleu de Prusse :

	NOMBRE DES ATOMES de PEROXYDE DE FER, après chaque recoloration.	NOMBRE DES ATOMES de BLEU DE PRUSSE, régénéré après chaque recoloration.
Après la 1re décoloration et recoloration.	28 $\dddot{Fe}Fe$ +	28 $(4\,{}^3CyFe + 3\,{}^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 2e décoloration et recoloration.	49,78 $\dddot{Fe}Fe$ +	22,78 $(4\,{}^3CyFe + 3\,{}^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 3e décoloration et recoloration.	66,72 $\dddot{Fe}Fe$ +	16,94 $(4\,{}^3CyFe + 3\,{}^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 4e décoloration et recoloration.	79,90 $\dddot{Fe}Fe$ +	13,18 $(4\,{}^3CyFe + 3\,{}^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 5e décoloration et recoloration.	90,15 $\dddot{Fe}Fe$ +	10,25 $(4\,{}^3CyFe + 3\,{}^2CyFe + x\,aq.)$

PREMIÈRE DÉCOLORATION ET RECOLORATION.

A. Du coton, de la soie et de la laine au ton 19 d'une gamme de 33 tons, décolorés dans le vide lumineux, avaient ensuite gagné sur les normes, au bout d'un mois d'exposition à l'air :

Le coton.	$\frac{1}{2}$ ton...	Leur couleur était moins verdâtre que celle des normes; celle de la soie était même plus belle.
La soie...	1 ton $\frac{1}{2}$..	
La laine..	1 ton...	Sa couleur était moins brillante que celle du norme; elle était ternie par du roux.

	NOMBRE DES ATOMES de PEROXYDE DE FER, après chaque recoloration.	NOMBRE DES ATOMES de BLEU DE PRUSSE, régénéré après chaque recoloration.
Après la 6e décoloration et recoloration.	98,12 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	7,97 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 7e décoloration et recoloration.	104,32 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	6,20 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 8e décoloration et recoloration.	109,14 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	4,82 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 9e décoloration et recoloration.	112,89 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	3,75 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 10e décoloration et recoloration.	115,79 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	2,90 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 11e décoloration et recoloration.	118,04 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	2,25 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 12e décoloration et recoloration.	119,79 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	1,75 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 13e décoloration et recoloration.	121,15 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	1,36 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 14e décoloration et recoloration.	122,22 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	1,07 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$
Après la 15e décoloration et recoloration.	123,05 $\overset{\cdots}{Fe}Fe$ +	0,83 $(4^3CyFe + 3^2CyFe + x\,aq.)$

DEUXIÈME DÉCOLORATION ET RECOLORATION.

B. Les échantillons précédents A décolorés, puis recolorés, avaient gagné sur leurs normes respectifs, au bout d'un mois d'exposition à l'air :

Le coton 1 ton. . .	Sa couleur était plus ardoisée que celle du norme.
La soie.. 2 tons. .	Sa couleur moins belle que celle du norme.
La laine. 1 ton $\frac{1}{2}$.	Sa couleur notablement moins brillante.

TROISIÈME DÉCOLORATION ET RECOLORATION.

C. Les échantillons B décolorés et recolorés, ont présenté les résultats suivants :

Le coton était inférieur à son norme, tant par la hauteur du ton que par le brillant.

La soie était moins belle qu'après la seconde recoloration.

La laine avait augmenté de $\frac{1}{2}$ ton, mais elle était ternie en gris roux.

QUATRIÈME DÉCOLORATION ET RECOLORATION.

D. Le coton, la soie et la laine qui ont subi trois décolorations et recolorations, exposés une quatrième fois dans le vide, présentent les résultats suivants :

Le coton et la soie sont d'un gris jaune nankin.

La laine est d'un brun roux très-foncé relativement au gris jaune nankin du coton et de la soie.

Lorsqu'on introduit du gaz oxygène pur dans le flacon, le coton et la soie bleuissent presqu'au moment du contact ; la laine ne change pas.

64.

Après 5 minutes..	Le coton est au ton 5 d'une gamme de 33 tons, mais il est verdâtre.		
	La soie *id.*		
	La laine ne paraît pas changée.		
Après 15 minutes.	Le coton est au ton	16	mais il est toujours verdâtre.
	La soie *id.*	16	mais elle est toujours verdâtre.
	La laine *id.*	20 ½	d'un brun roux verdâtre.
Après 30 minutes.	Le coton est au ton	17 ½	moins verdâtre.
	La soie *id.*	17 ½	
	La laine *id.*	20 ½	d'un brun roux verdâtre.
Après 1 heure....	Le coton est au ton	18	encore verdâtres.
	La soie *id.*	18	
	La laine *id.*	20 ½	d'un brun roux verdâtre.
Après 20 heures..	Le coton est au ton	20	bleu ardoisé encore verdâtre.
	La soie *id.*	21	
	La laine *id.*	24	d'un brun roux bleuâtre.
Après 24 heures..	Le coton est au ton	21	bleu ardoisé encore verdâtre.
	La soie *id.*	22	
	La laine *id.*	25	d'un brun roux bleuâtre.

CINQUIÈME DÉCOLORATION ET RECOLORATION.

E. Le coton, la soie et la laine qui ont subi quatre décolorations et recolorations, exposés une cinquième fois dans le vide, comparativement avec des échantillons de coton et de soie au ton 19 de la gamme bleue de Prusse, qui n'avaient point encore été soumis à l'influence du soleil, ont présenté les résultats suivants ; je désignerai les trois premiers échantillons par la lettre A, et les deux derniers par la lettre B :

Après 40 jours d'exposition,

Les échantillons A avaient moins baissé que les échantillons B.

La soie B avait proportionnellement moins baissé que le coton B, parce que le bleu de Prusse est plus stable sur la soie que sur le coton.

Après 9 mois,

La soie et le coton A étaient encore bleus. La laine A était d'un ardoisé roux foncé.

Les échantillons B n'avaient plus ou presque plus de bleu.

Enfin, après 20 mois,

ÉCHANTILLONS A.

La laine était d'un gris roux très-foncé,
La soie d'un roux grisâtre,
Le coton d'un roux plus orangé que la soie.

ÉCHANTILLONS B.

La soie avait moins de roux que la soie A,
Le coton avait encore moins de roux que le coton A.

CONSÉQUENCE.

S'il y a eu réellement une différence entre les échantillons de coton et de soie A, et les échantillons B, cependant cette différence n'était point assez prononcée pour les distinguer nettement les uns des autres.

Le flacon a été adapté à un tube présentant une colonne de ponce, imprégnée d'acide sulfurique, d'un mètre de longueur; ce tube communiquait à volonté, au moyen d'un robinet, avec une cloche pleine de gaz oxygène. On pouvait faire le vide dans le tube. Après l'avoir fait, et constaté que le vide du flacon s'était parfaitement maintenu pendant toute la durée de l'exposition, on a mis le flacon en communication avec le tube à la ponce sulfurique pendant une $\frac{1}{2}$ heure,

puis on a laissé pénétrer de l'oxygène dans le flacon; les étoffes ont pris instantanément une couleur bleue sensible.

Après 10 minutes.	La soie B était arrivée au ton	14
	Le coton B *id.*	10
	Les échantillons A étaient plus bas.	

Après 30 minutes.	La soie B était au ton	18
	Le coton B *id.*	15
	La laine A n'avait pas, pour ainsi dire, de bleu.	
	La soie A était au ton	14
	Le coton A *id.*	14

Après 1 heure....	La soie B était au ton	18
	Le coton B *id.*	17
	La laine A était d'un ardoisé roux au ton	22
	La soie A était au ton	19
	Le coton A *id.*	19

Après 24 heures..	La soie B était au ton	20
	Le coton B *id.*	19,5
	La laine A à peine bleue était au ton	23
	La soie A était au ton	21
	Le coton A *id.*	21

Le bleu de tous ces échantillons avait beaucoup plus de violet que celui des normes, surtout des normes des échantillons B.

J'ai constaté que la potasse qui avait séjourné dans le flacon, renfermait du cyanogène.

Après 7 jours....	La soie B était au ton	21,5
	Le coton B *id.*	19,5
	La laine A était au ton	23
	La soie A *id.*	21
	Le coton A *id.*	21

En comparant, à cette époque, les échantillons A décolorés et recolorés cinq fois, avec 1° ceux qui ne l'avaient été que quatre fois; 2° leurs normes respectifs, il était évident que les premiers étaient inférieurs en ton et en violâtre aux échantillons qui n'avaient subi que quatre décolorations et recolorations, et que le coton et la soie A avaient encore plus baissé et perdu plus de violet, relativement à leurs normes. Quant à la laine A, elle était plus élevée en ton que son norme, mais moins que la laine qui n'avait subi que quatre décolorations et recolorations, ce qui tient évidemment à ce qu'il y avait plus de roux orangé dans la laine A.

Des quantités égales de coton A et de son norme (*), traitées séparément par de l'acide hydrochlorique, donnèrent à l'acide des quantités inégales d'oxyde de fer; le coton A en donna sensiblement davantage.

Enfin, l'échantillon de laine A, traité comparativement avec son norme (*) de la même manière, en céda davantage encore.

L'augmentation de ton que prennent des étoffes décolorées une fois, et même deux fois, en se recolorant sous l'influence de l'oxygène, était d'autant plus sensible que les étoffes étaient d'un ton plus élevé.

Ainsi, 1° une étoffe de coton d'un ton 21, après s'être décolorée dans le vide lumineux en perdant du cyanogène, s'est recolorée à l'air, en gagnant $\frac{2}{3}$ ton, et prenant du violet.

Décolorée de nouveau, en perdant du cyanogène, elle est devenue d'un jaune de nankin, et s'est colorée en bleu au

(*) Qui n'avait subi aucune décoloration.

moment de son contact avec l'air, et après une $\frac{1}{2}$ heure, elle avait pris un bleu violeté égal au ton 19; après 48 heures, elle était parvenue au ton 22 $\frac{1}{2}$.

2° Une étoffe de coton au ton 27, décolorée dans le vide en perdant du cyanogène, s'est recolorée à l'air en prenant du violet; elle a atteint le 32e ton.

Le même échantillon, décoloré dans le vide, est devenu, après 4 ans et 4 mois, d'une couleur brune de peroxyde de manganèse, dont le ton était au n° 19, et avait perdu encore du cyanogène. Mis en contact avec de l'oxygène séché par l'acide sulfurique, il s'est foncé sur-le-champ; après 24 heures il était d'une belle couleur bleu-violette et au ton 30: après 8 jours il était au ton 32.

CONSÉQUENCES GÉNÉRALES.

1° Il est fort remarquable que la soie et même le coton, décolorés une fois sous l'influence solaire, prennent une couleur bleue plus intense et plus violetée que celle des normes.

Remarque. Si l'on n'avait observé que des échantillons décolorés soumis à une seule recoloration, on pourrait, à la rigueur, rapporter la cause de l'élévation du ton et de la couleur violetée, à ce que le bleu de Prusse ordinaire ayant perdu du cyanogène lorsqu'il s'est décoloré, serait devenu ensuite, sous l'influence de l'oxygène, légèrement basique, comme on dit que cela a lieu lorsqu'une étoffe teinte en bleu de Prusse est exposée au contact d'une proportion convenable d'un alcali.

2° Le peu de différence qu'il y a entre le coton et la soie

qui ont subi cinq décolorations et recolorations successives, relativement à leurs normes respectifs, et d'un autre côté, la proportion de 90 atomes de peroxyde de fer, contre 10 atomes de bleu de Prusse (voyez le tableau, pages 505 et 506), qui est déduite de l'hypothèse où sur 9 atomes de protocyanure de fer en présence de 3 atomes d'oxygène, il se produirait 1 atome de peroxyde de fer et 1 atome de bleu de Prusse (14), me conduisent à penser que cette hypothèse n'est pas vraie.

Remarque. Si, dans le coton et la soie recolorés cinq fois, il y avait réellement 90 atomes de peroxyde, contre 10 atomes de bleu de Prusse, il semblerait qu'en appliquant l'acide hydrochlorique comparativement à ces étoffes et à leurs normes, les premières devraient abandonner une quantité très-notable de peroxyde de fer, relativement à celle que les normes pourraient céder: eh bien, c'est ce qui n'est pas. *Le coton décoloré et recoloré cinq fois cède bien sensiblement plus de peroxyde que son norme, mais la proportion est tout à fait au-dessous de celle qui est indiquée par l'hypothèse.*

En définitive, si je reconnais, d'après des expériences multipliées et faites avec l'intention d'éviter tout résultat accidentel, que *le bleu de Prusse abandonne du cyanogène en perdant sa couleur bleue*, et que la couleur qu'il prend alors, est d'ailleurs telle qu'on peut la déduire de celle des précipités obtenus avec les sels de sulfate de protoxyde de fer et le cyanure de potassium, ou même le cyanoferrite de cyanure de potassium, cependant, en considérant le peu de différence existant entre le bleu de Prusse décoloré 5 fois par la lumière dans le vide, puis recoloré 5 fois par le contact de l'oxygène, on ne peut admettre que

4 atomes de cyanogène aient été séparés à l'état gazeux, sous l'influence du vide lumineux, des 4 atomes de percyanure de fer contenus dans 1 atome de bleu de Prusse; conclusion conforme d'ailleurs au fait que l'acide hydrochlorique ne sépare pas, du bleu de Prusse qui a subi 5 décolorations et 5 recolorations successives, la quantité d'oxyde qu'il devrait en séparer dans cette hypothèse.

Cependant, je crois que par des expositions multipliées et successives à la lumière du soleil, dans le vide et à l'air, on parviendrait à réduire le bleu de Prusse à du peroxyde. Mais il faudrait beaucoup plus d'expositions que le nombre donné par le calcul exposé dans la note de la page 505.

§ III.

De la décoloration dans le vide du bleu de Prusse fixé sur les étoffes, sous l'influence de la chaleur.

18. J'ai dit, dans mon cinquième mémoire, que les étoffes teintes en bleu de Prusse se décolorent quand on les expose dans le vide à une certaine température (5e mémoire (54).) Voici les résultats de plusieurs observations :

19. Des étoffes de coton et de soie teintes en bleu de Prusse, exposées pendant 5 heures à une température de 100^d, 1° dans le vide sec, 2° dans un courant lent de gaz acide carbonique sec, 3° dans le gaz hydrogène sec, n'ont éprouvé que de très-légers changements; cependant, je crois qu'à cette température il y a du cyanogène séparé, mais en extrême petite quantité. Voici les résultats de mes expériences :

ÉTOFFES.	N° 1. VIDE SEC.	N° 2. GAZ CARBONIQUE.	N° 3. GAZ HYDROGÈNE.
Coton..	Presque identique au norme.	Plus bas et moins violet que le norme.	Plus bas et moins violet que le précédent (n° 2).
Soie....	Au-dessous du norme plutôt qu'égale.	Plutôt au-dessus du norme qu'égale.	Comme la précédente (n° 2).

20. Des étoffes de coton dans le vide, exposées à une température de 120^d pendant 3 heures, ne se sont pas décolorées, mais, s'il y a eu du cyanogène séparé dans l'opération précédente (19), il y en a eu dans celle-ci.

21. Des étoffes de coton, de soie et de laine dans le vide, exposées à une température de 170^d pendant 2 heures, ont perdu leur couleur bleue; la soie et la laine avaient une couleur de rouille.

22. Des étoffes de coton assez foncées, exposées à une température de 170 à 180^d dans le vide, pendant 6 heures, ont presque complétement perdu leur couleur bleue.

23. Des échantillons semblables aux précédents, dans le vide, ont complétement perdu leur couleur bleue, à une température de 200^d pendant trois heures.

24. Je me suis assuré, en mettant un petit tube ouvert, rempli de potasse hydratée, dans le tube vide où les étoffes sont décolorées, qu'il y a alors séparation de cyanogène ou d'acide hydrocyanique, comme cela arrive lorsqu'elles se décolorent dans le vide sous l'influence de la lumière.

65.

§ IV.

De la recoloration par l'atmosphère du bleu de Prusse appliqué sur les étoffes, qui a été décoloré dans le vide sous l'influence de la chaleur.

25. Les étoffes qui ont perdu leur couleur bleue dans le vide sous l'influence de la chaleur, la reprennent par le contact de l'oxygène, dans les mêmes circonstances que celles qui ont perdu leur couleur bleue dans le vide sous l'influence de la lumière. Les expériences que je vais rapporter le démontrent.

26. On prend cinq échantillons d'étoffe de coton teinte en bleu de Prusse, qui ont perdu leur couleur bleue par la chaleur, afin d'observer les phénomènes qu'ils présentent dans cinq circonstances différentes.

N° 1. Il est plongé rapidement dans de l'eau bouillie que contient un petit ballon. Lorsque tout l'air qu'il retenait entre les interstices des fils est chassé, on couvre l'eau d'huile. Au bout de 72 heures *il n'a pas pris de couleur bleue.*

N° 2. Il est plongé dans de l'eau bouillie; mais l'eau n'étant pas recouverte d'huile, l'oxygène de l'air peut être absorbé par le liquide. Au bout de 72 heures *l'échantillon est devenu bleu.*

L'eau qui a été en contact avec les échantillons n° 1 et n° 2, est colorée en jaune léger; elle donne du bleu de Prusse avec les sulfates de protoxyde et de peroxyde de fer.

N° 3. Il est plongé dans le gaz oxygène humide. Après 72 heures *il est d'un bleu plus foncé que le* n° 2.

N° 4. Il est plongé dans le gaz hydrogène humide. Au

bout de 72 heures *il n'est pas recoloré sensiblement en bleu.*

L'hydrogène a une odeur hydrocyanique, et agité dans de l'eau ammoniacale, il donne à ce liquide la propriété de produire du bleu de Prusse avec le sulfate de protoxyde de fer.

N° 5. Il est plongé dans le gaz acide carbonique. Au bout de 72 heures *il n'est pas recoloré sensiblement en bleu.*

On voit donc que, *hors du contact de l'oxygène, le bleu de Prusse fixé sur le coton ne redevient pas bleu après qu'il a été décoloré par la chaleur.*

27. Un fait achève de démontrer que l'oxygène produit la recoloration du bleu de Prusse : *c'est que les échantillons décolorés par la chaleur, n° 1, n° 4, n° 5, qui ne se sont pas recolorés après 72 heures de contact avec l'eau privée d'air, l'hydrogène et l'acide carbonique, reprennent leur couleur bleue si on les plonge dans l'oxygène ou si on les expose à l'air,* et l'on observe au bout de plusieurs jours et surtout après 2 mois, que les n°s 3 et 5 sont plus foncés que les autres, et que les n°s 2 et 4 le sont moins que le n° 1. J'ajouterai que tous les échantillons ont une couleur plus terne, plus ardoisé-violâtre que l'échantillon norme qui n'a point été décoloré par la chaleur. Sous ce rapport, ils diffèrent donc des échantillons correspondants, qui se sont recolorés après avoir perdu leur bleu dans le vide lumineux.

Un échantillon d'étoffe de coton teint en bleu de Prusse, décoloré par une température de 150 à 180^{d}, qui ne s'était pas recoloré par une immersion de 10 heures dans de l'eau bouillie, et qui s'était recoloré en bleu verdâtre ardoisé au sein de ce liquide qu'on avait mis en contact avec l'air, ayant été traité comparativement avec son norme, par l'acide

hydrochlorique, convenablement étendu, a cédé du peroxyde de fer à l'acide, tandis que le norme n'en a pas cédé de quantité appréciable (*). Les deux échantillons retirés de l'acide, lavés et séchés, examinés au bout de 6 jours, ont présenté les résultats suivants : le norme était redevenu sensiblement ce qu'il était avant le contact de l'acide, tandis que l'autre échantillon avait perdu de son ton verdâtre, il était plus bleu et plus intense.

Cette expérience conduit à penser que, s'il y avait eu de l'oxygène qui se fût fixé en quantité notable au fer pour constituer du peroxyde, lors de la recoloration d'une étoffe en bleu de Prusse sous l'influence de l'oxygène, on aurait dû, au moyen de l'acide hydrochlorique, séparer de l'oxyde de fer d'une étoffe décolorée et recolorée cinq fois (17).

§ V.

Des phenomenes successifs de decoloration du bleu de Prusse, frappé du soleil dans l'atmosphère, et de sa recoloration dans l'atmosphère privée de lumière.

28. L'observation de la décoloration du bleu de Prusse dans le vide sous l'influence de la lumière, et de sa recoloration à l'air, donne une explication qui m'a bien souvent été demandée, non-seulement par des gens du monde, mais encore par des industriels et des savants. Comment se fait-il, me disait-on, qu'une étoffe teinte en bleu de Prusse pâlisse presque jusqu'au blanc à la lumière

---

(*) Voyez la note ajoutée à la fin du Mémoire, relative à quelques propriétés du bleu de Prusse.

du soleil, et qu'elle reprenne ensuite sa couleur bleue lorsqu'on l'a mise dans une armoire, c'est-à-dire, dans l'obscurité? Aujourd'hui je puis répondre à cette question.

29. Lorsqu'une étoffe teinte en bleu de Prusse est soumise au soleil au milieu de l'air, elle se comporte comme elle le ferait dans le vide en perdant probablement du cyanogène; mais précisément parce que l'oxygène est présent et qu'il tend à refaire du bleu de Prusse, la décoloration, toutes choses égales d'ailleurs, doit être plus difficile, ou, ce qui revient jusqu'à un certain point au même, elle doit être moins sensible que dans le vide, où il n'y a pas d'oxygène pour neutraliser aux yeux l'effet de décoloration que la lumière tend à produire. *La question qu'on m'a si souvent adressée, prouve donc que, par une insolation suffisante, le bleu de Prusse pâlit*, et d'un autre côté, mes observations conduisent à penser qu'il perd alors du cyanogène; enfin, *cette même question prouve qu'on a remarqué la recoloration du bleu dans l'obscurité*, et mes expériences démontrent que c'est la réaction de l'oxygène qui n'étant contre-balancée par aucune force dans l'obscurité, redonne au bleu de Prusse décoloré sa couleur primitive, avec la modification qu'elle est susceptible de produire sur le bleu régénéré.

30. Cette succession de deux phénomènes que présente une matière dans deux circonstances successives de lumière solaire et d'obscurité, au sein de l'atmosphère, m'a paru si remarquable, sous le rapport de la recherche des forces auxquelles on peut rapporter immédiatement les phénomènes de la vie, que je me réserve de développer mes idées sur ce sujet dans un appendice à ce mémoire.

§ VI.

De la décoloration du bleu de Prusse plongé dans l'eau distillée non aérée, et l'eau distillée aérée, sous l'influence de la lumière du soleil.

31. Une étoffe teinte en bleu de Prusse plongée dans une cloche qui a été préalablement remplie d'eau distillée privée d'air par l'ébullition, puis fermée avec un obturateur, et renversée dans une petite cuvette d'eau également désaérée et recouverte d'huile, se décolore par son exposition au soleil, dans un temps où un autre échantillon de la même étoffe placée dans les mêmes circonstances, sauf qu'elle est dans l'obscurité, ne se décolore pas. La décoloration du premier échantillon s'opère sans dégagement de gaz, et peut-être plus rapidement que dans le vide.

32. Si l'on divise rapidement en 5 échantillons n°s 1, 2, 3, 4 et 5, l'étoffe décolorée, qu'on a retirée de la cloche, après avoir pris toutes les précautions pour la soustraire au contact de l'huile, ces échantillons présentent les phénomènes que je vais exposer, après qu'on les a mis dans les cinq circonstances suivantes :

Le n° 1, séché avec du papier joseph, est conservé dans l'atmosphère ;

Le n° 2 est plongé dans un flacon de gaz oxygène ;

Le n° 3 l'est dans un flacon de gaz carbonique ;

Le n° 4 dans un petit ballon plein d'eau bouillie, qu'on recouvre d'huile aussitôt après l'immersion de l'étoffe ;

Le n° 5 dans un petit ballon plein d'eau bouillie qui reste en contact avec l'air atmosphérique.

Les nos 1, 2 et 5, qui ont seuls le contact de l'oxygène, se recolorent en bleu, tandis que les nos 3 et 4, qui ne l'ont pas, restent incolores.

Après 5 minutes de contact avec l'air, le no 1 était au ton 4 d'une gamme de 33 tons;

Après $\frac{1}{2}$ heure, au ton 9, 5;
Après 2 heures, au ton 10;
Après 12 heures, au ton 13;
Après 24 heures, au ton 14;
Après 120 heures, au ton 14.

La couleur était beaucoup plus violâtre que le norme, et lui était inférieure de 1 ton $\frac{1}{2}$ à 2 tons.

33. L'eau au sein de laquelle l'étoffe avait perdu sa couleur bleue, essayée comparativement avec l'eau distillée, par le sirop de violette, paraissait neutre, tandis que l'eau distillée semblait être légèrement acide; elle ne précipitait pas le sulfate de protoxyde de fer, ni le sulfate de peroxyde; mais ajoutait-on aux mélanges du sous-carbonate d'ammoniaque, puis de l'acide hydrochlorique, on obtenait du bleu de Prusse, d'où il faut conclure que *sous l'influence de la lumière dans l'eau non aérée, comme dans le vide, le bleu de Prusse se décolore en abandonnant du cyanogène ou de l'acide hydrocyanique.*

34. Si l'on expose une étoffe teinte en bleu de Prusse plongée dans l'eau à la lumière du soleil, en même temps que la surface du liquide a le contact de l'air, les phénomènes sont différents de ce qu'ils seraient si l'eau était soustraite à ce contact. En effet, le bleu de Prusse, au lieu

de se réduire en un corps capable de redevenir bleu (33), perd peu à peu tout son cyanogène, et le fer se change complétement en peroxyde.

35. L'étoffe que la lumière a privée de sa couleur bleue dans l'eau aérée, peut reprendre sensiblement du bleu par son exposition à l'air dans l'obscurité, ou n'en pas reprendre; dans le premier cas, elle contient de la matière d'un gris jaune nankin qui reproduit du bleu de Prusse sous l'influence de l'oxygène; dans le second cas, elle en est dépourvue, ou, si elle en contient, la quantité en est telle que la couleur du bleu de Prusse reproduit sous l'influence de l'air est neutralisée par la couleur jaune rouille du peroxyde de fer, conformément au *principe du mélange des couleurs* que j'ai établi dans le premier mémoire de ces recherches (page 4), et dans un mémoire spécial consacré à ce principe (série de mes recherches physico-chimiques sur la teinture); et la preuve de cette neutralisation mutuelle, c'est qu'en traitant par l'acide hydrochlorique faible l'étoffe qui n'est pas redevenue bleue durant une exposition de 15 jours à l'air, on dissout le peroxyde de fer, et alors le bleu de Prusse qui était dissimulé par lui devient sensible. D'un autre côté, en comparant la hauteur du pied de fer que cette étoffe laisse après que son bleu de Prusse a été décoloré par l'eau de potasse, à la hauteur du pied de fer d'un autre échantillon de l'étoffe qui n'a point été traitée par l'acide hydrochlorique, on peut apprécier l'intensité de la couleur de rouille qui était neutralisée par celle du bleu de Prusse. Cette expérience est très-propre à démontrer la théorie de l'azurage du linge et du papier. (Voyez la série de mes recherches physico-chimiques sur la teinture.)

36. L'eau aérée dans laquelle une étoffe de bleu de Prusse venait de perdre sa couleur, ne donnait pas de bleu quand on y versait du sulfate de protoxyde fer, mais elle en donnait si on y ajoutait du sous-carbonate d'ammoniaque, et ensuite de l'acide hydrochlorique ou sulfurique.

§ VII.

De la décoloration du bleu de Prusse par l'eau bouillante.

37. On sait qu'une étoffe de bleu de Prusse tenue pendant un temps suffisant dans l'eau bouillante, est réduite à son pied de peroxyde de fer (*pied de rouille*); mais un fait dont je ne me suis rendu compte qu'après avoir eu observé la décoloration de cette matière exposée dans le vide à la lumière ou à la chaleur, c'est qu'il y a une dizaine d'années, en essayant des étoffes teintes en bleu de Prusse, livrées à la liste civile par l'industrie lyonnaise, je remarquai que l'une d'elles, qui avait été tenue au milieu de l'eau bouillante jusqu'à ce qu'elle eût perdu tout son bleu, le reprit dans l'obscurité.

Ce phénomène me frappa au point que j'essayai deux fois de le reproduire, mais ce fut en vain : aujourd'hui il est aisé de le constater si l'on tient les étoffes plongées dans de l'eau qui bout, sans le contact de l'air, le temps strictement nécessaire à la disparition du bleu. Voici la manière d'opérer :

38. Dans un ballon chauffé au moyen d'une lampe à alcool presque plein d'eau bouillante, on met des étoffes teintes en bleu de Prusse. On achève de remplir le ballon d'eau bouillante, puis on y adapte un bouchon armé d'un tube

rempli d'eau. L'extrémité libre du tube s'engage sous une cloche pleine de mercure. On soutient l'ébullition jusqu'au moment où les étoffes ont perdu leur couleur bleue. Si on chauffe ensemble des étoffes de coton, de soie et de laine, prises à la même hauteur, la décoloration est d'autant plus rapide que leur ton est plus bas. Leur poids doit être à celui de l'eau comme 1 est à 240 environ.

L'eau se colore rapidement en jaune. La couleur bleue des étoffes s'affaiblit peu à peu. Aucun gaz permanent ne se dégage. Lorsqu'on veut interrompre l'opération, on enlève le bouchon du ballon sans cesser d'entretenir bouillante l'eau qu'il renferme.

39. L'eau qui s'est vaporisée dans la cloche a l'odeur de l'acide hydrocyanique; elle donne immédiatement du bleu de Prusse avec le sulfate de protoxyde de fer acidulé d'acide sulfurique, parce que l'eau contient de l'hydrocyanate d'ammoniaque, et je ferai remarquer qu'elle en a donné une trace avec le sulfate de peroxyde de fer.

40. L'eau au sein de laquelle les étoffes ont perdu leur couleur bleue a l'odeur de l'acide hydrocyanique; elle contient non-seulement de l'hydrocyanate d'ammoniaque, mais encore du protocyanure de fer; aussi donne-t-elle un précipité bleu notable avec le sulfate de peroxyde de fer.

41. Les étoffes qui ont perdu leur bleu ont une légère couleur de rouille en sortant du ballon, qu'elles conservent si on les préserve du contact de l'oxygène; mais dans le cas contraire, elles repassent au bleu, qui est plus ou moins verdâtre, parce qu'une portion de bleu de Prusse plus ou moins grande est radicalement décomposée en peroxyde de fer, tandis que l'autre est seulement réduite en matière

d'un gris jaune nankin; c'est ce dernier qui reproduit du bleu de Prusse sous l'influence de l'air; une fois ce bleu reproduit, on peut, en plongeant les étoffes dans l'eau aiguisée d'acide hydrochlorique, en séparer tout le peroxyde de fer, et obtenir du bleu franc.

42. Si, au lieu de retirer les étoffes de l'eau bouillante au moment où elles viennent de perdre leur couleur bleue, on prolonge l'opération pendant un temps suffisant, trois, quatre et même cinq heures, on remarque que leur légère couleur jaune se fonce progressivement, jusqu'à ce qu'elles ne retiennent plus que du peroxyde de fer (1). Pendant cette dernière période il ne se dégage aucun gaz permanent. On s'assure que la décomposition du bleu de Prusse a été complète par la blancheur qu'acquièrent de petits rubans provenant des étoffes que l'on met dans l'eau aiguisée d'acide hydrochlorique; pour peu qu'elle ne l'eût pas été, ils seraient colorés en bleu.

43. Si l'on fractionne en deux portions égales ou à peu près l'eau qui se vaporise pendant une opération où des étoffes sont complétement réduites à leur pied de peroxyde de fer, on trouve que toutes les deux contiennent de l'acide hydrocyanique et de l'ammoniaque, mais dans la première portion il y a plus d'acide et moins d'ammoniaque que dans la seconde. Je me suis assuré par une expérience compara-

---

(1) Si on n'a pas pris la précaution d'empêcher que par l'ébullition les étoffes soient projetées dans le col du ballon contre le bouchon de liége, l'acide gallique ou tannique de ce dernier peut donner une teinte brune aux étoffes, et modifier ainsi la couleur du peroxyde de fer.

tive, faite avec de l'eau distillée, que l'ammoniaque que j'ai reconnue au moyen des réactifs colorés dans l'eau qui se vaporise du ballon contenant des étoffes teintes en bleu de Prusse, provenait bien réellement d'une décomposition de cyanogène et de l'eau, et non de l'eau distillée employée. L'acide hydrocyanique de ce produit est démontré par son odeur et le précipité bleu qu'il donne avec le sulfate de protoxyde de fer acidulé ; et l'ammoniaque l'est par ce précipité même (puisque l'acide hydrocyanique pur ne donne pas de bleu de Prusse avec le sulfate de protoxyde de fer), et par les réactifs colorés, notamment par le sirop de violette.

44. On ne retrouve pas tout le fer du bleu de Prusse des étoffes sur celles-ci, il y en a une quantité notable dans l'eau où elles ont perdu leur bleu ; mais pour étudier la nature du liquide, il faut tenir compte de l'alcali et des matières qu'il a pu enlever au verre et au bouchon de liége, c'est pourquoi je vais examiner la matière soluble provenant d'une opération faite dans une capsule de platine. La décomposition, aussi complète alors qu'elle l'est dans le verre, fournit la preuve que l'alcali n'a pas eu d'influence dans l'expérience précédente où l'on a fait usage d'un ballon de verre.

45. Une partie d'étoffe a été chauffée au sein de 60 parties d'eau bouillante dans une capsule de platine pendant cinq heures. L'étoffe a été réduite à son pied de fer, car l'acide hydrochlorique l'a complétement décolorée.

46. L'eau était jaune neutre aux réactifs colorés. Elle n'éprouvait aucun changement de la part du cyanoferrite et du cyanoferrate de cyanure de potassium. Elle n'éprouvait rien de remarquable de la part de l'acide hydrochlorique.

47. Elle donnait sur-le-champ du bleu de Prusse avec le sulfate de peroxyde de fer. Avec le sulfate de protoxyde, il fallait quelque temps. D'après cela, on ne peut douter de la présence du *protocyanure de fer* dans l'eau bouillante au sein de laquelle le bleu de Prusse fixé sur le coton a perdu son bleu; car on sait que la solution des sels de peroxyde de fer ne donne pas de bleu avec les cyanures ou les hydrocyanates solubles simples.

48. La liqueur évaporée, le résidu repris par l'eau a laissé une *matière de couleur rouge-brun* qui, épuisée par l'eau de tout ce qu'elle contenait de soluble, s'est réduite par l'acide hydrochlorique en perchlorure soluble et en bleu de Prusse insoluble.

49. La *matière de couleur rouge-brun* est-elle un composé de bleu de Prusse et de peroxyde de fer, ou est-elle un simple mélange de ces corps? C'est ce que je ne déciderai pas; mais j'affirmerai que le bleu de Prusse qui en a été séparé par l'acide hydrochlorique ne provenait pas d'une réaction d'un perchlorure de fer sur un cyanoferrite de cyanure soluble qui aurait échappé à l'action de l'eau.

50. La liqueur d'où la *matière de couleur rouge-brun* avait été séparée (48), a donné par l'évaporation spontanée des cristaux en longues aiguilles d'une couleur améthyste vraiment remarquable, mais en trop petite quantité pour être soumis à des essais propres à en faire bien connaître la nature.

51. Y a-t-il formation d'acide formique pendant la décomposition du bleu de Prusse au sein de l'eau bouillante? c'est ce que je n'ai pu vérifier sur le bleu de Prusse fixé aux étoffes, mais à la fin du mémoire, je rapporterai dans une

note des expériences qui rendent cette formation très-vraisemblable.

52. Les conséquences que je tire des expériences rapportées dans ce paragraphe sont :

1° Que dans l'eau bouillante le bleu de Prusse fixé sur une étoffe est altéré si profondément, qu'il ne reste dessus que du peroxyde de fer;

2° Que puisqu'il se produit de l'acide hydrocyanique et de l'ammoniaque, il faut admettre que l'oxygène de l'eau se porte sur le fer;

3° Qu'il se produit au commencement de l'opération du protocyanure de fer aux dépens du percyanure, et qu'il ne se dégage aucun gaz permanent durant l'opération.

§ VIII.

De la décoloration du bleu de Prusse par l'eau froide.

53. L'eau distillée froide, appliquée à une toile de coton teinte avec le bleu de Prusse, l'a presque entièrement privée de sa couleur bleue, et si j'eusse continué le lavage, je ne doute pas que je ne fusse parvenu à la faire complétement disparaître, et à n'avoir que du peroxyde de fer provenant de l'altération du bleu de Prusse. Mais comme j'ai obtenu ce résultat à une époque où j'ignorais l'influence de la lumière et de l'eau liquide sur le bleu de Prusse, ou plutôt les étoffes qui en sont teintes, je n'oserais affirmer que la lumière diffuse à laquelle l'étoffe, sujet de mon expérience, a été exposée au sein de l'eau, n'ait pas eu d'influence. D'un

autre côté, la quantité d'eau employée a été si considérable que je n'oserais affirmer que l'ammoniaque qu'elle contenait, ainsi que des traces de carbonate de chaux, aient été sans action.

54. Voici le résultat de mon expérience :

26 grammes de toile de coton teinte en bleu de Prusse ont été soumis à 21 lavages faits par macération, en employant chaque fois 3900 grammes d'eau ; le poids de l'étoffe était donc à celui de l'eau : : 1 : 150 dans chaque lavage, et : : 1 : 3150 pour l'eau des 21 lavages. D'un autre côté, la durée des macérations a été de 2539 heures.

		Partie soluble.	Partie insoluble.
	gr.	gr.	gr.
Le 1er lavage a laissé de résidu.........	0,057...	0,046...	0,011
Les 7 suivants......................	0,180...	0,087...	0,093
Les 13 derniers.....................	0,060...	0,044...	0,016
	0,297	0,177	0,120

Je ferai deux remarques sur ces résidus :

55. *La première*, c'est que toutes leurs parties solubles contenaient un cyanure capable de donner du bleu de Prusse avec le sulfate de protoxyde de fer.

56. *La seconde*, c'est que le premier résidu, épuisé par l'eau distillée froide de tout ce qu'il contenait de soluble, était dissous par l'acide hydrochlorique sans laisser de bleu de Prusse, tandis que le peroxyde de fer provenant du lavage des deux autres résidus, traité par le même acide, en laissait une quantité sensible.

57. Je suis assez disposé à admettre l'existence d'un com-

posé de couleur de rouille, formé de bleu de Prusse et de peroxyde de fer, ainsi que je l'ai dit plus haut (49).

§ IX.

De la modification que le bleu de Prusse, fixé sur la soie d'après le procédé que j'ai décrit dans un mémoire lu à l'Académie, le 29 mai 1826, éprouve par l'exposition de l'étoffe teinte à l'atmosphère.

58. Lorsqu'on a teint la soie en bleu de Prusse,

1° En y fixant du peroxyde de fer;

2° En convertissant cet oxyde en bleu de Prusse au moyen d'un bain de cyanoferrite de cyanure de potassium;

3° En avivant la soie ainsi teinte et lavée, par une immersion de quatre heures et demie dans cent cinquante fois son poids d'eau de Seine, l'étoffe retirée de l'eau et chevillée, exposée à l'air, présente les phénomènes suivants :

59. L'étoffe qui vient d'être chevillée a perdu beaucoup de la hauteur de son ton de couleur en perdant par la torsion l'eau qui la *mouillait;* c'est ce résultat qui a donné lieu au dicton des teinturiers, *qu'une étoffe teinte est riche humide et pauvre sèche.* Eh bien, l'étoffe de soie teinte avec le bleu de Prusse, qui a été chevillée, acquiert, par une exposition à l'air de dix-huit à trente jours, une augmentation de ton de couleur vraiment remarquable. Qu'arrive-t-il dans cette circonstance? Y a-t-il une simple dessiccation? ou bien y a-t-il encore dégagement de cyanogène? ou absorption d'oxygène? ou enfin y aurait-il dessiccation, dégagement de cyanogène et absorption d'oxygène? C'est ce que j'ai cherché à découvrir en faisant huit expériences comparatives sur huit écheveaux de soie pesant chacun 100 grammes, qui venaient

d'être teints, avivés et chevillés simultanément. Je les désignerai chacun par un numéro.

60. Voici les conditions dans lesquelles je plaçai les écheveaux :

Le n° 1 fut exposé à l'atmosphère libre et à la lumière diffuse;

Le n° 2, à l'atmosphère libre, mais dans l'obscurité;

Le n° 3 fut plongé dans un flacon de douze litres, rempli d'air séché par la potasse à l'alcool, et fermé avec un bouchon à l'émeri ;

Le n° 4 fut plongé dans un flacon semblable, rempli d'air saturé de vapeur d'eau ;

Le n° 5 fut plongé dans un flacon semblable, rempli d'oxygène séché par de la potasse à l'alcool ;

Le n° 6 fut plongé dans un flacon semblable, rempli d'oxygène saturé par de la vapeur d'eau;

Le n° 7 fut plongé dans un flacon semblable, rempli de gaz acide carbonique, séché par du chlorure de calcium ;

Le n° 8 fut plongé dans un flacon semblable, rempli de gaz acide carbonique saturé de vapeur d'eau.

Les six flacons furent placés dans l'obscurité, à côté du n° 2. Les flacons renfermant les écheveaux n°s 3, 5 et 7, contenaient assez de potasse ou de chlorure pour sécher complétement les étoffes.

61. J'ai réuni mes observations dans un tableau.

APRÈS UNE EXPOSITION	N° 1, écheveau dans atmosphère et lumière diffuse.	N° 2, écheveau dans atmosphère obscure.	N° 3, écheveau dans air sec obscur.	éc… air hu…
de 48 heures.........	bleu commençant à violeter..............	idem, peut-être plus clair...............	plus foncé en violet que 2.................	moins f… dâtre q…
de 72 heures	bleu violet..........	idem, plus clair.....	plus foncé en violet que 2................	moins f… dâtre c…
de 7 jours........	bleu violet.........	id., plus clair.......	moins violet que 2....	moins f… dâtre c…
de 10 jours	bleu violet.........	id., sensiblement plus clair................	moins violet que 2....	plus ver…
de 20 jours	bleu violet.......	id., plus clair, différence légère........	moins violet que 2....	plus ver…
de 30 jours. Les échantillons furent alors retirés des flacons......	bleu violet...........	id., plus clair, mais différence légère.......	plus verdâtre ou moins violet que 2.........	plus ver…
après une exposition à l'air libre obscur de 5 jours..............	bleu violet.........	un peu moins violet que 1................	sensiblement plus verdâtre que 2.........	égal à 3…

° 5, eveau oxygène sec scur.	N° 6, écheveau dans gaz oxygène humide obscur.	N° 7, écheveau dans gaz acide carbonique sec obscur.	N° 8, écheveau dans gaz acide carbonique humide obscur.
violet que 2, e 3...........	plus verdâtre que 5, identique à 4.....................	plus verdâtre que 4 et moins foncé..................	encore plus verdâtre et moins foncé que 7.
violet que 2 et	plus verdâtre que 5, identique à 4.....................	plus clair que 2...........	plus clair que 7.
....	plus verdâtre que 5, plus violâtre que 4.............	plus clair que 2......	plus clair que 7.
violet que 3 et	plus verdâtre que 5, plus violâtre que 4	plus clair que 2...........	plus clair que 7.
e 3 et peut-être	plus verdâtre que 5, plus violâtre que 4..............	plus clair que 2, moins violet que 4..................	plus clair que 7.
e 3, moins foncé	plus verdâtre que 5, égal à 4.	plus verdâtre que 3, plus clair que 4, quoique plus violet.	plus clair que 7 et plus verdâtre que tous les autres.
s violâtre que 2.	égal à 5 ou à 3...........	égal à 5 ou à 3............	égal à 5, peut-être plus haut.

CONSÉQUENCES DES OBSERVATIONS EXPOSÉES DANS LE TABLEAU PRÉCÉDENT.

62. *La dessiccation a une influence incontestable pour hausser le ton du bleu de Prusse fixé sur la soie, en lui donnant une nuance de violet.*

Ainsi le n° 3 plongé dans l'air sec était plus haut et moins verdâtre que le n° 4 plongé dans l'air humide;

La même différence entre le n° 5 plongé dans l'oxygène sec et le n° 6 plongé dans l'oxygène humide;

La même différence encore entre le n° 7 plongé dans le gaz acide carbonique sec et le n° 8 plongé dans le gaz acide carbonique humide.

63. *Le contact de l'oxygène a une influence pour hausser le ton du bleu de Prusse fixé sur la soie, en lui donnant une nuance de violet.*

Ainsi les n°s 3 et 5 plongés dans l'air et l'oxygène secs étaient plus hauts et moins verdâtres que le n° 7 plongé dans le gaz carbonique sec.

Il en était de même des n°s 4 et 6 plongés dans l'air et l'oxygène humides relativement au n° 8 plongé dans l'acide carbonique humide.

Enfin l'écheveau n° 5 plongé dans l'oxygène sec était un peu plus foncé que le n° 3 plongé dans l'air sec.

Je ferai remarquer que la différence aurait été plus grande, si les écheveaux eussent été plongés dans leurs gaz respectifs après avoir été préalablement privés de tout air atmosphérique.

64. *L'écheveau* n° 1, *exposé à l'atmosphère et à la lumière*

diffuse, était un peu plus haut que l'écheveau n° 2 *exposé à l'atmosphère privée de lumière.*

Mais comme la différence était légère, je n'oserais pas affirmer que l'ammoniaque qui peut exister accidentellement dans l'atmosphère en proportion très-variable eût été étrangère au phénomène.

Enfin, ne serait-ce pas encore cette ammoniaque qui rendrait la couleur du bleu de Prusse exposé à l'atmosphère libre plus violette qu'elle n'est, quand il est renfermé dans un flacon bouché à l'émeri?

65. J'ignore absolument ce qui se passe dans la constitution du bleu de Prusse lorsqu'il se fonce en bleu par la dessiccation, et qu'il est exposé au contact de l'oxygène; ce qu'il y a de certain, c'est que, dans ce dernier cas, je n'ai pu trouver la moindre trace de cyanogène dans la potasse qui avait servi à sécher les écheveaux de soie n° 3 et n° 5 (60), ni dans la potasse qui avait servi, dans une autre expérience, à sécher 200 grammes de soie. Je suis donc fondé à croire que l'*oxygène, en exerçant son influence sur les étoffes teintes en bleu de Prusse, n'en dégage pas de cyanogène, du moins en proportion notable.*

66. J'ai voulu savoir ce que des étoffes de coton, de soie et de laine, teintes avec le bleu de Prusse depuis vingt jours, deviendraient dans les neuf circonstances suivantes, lorsqu'elles seraient soustraites à l'influence de toute lumière sensible.

N° 1. Étoffes servant de normes, renfermées dans une boîte de carton.

N° 2. Étoffes servant de normes, suspendues dans un flacon

fermé à l'émeri, d'une capacité de 1/2 litre, semblable aux flacons des expériences suivantes.

N° 3. Étoffes suspendues dans un flacon d'air séché avec de gros fragments de chlorure de calcium.

N° 4. Étoffes suspendues dans un flacon d'air séché par l'acide sulfurique de 1,84 de densité.

N° 5. Étoffes suspendues dans un flacon d'air séché par la potasse à l'alcool, préalablement rougie au feu.

N° 6. Étoffes suspendues dans un flacon d'air saturé de vapeur d'eau.

N° 7. Étoffes entièrement plongées dans une couche d'eau de $0^m,008$ que contenait un flacon d'air bouché à l'émeri, semblable aux précédents.

N° 8. Étoffes suspendues dans un flacon vide d'air, contenant des fragments de chlorure de calcium.

N° 9. Étoffes suspendues dans un flacon vide d'air, contenant de l'acide sulfurique d'une densité de 1,84.

Le tableau ci-joint renferme le résultat de mes observations :

TABLEAU.

		N° 1, normes renfermés dans une boîte de carton.	N° 2, normes suspendus dans un flacon fermé à l'émeri.	N° 3, étoffes suspendues dans un flacon d'air séché par du chlorure de calcium.	N° 4, étoffes suspendues dans un flacon d'air séché par l'acide sulfuri de 1,84 de densité.
après 24 heures	COTON	....	....	pas de changements sensibles	moins violâtres que le normes
	SOIE	....	....		
	LAINE	....	....		
après 5 jours	COTON	....	....	un peu moins violets que les normes n° 1, surtout la soie	moins violets que les normes n° 1 et que n° 3.
	SOIE	....	....		
	LAINE	....	....		
après 10 jours	COTON	....	....	un peu moins violets que les normes n° 1	moins violets que le normes n° 1
	SOIE	....	....		
	LAINE	....	....		comme le norme n° 1
après 20 jours	COTON	....	....	plus violets que les normes n° 1	plus violâtre que l norme n° 1
	SOIE	....	....		moins violâtre que l norme n° 1
	LAINE	....	....		plus violâtre que l norme n° 1
après 30 jours	COTON	....	....	plus violet que le norme n° 1	comme le norme n° 1
	SOIE	....	....	moins violette que le norme n° 1	moins violette que l norme n° 1
	LAINE	....	....	plus violette que le norme n° 1	identique au norme n° 1
après 100 jours	COTON	....	....	identiques ou presque identiques aux normes n° 1	moins violet que le normes n° 1
	SOIE	....	....		presque identique a norme n° 1
	LAINE	....	....		
après 18 mois	COTON	....	....	un peu moins violâtres que les normes n° 1	plus verdâtres que le n° 3
	SOIE	....	....		
	LAINE	....	....	bleu moins violâtre que le norme n° 1, tirant au verdâtre	plus verdâtre que l n° 3, vert tirant au jaunâtre

N° 5, ...toffes suspendues ...ns un flacon d'air ...éché par la potasse à l'alcool.	N° 6, étoffes suspendues dans un flacon d'air saturé de vapeur d'eau. Couche d'eau au fond du flacon de $0^m,008$.	N° 7, étoffes dans un flacon d'air où elles étaient couvertes de $0^m,008$ d'eau.	N° 8, étoffes suspendues dans le vide séché par le chlorure de calcium.	N° 9, étoffes suspendues dans le vide séché par l'acide sulfurique d'une densité de 1,84.
...ntiques à n° 4......	verdâtres, relativement aux normes et aux n°s 3, 4 et 5...........	on ne pouvait rien dire des changements de couleur, puisque les étoffes étaient mouillées..............		
...ntiques à n° 4......	comme ci-dessus......	comme ci-dessus......		
...ntiques à n° 4	comme ci-dessus......	comme ci-dessus......		
...ntiques à n° 4......	comme ci-dessus......	comme ci-dessus......		
...nme le norme n° 1. ...ins violet que les nor...es n° 1...........	comme ci-dessus......	comme ci-dessus......		
...sque identiques aux ...rmes n° 1 et plus ...oletés que le n° 4..	moins violâtres que les normes et plus violâtres que le n° 4......... c'est la laine qui change le moins...........	plus verdâtre que le coton et la soie de tous les numéros......... plus violâtre que la laine de tous les numéros..	presque identique au norme n° 1......... très-légèrement moins violâtre que le norme. presque identique au norme............	moins violâtre que les normes............ comme 8, cependant un peu moins violâtre....
...ntiques aux normes ... 1............... ... peu moins violâtre ...e le norme n° 1 et ...peu plus que le n° 3.	couleur de pensée, étoffe légèrement altérée.. couleur violâtre très-affaiblie, des taches de couleur rouille, étoffe légèrement altérée................ couleur violâtre ardoisée très-faible, étoffes très-altérées	étoffes retirées du flacon et exposées à l'air pendant une heure, plus verdâtres que le norme n° 1......... presque identique au norme n° 1, mais moins fraîche de couleur................ plutôt supérieur au norme n° 1 qu'inférieur..		l'acide sulfurique était légèrement coloré....
	l'eau qui était au fond du flacon était d'un jaune-orangé..	l'eau était d'un jaune verdâtre..............		

CONSÉQUENCES ET INTERPRÉTATIONS DES OBSERVATIONS DU TABLEAU PRÉCÉDENT.

67. Une fois que le bleu de Prusse, fixé sur une étoffe d'après mon procédé, a acquis un certain ton par le double effet de la dessiccation et du contact de l'air, ce qui exige de vingt à trente jours environ, on obtient dans les circonstances précitées les résultats que je vais exposer, en faisant abstraction de petites variations, et parmi elles j'en comprends qui me paraissent dues à de l'ammoniaque qui s'est trouvée accidentellement dans l'atmosphère à laquelle étaient exposés les normes n° 1 ; enfin je remarquerai que si l'on ne prenait pas la précaution de bien sécher le flacon et les normes n° 2, ceux-ci pourraient prendre plus de violet que les normes n° 1, par une formation d'ammoniaque aux dépens de leurs éléments.

1° L'air séché par le chlorure de calcium n'a pas d'influence pour violeter les étoffes, car après dix-huit mois de séjour dans cet air, elles étaient moins violettes que les normes n° 1 et n° 2.

2° L'air séché par l'acide sulfurique a de l'influence pour verdir les étoffes plutôt que pour les violeter.

L'acide sulfurique se colore faiblement. N'agirait-il pas en absorbant l'ammoniaque qui peut être produite aux dépens des étoffes teintes ; ammoniaque qui, sans sa présence, resterait dans les étoffes, et violetterait le bleu non décomposé ?

3° L'air séché par l'hydrate de potasse est celui où les étoffes conservent le mieux leur ressemblance avec les normes, résultat conforme avec l'interprétation de l'alinéa précédent

(2°), relativement à l'influence de l'acide sulfurique pour absorber l'ammoniaque.

4° L'air saturé de vapeur d'eau a une action remarquable pour verdir le bleu de Prusse dans le premier mois de l'exposition, mais peu à peu la couleur passe à la couleur pensée.

Ce phénomène est occasionné par une production d'ammoniaque qui réagit sur le bleu de Prusse; au bout de dix-huit mois le flacon contenait assez d'alcali volatil pour que l'odorat le reconnût, et qu'un papier rouge de tournesol, plongé dans le flacon, y devînt promptement bleu, tandis que d'autres papiers rouges, plongés dans l'atmosphère des flacons 3, 5, 7, ne sont pas devenus bleus, même après un séjour de plusieurs jours.

L'eau d'un jaune orangé qui était au fond du flacon bleuissait sur-le-champ le papier rouge de tournesol; elle était donc *très-alcaline*. Elle précipitait le sulfate de peroxyde de fer sur-le-champ en bleu verdâtre brun sale, qui devenait d'un beau bleu par l'acide sulfurique faible; elle précipitait abondamment le chlorure de barium en sous-carbonate; elle ne se troublait pas par l'oxalate d'ammoniaque; elle était dépourvue de chlore. L'évaporation spontanée en sépara quelques aiguilles qu'on ne put isoler d'un résidu bleu verdâtre. L'alcool, appliqué à ce résidu, en sépara une matière légèrement acide, qui se comportait comme un cyanure simple, car elle ne donnait de bleu de Prusse qu'avec un mélange de sulfates de protoxyde et de peroxyde, ou avec des sels de protoxyde de fer. Ce résidu contenait de l'ammoniaque. La matière insoluble dans l'alcool a été réduite par l'eau en un bleu de Prusse verdâtre, et en cyano-ferrite de cyanure soluble dans l'eau.

Je me suis assuré que le coton, la soie et la laine, mis dans

un flacon fermé, dont le fond était couvert de quelques millimètres d'eau, étaient bien plus altérés dans leur couleur bleue et leur tissu que les échantillons précédents qui étaient suspendus dans l'atmosphère du flacon sans toucher à l'eau liquide qui était au fond. Dans ce dernier cas, le coton était peu altéré, comme je l'ai fait remarquer, tandis que la laine l'était profondément. Les durées des expériences étaient égales.

Enfin je me suis assuré que le coton teint en bleu de Prusse, plongé *seul* dans un flacon où il y avait quelques millimètres d'eau, outre la quantité qui à l'état de vapeur saturait l'atmosphère du vaisseau, donne lieu à de l'ammoniaque; mais celle-ci est peut-être en moindre quantité que lorsqu'il y a de la laine, car j'ai lieu de penser que, dans les circonstances dont j'ai parlé, cette dernière étoffe est susceptible d'en produire, non-seulement aux dépens de son bleu de Prusse, mais encore aux dépens de ses propres éléments.

5° Les étoffes submergées dix-huit mois dans quelques millimètres d'eau, n'éprouvent, dans l'obscurité, que peu ou pas d'altération, sauf le changement que la mouillure occasionne dans la couleur bleu de Prusse.

Certes, ce résultat, rapproché du précédent (4), et de ce qu'on observe lorsque les étoffes plongées dans de l'eau qui reçoit l'influence de la lumière, se réduisent à leur pied de rouille, est bien remarquable pour faire apprécier l'influence des circonstances de lumière ou d'obscurité, celle du contact de la vapeur d'eau et de l'air, ou de l'eau liquide et de l'air.

L'eau dans laquelle les étoffes ont séjourné pendant dix-huit mois, était d'un jaune verdâtre, très-légèrement alcaline au papier rouge de tournesol; elle donnait du bleu de Prusse

d'une belle couleur, avec le sulfate de peroxyde de fer, et troublait à peine le chlorure de barium.

Exposée à l'air, elle laissa précipiter du bleu de Prusse, et cristallisa en cristaux microscopiques, qui m'ont paru un mélange de cyano-ferrite de calcium et de cyano-ferrite de sodium. Ils coloraient l'eau en jaune et précipitaient le sulfate de peroxyde de fer en très-beau bleu violet. Cette solution rougissait légèrement le papier de tournesol. Elle contenait une trace de matière organique.

6° Dans le vide obscur séché par le chlorure de calcium, les couleurs du coton, de la soie, ne s'affaiblissent qu'excessivement peu en perdant du violâtre. La couleur de la laine s'affaiblit moins encore.

7° Dans le vide obscur séché par l'acide sulfurique, l'affaiblissement de la couleur en verdâtre est un peu plus sensible que dans le vide séché par le chlorure de calcium.

Les étoffes qui ont été ainsi modifiées dans les deux vides (6° et 7°), exposées pendant quinze jours à l'atmosphère, reprennent le ton et le violâtre qu'elles avaient pu perdre dans le vide; j'ai même remarqué que le coton et la soie pouvaient dépasser les normes n° 1.

RÉSUMÉ.

68. 1° Les étoffes colorées en bleu de Prusse, exposées au vide sec ou humide lumineux, perdent leur couleur bleue. Si elles étaient foncées, elles deviennent brunes, en abandonnant du cyanogène ou de l'acide hydrocyanique; si elles étaient claires, elles deviennent d'un gris nankin, dont le ton est plus bas que ne le serait celui du

peroxyde de fer pur équivalent au bleu de Prusse fixé sur l'étoffe : c'est ce qui explique pourquoi les étoffes de soie et de coton d'un bleu clair qui, dans le vide lumineux, sont devenues d'un ton léger de couleur nankin, peuvent paraître blanches si on ne les compare pas à des étoffes réellement blanches.

2° Les étoffes qui ont perdu leur couleur bleue dans le vide lumineux ont besoin de l'oxygène pour la reprendre.

3° S'il paraît conséquent à ces faits et à nos connaissances actuelles sur la composition du bleu de Prusse, d'admettre que le percyanure, sous l'influence de la lumière, devient protocyanure, et que le protocyanure repasse au bleu en produisant du peroxyde de fer, cependant lorsqu'on prend en considération le peu de différence qu'on observe entre la couleur des échantillons de coton et de soie qui ont été décolorés et recolorés cinq fois consécutivement, et celle de leurs normes, il semble que la quantité de cyanogène séparée dans chaque exposition au soleil, ne doit pas représenter tout le cyanogène que le percyanure du bleu de Prusse devrait abandonner pour constituer du protocyanure. D'un autre côté, il n'est pas possible d'admettre que 3 atomes d'oxygène nécessaire à la coloration de neuf atomes de protocyanure produisent un atome de peroxyde de fer pour un atome de bleu de Prusse régénéré ; car, s'il en était ainsi, les étoffes de coton ou de soie décolorées et recolorées cinq fois devraient différer beaucoup de leurs normes, et l'acide hydrochlorique qu'on y applique devrait en séparer du peroxyde de fer.

4° La décoloration que des étoffes teintes en bleu de Prusse éprouvent dans le vide par une température de 175^d, 180^d, à

185[d] est accompagnée d'un dégagement de cyanogène ou plutôt d'acide hydrocyanique, comme l'est la décoloration qu'elles auraient éprouvée dans le vide lumineux ; mais il y a cette différence que, dans le premier cas, au lieu de la couleur nankin gris ou de la couleur brune des étoffes exposées au soleil, elles ont une couleur de rouille bien prononcée, et que l'acide hydrochlorique en sépare du peroxyde de fer, après qu'elles se sont recolorées sous l'influence de l'oxygène.

5° L'affaiblissement de la couleur des étoffes teintes en bleu de Prusse qui reçoivent une forte insolation, et leur recoloration dans l'obscurité avec le contact de l'air, sont expliqués par les observations précédentes.

6° La décoloration des étoffes teintes en bleu de Prusse s'opère assez rapidement dans l'eau privée d'air et exposée à la lumière. Cette décoloration a lieu sans dégagement de gaz ; mais on trouve du cyanogène ou de l'acide hydrocyanique dans l'eau. Le contact de l'oxygène est aussi nécessaire pour recolorer en bleu les étoffes décolorées dans l'eau, que pour recolorer celles qui ont perdu leur bleu dans le vide lumineux et dans le vide chaud.

7° Si les étoffes sont exposées à la lumière dans de l'eau aérée, il arrive une époque où tout le fer est changé en peroxyde.

8° Les étoffes teintes en bleu de Prusse exposées à l'eau bouillante, perdent leur bleu sans dégagement de gaz ; il se produit de l'acide hydrocyanique et de l'ammoniaque, et probablement de l'acide formique. En prolongeant l'opération, tout le fer qui reste fixé à l'étoffe peut être converti en peroxyde.

Il y a décomposition d'eau dans cette réaction, puisqu'il

se forme de l'acide hydrocyanique, de l'ammoniaque et du peroxyde de fer.

9° L'eau froide peut décolorer une étoffe teinte en bleu de Prusse; mais, dans mes expériences, je ne puis faire la part de l'influence que la lumière diffuse a pu avoir, et celle qu'a exercée la petite quantité d'alcali contenue dans l'eau distillée employée.

10° Les étoffes de soie teintes par un procédé que j'ai décrit en 1826, présentent le fait remarquable de n'atteindre à la hauteur de leur ton qu'au bout de dix-huit à trente jours d'exposition à l'air. Deux causes au moins ont de l'influence sur ce résultat; premièrement la dessiccation, et deuxièmement l'oxygène atmosphérique; enfin, s'il existe dans l'atmosphère de l'ammoniaque, celle-ci a une influence marquée pour violeter la couleur. N'y a-t-il pas quelque analogie entre l'action de l'oxygène qui exalte la couleur jaune de la solution aqueuse de cyanoferrite de cyanure de potassium, et celle de l'oxygène augmentant le ton du bleu de Prusse dans la circonstance dont je viens de parler?

69. Je ferai remarquer, relativement à l'influence de l'oxygène pour élever le ton du bleu de Prusse, qu'il n'en faut qu'une très-petite quantité, et que l'action exercée par le gaz me paraît se rattacher à une classe particulière de phénomènes très-nombreux, dont l'étude n'a point encore été suffisamment approfondie, dans la préoccupation où l'on est généralement aujourd'hui des *actions de présence*, ou de l'*isomérisme*. Effectivement, n'est-il pas des cas où un corps en ne se combinant avec un autre qu'en une faible quantité, donne lieu à un phénomène qu'on attribue à sa seule présence, tandis qu'il y a réellement combinaison? N'existe-t-il pas aujour-

d'hui des composés que l'on considère comme *isomères*, qui, dans la réalité, diffèrent l'un de l'autre par une très-faible quantité d'un des éléments?

REMARQUE FINALE.

70. Dans l'étude que je viens de faire du bleu de Prusse, je distingue deux circonstances principales où ce composé a perdu sa couleur bleue :

1° celle où il a subi l'action de la lumière dans le vide;

2° celle où il a subi
- (*a*) l'action de la chaleur dans le vide;
- (*b*) l'action de la chaleur dans l'eau;
- (*c*) l'action de la lumière dans l'eau.

71. Entre les deux circonstances la différence est grande; car, dans la première, un même échantillon de coton ou de soie teint en bleu de Prusse, qui a perdu sa couleur bleue, peut la reprendre, et cela cinq fois successivement sans éprouver d'affaiblissement notable : je n'ai donc jamais observé que le bleu de Prusse, dans le vide lumineux, ait éprouvé une altération assez profonde pour qu'il ne revînt pas à son premier état par le contact de l'oxygène. Dans la seconde circonstance, au contraire, il arrive que si le bleu de Prusse ne laisse pas sur l'étoffe du peroxyde de fer pur, il en laisse cependant toujours une quantité notable que l'acide chlorhydrique peut dissoudre à l'exclusion de la quan-

tité de fer qui n'a pas été décyanurée. Mais je n'affirmerai pas plus que la lumière dans le vide est incapable à la longue d'altérer profondément le bleu de Prusse, que je n'affirmerai qu'il est impossible d'obtenir dans l'eau, sous l'influence de la chaleur ou de la lumière, le même produit que dans le vide lumineux.

PREMIÈRE CIRCONSTANCE.

72. Le bleu de Prusse fixé sur une étoffe subit pour l'œil dans le vide un extrême changement ; il passe au jaune gris, puis au brun, en perdant, à ce qu'il paraît, une faible quantité de cyanogène ; et par le contact de l'oxygène, corps autre que celui qu'il a perdu, il redevient bleu : voilà le fait. Mais qu'arrive-t-il si l'oxygène est réellement absorbé? Se forme-t-il de l'oxyde de fer? ou bien, considérant le bleu de Prusse comme un composé d'oxygène, d'azote, de carbone, d'hydrogène et de fer, faut-il admettre qu'il perd dans le vide lumineux une fraction de ses éléments à l'état de cyanogène, et que cette fraction peut être remplacée par une fraction équivalente d'oxygène, sans que, pour cela, le composé perde sa couleur bleue? Faut-il admettre encore, conséquemment à cette manière de voir, qu'une quantité donnée de bleu de Prusse pourrait, avant de constituer une matière stable dans le vide lumineux, présenter un certain nombre de composés bleus, dans lesquels du cyanogène serait remplacé par de l'oxygène, sans qu'il se produisît d'oxyde de fer distinct du fer cyanuré? Quoi qu'il en soit de ces deux hypothèses, les quantités du cyanogène éliminé et de l'oxygène absorbé *pa-*

raissent si petites, que la disparition de la couleur du bleu de Prusse sous l'influence du vide lumineux semblerait dépendre autant d'un arrangement particulier des molécules que d'une perte de cyanogène, comme la réapparition de la couleur bleue dépendrait autant d'un retour à l'arrangement primitif que de la fixation de l'oxygène.

73. Mais ces hypothèses ne sont pas les seules imaginables ; car en les présentant, j'ai admis implicitement la non-intervention des éléments des étoffes dans le phénomène; or, cette non-intervention restant à démontrer, il faudra voir si le bleu de Prusse, appliqué, par exemple, sur de la porcelaine vernissée, perdra sa couleur bleue dans le vide lumineux, comme cela lui arrive quand il est fixé à la soie ou au coton : cette recherche pouvant se faire sur une quantité de bleu de Prusse bien plus grande que celle qui se trouve sur les étoffes, on conçoit, si la décoloration a lieu, la possibilité de recourir à la balance pour constater si le phénomène dépend réellement du dégagement d'une quantité *pondérable* de cyanogène ou d'acide hydrocyanique, et si la recoloration en bleu de la matière qui aura perdu sa couleur, est la conséquence de la combinaison d'une quantité d'oxygène pareillement *pondérable*.

74. J'ai dit plus haut (6) *que la décoloration du bleu de Prusse étant plus rapide dans le vide humide que dans le vide sec, je n'ai pas attribué le phénomène à une déshydratation*. Cependant, il ne résulte pas nécessairement de ce que la décoloration s'opère dans le vide humide, qu'elle n'est pas due à une déshydratation ; car il ne serait pas absolument impossible que l'existence de la combinaison de l'eau avec le bleu de Prusse ne fût pas plus compatible, sous l'influence

de la lumière, dans le vide même en présence de la vapeur d'eau, que la combinaison de l'eau avec le deutoxyde de cuivre n'est possible au sein de l'eau chaude de 98 à 100[d] ; mais l'hypothèse de la déshydratation devrait être absolument rejetée, s'il était démontré que le bleu de Prusse décoloré reprend sa couleur bleue par le contact du gaz *oxygène absolument sec.* Malheureusement, dans les expériences décrites précédemment (10 et 11), où l'oxygène avait été en contact avec du chlorure de calcium, et même de l'acide sulfurique, où l'on opérait avec du bleu de Prusse fixé sur du coton ou de la soie, et dans des flacons fermés avec du liége, on ne peut avoir la certitude que toute eau ait été exclue des matières réagissantes. C'est donc d'après cette dernière considération que *je ne puis maintenant exclure absolument l'hypothèse d'après laquelle la décoloration du bleu de Prusse serait due à une perte d'eau de combinaison, et la recoloration en bleu à une simple hydratation.*

75. Enfin, il reste à voir encore si le bleu de Prusse ne perdrait pas sa couleur bleue en s'hydrogénant, et s'il ne la reprendrait pas par le contact de l'oxygène, ou même du chlore, en donnant lieu à une formation d'eau ou d'acide hydrochlorique. Dans cette hypothèse, comme dans celle de l'hydratation ou de la déshydratation, on comprendrait très-bien comment une quantité donnée de bleu de Prusse peut être décolorée et recolorée cinq fois, sans éprouver d'altération notable.

DEUXIÈME CIRCONSTANCE.

76. Je suis très-porté à croire que le bleu de Prusse fixé sur une étoffe de coton ou de soie, éprouve, dans la seconde circonstance, la modification qu'il subit dans la première; mais le contact de l'eau, en présentant incessamment au fer et au cyanogène, sous l'influence de la lumière et de la chaleur, de l'oxygène et de l'hydrogène, tend à altérer radicalement le bleu de Prusse, en donnant naissance à du peroxyde de fer, de l'acide cyanhydrique et de l'ammoniaque.

NOTE DE M. CHEVREUL.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU BLEU DE PRUSSE,

RELATIVE AU RENVOI DE LA PAGE 518.

Je pensais, lorsqu'on imprimait le Mémoire qu'on vient de lire, que quelques jours suffiraient aux recherches nécessaires à la rédaction définitive de cette note; mais ayant voulu répéter d'anciennes expériences, les résultats obtenus de divers échantillons de bleu de Prusse préparés autrefois dans mes laboratoires, ont été assez différents, pour me déterminer à renvoyer cette rédaction au volume suivant des Mémoires de l'Académie, afin de pouvoir alors indiquer à mes lecteurs, avec certitude, que telle expérience décrite se rapporte à un bleu de Prusse préparé par un tel procédé.

En attendant, je vais résumer un certain nombre de faits que j'ai observés depuis six ans, et que j'ai tout lieu de croire exacts.

100 parties d'un bleu de Prusse, qui était resté quatre ans dans le vide sec, avaient absorbé, au bout de 15 jours, à l'atmosphère, 11 p. d'eau; au bout de trois mois 1/2, dans l'air saturé de vapeur d'eau, 17,5.

100 parties d'un bleu de Prusse, qui était resté quatre ans dans le vide sec, chauffées graduellement dans le vide, ont donné les résultats suivants :

A 125 d	Eau	5,78
	Acide cyanhydrique	1,00
De 160 à 180 d	Eau	1,90
	Acide cyanhydrique	5,90

Le résidu avait perdu sa couleur bleue sans produire de gaz permanent.

A 270 d	Acide carbonique, Oxyde de carbone, Azote, Hydrogène	5,84
Residu		79,58
		100,00

Je suis porté à croire que le bleu de Prusse distillé dans le vide, ne donne pas d'ammoniaque lorsqu'il a été chauffé assez graduellement pour que tout l'oxygène et l'hydrogène susceptibles de se dégager à l'état d'eau à une température T, l'aient été effectivement à cette température T, avant qu'on la dépasse.

Le bleu de Prusse tenu dans l'eau bouillante, hors du contact de l'air, se réduit en peroxyde de fer pur, en acide cyanhydrique, en ammoniaque pure sans dégager de gaz insoluble dans l'eau et sans quantité notable d'acide carbonique.

Le bleu de Prusse, décoloré dans le vide par une température convenable, redevient bleu dans le gaz oxygène, et ce bleu décoloré, mis, sans l'intervention de l'oxygène atmosphérique, en contact avec l'acide chlorhydrique, se colore sur-le-champ, par la raison que l'oxygène du peroxyde de fer mis à nu dans la distillation réagit sur la masse du bleu de Prusse décoloré, comme l'aurait fait l'oxygène atmosphérique; mais il y a cette différence, que le bleu de Prusse reproduit sous l'influence de l'acide, ne contient pas de peroxyde de fer comme le bleu de Prusse décoloré qui a repris sa couleur par le contact de l'air.

L'explication précédente s'accorde avec l'expérience que j'ai faite souvent, que le *bleu de Prusse blanc* (obtenu du mélange de cyanoferrite de cyanure de potassium avec un sel de protoxide de fer) agité avec la solution d'un sel de peroxyde de ce métal, devient bleu sur-le-champ en ramenant le peroxyde à l'état de protoxyde.

MÉMOIRE

SUR LA VARIATION

DES

CONSTANTES ARBITRAIRES,

COMME L'ONT ÉTABLIE, DANS SA GÉNÉRALITÉ,

LES MEMOIRES DE LAGRANGE,

Du 22 août 1808 et du 13 mars 1809,

ET CELUI DE POISSON,

Du 16 octobre suivant.

Lu à l'Académie des sciences, le 3 juin 1844,

PAR M. FRÉD. MAURICE.

La considération de la variation des éléments des orbites planétaires fut d'abord employée par Euler dans ses travaux sur la théorie de la lune et sur celle des planètes. Plus tard, Lagrange la fit remonter d'une manière plus générale, à la variation des arbitraires entrant dans les intégrales premières des orbites regardées d'abord comme elliptiques ; mais ce ne fut qu'en 1808, après un beau théorème démontré par Poisson, et qui réveilla, pour ainsi dire, le génie de Lagrange, que cet homme illustre éleva cette théorie à toute sa généralité.

Un des résultats les plus importants auxquels il parvint alors, lui permit de s'assurer que : dans les expressions générales et symétriques des différentielles des six éléments regardés comme les arbitraires de la question, expressions où l'on voit chaque terme affecté d'une dérivée partielle de la fonction perturbatrice par rapport à chacun de ces éléments, à l'exception toutefois de celui dont la différentielle est alors considérée, tous les coefficients de ces dérivées devaient être absolument indépendants du temps. — Tel fut le mémorable résultat consigné et démontré pour la première fois dans le mémoire lu par Lagrange à l'Académie le 22 août 1808, deux mois après celui où Poisson avait démontré l'invariabilité des moyens mouvements, même en ayant égard au second ordre des masses.

Chacun de ces grands géomètres est revenu sur cette importante théorie, qui, d'abord restreinte aux applications qu'on peut en faire au système du monde, fut ensuite transportée par Lagrange à tous les cas que peut présenter la mécanique rationnelle, et enfin rigoureusement établie, d'une manière directe, par Poisson, qui se montra son digne émule en faisant voir de plus l'avantage qu'elle offrait, sous cette forme, pour l'étude des mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité.

Mais, dans aucun de ses écrits, Lagrange n'a fait connaître par quelle voie il avait été conduit à pressentir la vérité du théorème principal de cette théorie nouvelle dont nous avons plus haut rapporté l'énoncé. Dès le début de son premier mémoire, on le voit s'engager dans une série de calculs symétriques et élégants, mais assez compliqués, qui peuvent fort bien convenir pour *la démonstration* d'une vérité *connue,*

et qui semblent, au contraire, peu propres à la faire découvrir par celui qui n'en aurait aucune idée préalable.

Dès lors la curiosité des géomètres paraît s'être surtout concentrée sur la nouveauté comme sur la beauté des résultats, et l'on n'a rien écrit, à ma connaissance, sur *l'histoire* d'une découverte si remarquable. On aurait pu espérer que son illustre auteur, toujours si empressé à présenter l'analyse des idées importantes de ses prédécesseurs ou de ses émules, et de celles qui lui étaient propres, se serait chargé lui-même d'exposer l'origine des considérations qui l'avaient dirigé; mais cet espoir n'a été directement satisfait dans aucune de ses productions.

Cependant, après beaucoup de recherches à ce sujet, j'ai fini par remarquer un passage du tome II de la *Mécanique analytique*, où l'auteur met vraiment sur la voie des idées qui l'ont conduit. On lit en effet dans ce volume, aux pages 79 et 80, que dans le cas où les forces perturbatrices sont, comme dans la nature, exprimées par les différences partielles de la fonction perturbatrice générale, prises relativement aux trois coordonnées, « les variations des éléments « peuvent s'exprimer d'une manière plus simple en employant, « au lieu de ces différences partielles, celles qui sont relatives « aux éléments, après que l'on a remplacé les coordonnées « par leurs valeurs en fonction du temps et de ces mêmes « éléments; et que *c'est cette considération qui a fait « naître la nouvelle théorie* de la variation des constantes « arbitraires. »

On verra, j'espère, combien cette donnée est avantageuse pour faire retrouver une marche naturelle conduisant au grand résultat dont nous parlons. Le fil des idées se

trouvera rétabli là où il semblait rompu jusqu'à présent.

Un travail semblable, et plus difficile, suivra celui que nous venons d'annoncer; il se rapportera à cette théorie directe que donna Poisson en octobre 1809. Jusqu'ici elle n'a été présentée que sous la forme d'une synthèse aussi savante que profonde; mais nous espérons montrer aussi comment elle se rattache naturellement à l'analyse lumineuse de Lagrange. Ce sera, en quelque sorte, le commentaire de cette phrase de la *Mécanique analytique,* où l'auteur, parlant de la démonstration directe de Poisson, s'exprime ainsi : « On ne se serait peut-être jamais avisé de la chercher, si l'on « n'avait été assuré d'avance de la vérité de ce théorème (tome « II, page 185). »

I. Analyse des premières recherches de Lagrange sur la théorie *générale* de la variation des constantes arbitraires.

1. Considérons une planète m en mouvement autour du soleil. En désignant par V la fonction $-\frac{\mu}{r}$, où μ est la somme des masses du soleil et de la planète, et r le rayon vecteur de l'orbite de m, on sait que les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dV}{dx}=\frac{dR}{dx},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dV}{dy}=\frac{dR}{dy},\qquad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dV}{dz}=\frac{dR}{dz},\ldots(1)$$

où R est le symbole représentant la fonction perturbatrice; et que les trois forces qui en dérivent pour troubler le mouvement de m, lesquelles forment les seconds membres de ces équations, seront toujours fort petites relativement à la force principale.

Si l'on fait d'abord abstraction de la fonction R, et que l'on représente par x', y' et z' les vitesses de m, les équations (1) prendront évidemment les formes suivantes :

$$\frac{dx'}{dt} + \frac{dV}{dx}.dt = 0, \quad \frac{dy'}{dt} + \frac{dV}{dy}.dt = 0, \quad \frac{dz'}{dt} + \frac{dV}{dz}.dt = 0, \ldots (2)$$

et l'on sait en déterminer les intégrales complètes qui renfermeront six constantes arbitraires, a, b, c, f, g, h. On pourra donc exprimer chacune de celles-ci en fonction du temps t et des six variables x, y, z, x', y', z'; et, réciproquement, tirer de ces six intégrales les expressions de chacune des six variables en fonctions du temps et des constantes $a, b, \ldots h$: en sorte que si l'on substitue ces dernières expressions dans les équations (2), le temps t et ces constantes devront s'y détruire identiquement; autrement il en résulterait pour celles-ci de nouvelles valeurs : ce qui serait absurde.

2. On voit par là que ces constantes seront de véritables *arbitraires*, et qu'on pourra par conséquent les faire varier. Si donc on rétablissait la considération des forces perturbatrices ou des seconds membres des équations (1), on pourrait satisfaire à la présence de ces termes, en conservant les notations des équations (2), si l'on admettait que les constantes arbitraires comprises dans les expressions de x', y' et z' viennent à varier; et si l'on représentait, par suite de cette supposition, les différentielles dx', dy' et dz' par les nouvelles expressions $dx' + \delta x'$, $dy' + \delta y'$, $dz' + \delta z'$: les symboles $\delta x'$, $\delta y'$ et $\delta z'$ désignant le résultat de la variation des constantes, ou des éléments de l'orbite, dans les fonctions qui expriment les valeurs des variables x', y' et z'.

On obtiendrait ainsi les trois équations

$$\left. \begin{array}{c} dx' + \frac{dV}{dx}.dt + \delta x' = \frac{dR}{dx}.dt, \quad dy' + \frac{dV}{dy}.dt + \delta y' = \frac{dR}{dy}.dt, \\ dz' + \frac{dV}{dz}.dt + \delta z' = \frac{dR}{dz}.dt, \end{array} \right\} \ldots (3)$$

lesquelles, en vertu des équations (2), se réduiraient à la forme plus simple

$$\delta x' = \frac{dR}{dx}.dt, \qquad \delta y' = \frac{dR}{dy}.dt, \qquad \delta z' = \frac{dR}{dz}.dt \ldots . (4)$$

3. Il résulte de cette analyse que, durant l'instant dt, les valeurs des coordonnées ne seront point affectées par l'action des forces perturbatrices ; mais, pour l'instant suivant, ces valeurs et celles des vitesses de m dépendront des nouveaux éléments de l'ellipse décrite par le mobile, lesquels résulteront des variations subies, et que les équations (4) permettront de calculer. De cette manière, la planète sera censée se mouvoir à chaque instant dans une ellipse à éléments variables, et toutes ces courbes pourront être considérées comme successivement osculatrices les unes des autres ; et, en effet, l'on a reconnu depuis longtemps que les éléments des orbites planétaires sont en général variables : en sorte qu'il serait permis d'avancer que c'est l'observation elle-même qui a conduit les géomètres à la considération que nous exposons.

L'on peut, au surplus, s'assurer par le calcul que les valeurs de x, y, z ne sont point altérées, durant un instant déterminé, par l'action des forces perturbatrices, et l'on peut lire tous les détails de cette vérification dans les pages 77-79 du tome IIe de la *Mécanique analytique.* Mais ce point nous semble déjà suffisamment établi par l'idée fondamentale de l'analyse que nous présentons en ce moment.

4. Rappelons-nous maintenant qu'avant d'écrire son Mémoire du 22 août 1808, Lagrange savait qu'on pouvait obtenir les variations des éléments au moyen des différences partielles de la fonction perturbatrice prises par rapport aux éléments, et multipliées par des coefficients constants : Poisson venant d'assigner une pareille forme à la variation de l'*époque*, la seule entre celles des éléments qu'Euler et Lagrange n'y eussent pas ramenée. Ces différences partielles de R pouvaient donc elles-mêmes s'exprimer par les variations des éléments, multipliées par des coefficients également constants. Telle fut la propriété remarquable dont Lagrange fut frappé, et dont il entreprit de donner une démonstration générale. Il y parvint dès ce premier Mémoire, pour la question des mouvements planétaires qu'il avait d'abord en vue; et plus tard, en mars 1809, il l'étendit à toutes les questions analogues qui peuvent faire l'objet de la mécanique rationnelle.

Lagrange savait, en effet, qu'en partant de l'intégrale des forces vives qui se présente sous la forme

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+2V=2h+2\int\left(\frac{dR}{dx}dx+\frac{dR}{dy}dy+\frac{dR}{dz}dz\right),$$

où h, égal à $\frac{\mu}{a}$, désigne la constante arbitraire, on pouvait représenter l'effet des forces perturbatrices par la variation de cette constante, lorsqu'on posait

$$dh=\frac{dR}{dx}dx+\frac{dR}{dy}dy+\frac{dR}{dz}dz.$$

Il savait encore que le second membre de cette équation pouvait être considéré, dans les théories planétaires, comme une différentielle exacte relativement aux coordonnées du corps

troublé, et qu'en exprimant celles-ci par leur valeur en fonction du temps nt, c'est-à-dire, du mouvement moyen de m, cette équation, qui revenait alors à celle-ci : $dh = \frac{dR}{ndt} ndt$, pouvait encore s'écrire ainsi : $dh = \frac{dR}{dc} . ndt$; car R étant une fonction de $(nt + c)$, l'on a toujours $\frac{dR}{ndt} = \frac{dR}{dc}$. Il avait en effet rigoureusement établi ces divers points dans son Mémoire de 1776, *sur l'altération des moyens mouvements des planètes*.

C'était donc une idée assez naturelle que de reprendre les équations (4), et de chercher à préparer leur somme de manière à ce que les différences partielles de R, relativement aux coordonnées, pussent être transformées en différences partielles de la même fonction par rapport à chacun des éléments. Pour cela, il imagina d'introduire un symbole particulier qu'il désigna par Δ, destiné à indiquer la variation subie par la quantité qu'il précéderait en vertu de la variation d'un seul des éléments dont cette quantité serait une fonction : le symbole δ demeurant affecté à la variation résultante de celle de tous les éléments.

5. Dans ce but, il n'était pas difficile de prévoir qu'en multipliant par Δx, Δy, Δz, respectivement, chacune des équations (4), l'on obtenait par l'addition des produits la relation fort simple :

$$\Delta x . \delta x' + \Delta y . \delta y' + \Delta z . \delta z' = \left(\frac{dR}{dx} . \Delta x + \frac{dR}{dy} . \Delta y + \frac{dR}{dz} . \Delta z\right) . dt = \Delta . R . dt, \ldots (5)$$

équation dans laquelle admettant, par exemple, que le symbole Δ soit relatif à la variation de l'élément a, seulement,

ΔR s'exprimerait par $\frac{d\text{R}}{da}da$, Δx par $\frac{dx}{da}da$, et ainsi des autres.

Ce qu'il y avait donc à démontrer généralement, c'était que la valeur de $\Delta\text{R}.\,dt$ était constante, c'est-à-dire, indépendante du temps: en sorte que la différentielle d de cette valeur, ce symbole étant exclusivement consacré aux différentielles relatives au temps t, devait être nulle. Mais, pour y pouvoir parvenir, il fallait nécessairement recourir à quelque autre combinaison des variations qui composent l'expression de $\Delta\text{R}.\,dt$; car celle qui forme le premier membre de l'équation (5) n'offrant que des termes tous positifs, ne pouvait, lorsqu'elle aurait été différentiée, s'annuler en général dans tous les cas.

6. Une combinaison favorable au but qu'on avait alors à poursuivre ne devait pas tarder à s'offrir à un analyste aussi exercé, contemplant les équations (2) relatives à l'orbite non troublée. On voit en effet assez promptement qu'en les multipliant respectivement, d'abord par Δx, Δy, Δz, et ensuite par δx, δy, δz, l'on obtient par la somme des premiers produits, et par la somme des seconds, les deux équations

$$\Delta x.dx' + \Delta y.dy' + \Delta z.dz' + \Delta\text{V}.dt = 0,$$
$$\delta x.dx' + \delta y.dy' + \delta z.dz' + \delta\text{V}.dt = 0;$$

et il était bien évident qu'en retranchant de la première, différentiée par rapport à δ, la seconde qu'on aurait aussi différentiée par rapport à Δ, le dernier terme en V disparaîtrait, à cause de l'indépendance mutuelle des symboles d'opération δ et Δ.

L'on parvient donc de cette manière à la relation

$$\delta(\Delta x.dx') - \Delta(\delta x.dx') + \delta(\Delta y.dy') - \Delta(\delta y.dy') + \delta(\Delta z.dz') - \Delta(\delta z.dz') = 0,$$

ou, en développant et réduisant, à cause de $\delta\Delta x = \Delta\delta x$, et d'autres égalités pareilles, à la suivante :

$$\Delta x.d\delta x' - \delta x.d\Delta x' + \Delta y.d\delta y' - \delta y.d\Delta y' + \Delta z.d\delta z' - \delta z.d\Delta z' = 0 \ldots (6)$$

Mais l'on a :

$$\Delta x.d\delta x' = d(\Delta x.\delta x') - \Delta dx.\delta x' = d(\Delta x.\delta x') - \Delta x' dt.\delta x',$$
$$\delta x.d\Delta x' = d(\delta x.\Delta x') - \delta dx.\Delta x' = d(\delta x.\Delta x') - \delta x' dt.\Delta x',$$

et quatre autres équations pareilles en y et en z.

Donc, en substituant dans l'équation (6), et remarquant que les derniers termes $\Delta x'.\delta x'.dt$, $\delta x'.\Delta x'.dt$, et leurs analogues en y et en z, se détruisent par l'opposition de leurs signes, cette équation (6) peut se mettre sous la forme

$$d(\Delta x.\delta x' - \delta x.\Delta x' + \Delta y.\delta y' - \delta y.\Delta y' + \Delta z.\delta z' - \delta z.\Delta z') = 0,$$

sous laquelle elle s'intègre immédiatement, et donne pour résultat :

$$\Delta x.\delta x' + \Delta y.\delta y' + \Delta z.\delta z' - (\delta x.\Delta x' + \delta y.\Delta y' + \delta z.\Delta z') = const \ldots (7)$$

7. Or, nous avons vu tout à l'heure que la variation des éléments, durant un instant déterminé, n'entraîne point celle des coordonnées ; il s'ensuit donc nécessairement que

$$\left.\begin{aligned}
\delta x &= \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db + \ldots + \frac{dx}{dh}dh = 0,\\
\delta y &= \frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db + \ldots + \frac{dy}{dh}dh = 0,\\
\delta z &= \frac{dz}{da}da + \frac{dz}{db}db + \ldots + \frac{dz}{dh}dh = 0;
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)$$

et ces trois conditions, jointes à celles que nous avons désignées par (4), présenteront alors les six équations du premier ordre qui seront les intégrales premières de la question.

L'on pourra donc, en vertu des équations (8), ajouter au premier membre de l'équation (5), sans en changer la valeur, les termes négatifs du premier membre de l'équation (7), ce qui rendra ces deux premiers membres parfaitement identiques; et comparant alors les seconds membres qui doivent être égaux entre eux, l'on obtiendra cet important résultat:

$$\Delta R.dt = \Delta x.\delta x' - \delta x.\Delta x' + \Delta y.\delta y' - \delta y.\Delta y' + \Delta z.\delta z' - \delta z.\Delta z' \ldots (9)$$

c'est-à-dire, si Δ se rapporte à la variation de a, l'équation

$$\frac{dR}{da}\, da\,.\,dt = constante \ldots\ldots\ldots\ldots (9)'$$

Et comme il est évident qu'en appliquant le symbole Δ à la variation des cinq autres éléments, on obtiendrait encore cinq équations analogues à la dernière, savoir $\frac{dR}{db}\, db\,.\,dt =$ *constante*, et quatre autres équations pareilles pour les éléments c, f, g, h, il s'ensuit qu'en faisant la somme de ces six équations, ce qui revient à considérer la variation δ de R par rapport à tous les éléments, l'on aurait:

$$\delta R\,.\,dt = constante \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

8. Nous apprenons par là que la fonction R des masses et des éléments, dont les différences partielles relatives aux coordonnées expriment les forces perturbatrices agissant dans le sens des trois axes, a la propriété fort remarquable que sa variation, par rapport aux seuls éléments, est elle-même indépendante du temps. Nous verrons même sous peu que cette variation est nulle : ce qui tient à ce que l'orbite demeure constante pendant l'instant dt, et ne varie qu'au passage de cet instant au suivant. Mais la conséquence la plus

importante du résultat auquel nous venons de parvenir, est celle-ci : c'est que, dans les fonctions de la nature de celle qui forme le premier membre de l'équation (7), et qui représentent les valeurs de la variation $\Delta R.dt$, quel que soit l'élément qui soit censé varier en vertu de l'opération dont Δ est le symbole, si l'on substitue dans leur expression les valeurs des coordonnées et des vitesses en fonctions du temps t et des constantes arbitraires, il est permis d'y faire ensuite le temps t ou nul, ou égal à une constante quelconque : puisqu'il a été généralement démontré que chacune de ces fonctions devait être indépendante de la variable t.

9. Voyons à présent de plus près ce que devient cette valeur de $\Delta.R.dt$, lorsqu'on spécifie l'opération indiquée par le signe Δ, et qu'on remplace δx, $\delta x'$,....$\delta z'$, par leurs valeurs développées.

Si Δ indique une variation relative au seul élément a, l'on aura

$$\Delta.R = \frac{dR}{da}\,da, \qquad \Delta x = \frac{dx}{da}\,da, \ldots \Delta z' = \frac{dz'}{da}\,da,$$

et toute l'équation (9) sera divisible par da.

D'ailleurs l'on a :

$$\delta x = \frac{dx}{da}\,da + \frac{dx}{db}\,db + \ldots + \frac{dx}{dh}\,dh,$$

$$\delta y = \frac{dy}{da}\,da + \frac{dy}{db}\,db + \ldots + \frac{dy}{dh}\,dh,$$

....

....

$$\delta z' = \frac{dz'}{da}\,da + \frac{dz'}{db}\,db + \ldots + \frac{dz'}{dh}\,dh;$$

si donc on fait ces diverses substitutions dans l'équation (9),

on voit bien vite que tous les termes qui multiplient *da* se détruisent identiquement. Quant aux coefficients des différentielles des cinq autres éléments, si l'on pose

$$\frac{dx}{da}\cdot\frac{dx'}{db}-\frac{dx}{db}\cdot\frac{dx'}{da}+\frac{dy}{da}\cdot\frac{dy'}{db}-\frac{dy}{db}\cdot\frac{dy'}{da}+\frac{dz}{da}\cdot\frac{dz'}{db}-\frac{dz}{db}\cdot\frac{dz'}{da}=[a,b],$$

$$\frac{dx}{da}\cdot\frac{dx'}{dc}-\frac{dx}{dc}\cdot\frac{dx'}{da}+\frac{dy}{da}\cdot\frac{dy'}{dc}-\frac{dy}{dc}\cdot\frac{dy'}{da}+\frac{dz}{da}\cdot\frac{dz'}{dc}-\frac{dz}{dc}\cdot\frac{dz'}{da}=[a,c],$$

. . . .

et ainsi des autres coefficients analogues, on s'assurera avec la plus grande facilité que l'on a :

$$\frac{dR}{da}\cdot dt=[a,b]db+[a,c]dc+[a,f]df+[a,g]dg+[a,h)dh\ldots(11)$$

Concevons à présent que l'opération indiquée par le symbole Δ se rapporte successivement aux cinq autres éléments b, c, f, g, h, et il sera de toute évidence que l'on obtiendra précisément de la même manière cinq nouvelles équations telles que les suivantes, lesquelles sont absolument semblables à celle que nous venons de trouver ; savoir :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dR}{db}\cdot dt&=[b,a]da+[b,c]dc+[b,f]df+[b,g]dg+[b,h]dh,\\
\frac{dR}{dc}\cdot dt&=[c,a]da+[c,b]db+[c,f]df+[c,g]dg+[c,h]dh,\\
\frac{dR}{df}\cdot dt&=[f,a]da+[f,b]db+[f,c]dc+[f,g]dg+[f,h]dh,\\
\frac{dR}{dg}\cdot dt&=[g,a]da+[g,b]db+[g,c]dc+[g,f]df+[g,h]dh,\\
\frac{dR}{dh}\cdot dt&=[h,a]da+[h,b]db+[h,c]dc+[h,f]df+[h,g]dg.
\end{aligned}\right\}\ldots(11)$$

L'on voit, par ces six équations, que les différences partielles de la fonction R, par rapport à chacun des éléments,

sont données par les cinq différentielles des autres éléments, affectées de coefficients constants, comme on l'a montré pour ceux qui entrent dans l'expression de $\frac{d\mathrm{R}}{da}.dt$, et comme on le prouverait d'une manière toute semblable pour les autres. Il semblerait d'abord que les 30 coefficients qui entrent dans ces expressions symétriques sont tous différents les uns des autres; mais il est aisé de s'assurer que, au signe près, il en est la moitié qui sont les mêmes que les 15 autres. Ainsi $[b, a] = -[a, b]$, et ainsi encore de tous ceux qui renferment les deux mêmes lettres écrites dans un ordre différent.

Il s'ensuit que dans $\frac{d\mathrm{R}}{db}.dt$, par exemple, la différentielle df sera multipliée par $[b, f]$, et que dans $\frac{d\mathrm{R}}{df}.dt$ la différentielle db le sera par $[f, b]$ ou $-[b, f]$. Par conséquent, si l'on forme la quantité $\left(\frac{d\mathrm{R}}{db}.db + \frac{d\mathrm{R}}{df}.df\right).dt$, il est clair que les deux différentielles db et df disparaîtront de cette expression. Donc, en étendant cette remarque, il sera facile de s'assurer que toutes les différentielles disparaîtront dans la somme

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}da + \frac{d\mathrm{R}}{db}db + \frac{d\mathrm{R}}{dc}dc + \frac{d\mathrm{R}}{df}df + \frac{d\mathrm{R}}{dg}dg + \frac{d\mathrm{R}}{dh}dh\right).dt \quad \text{ou} \quad \delta\mathrm{R}.dt.$$

Ainsi l'on aura, comme nous l'avons annoncé plus haut,

$$\delta\mathrm{R}.dt = 0;$$

équation qui renferme ce théorème remarquable, c'est que « la variation de la fonction perturbatrice, en tant qu'elle « dépend de celle que, durant un instant déterminé, subissent tous les éléments du corps troublé, doit être considérée comme nulle. »

10. Reprenons les six importantes expressions que nous venons d'obtenir.

Puisque tous les coefficients $[a, b]$, $[a, c]$, etc., doivent y être indépendants du temps t, il s'ensuit qu'après avoir substitué pour les variables qui en font partie leurs valeurs en fonction de t et des éléments, on y peut faire t nul, ou égal à une constante quelconque. Par conséquent, dans le calcul de ces coefficients, on pourra remplacer les variables $x, y, \ldots z'$ par les premiers termes de leurs expressions, qui, relatifs à leurs valeurs initiales, seront par là même indépendants du temps.

Représentons ces six valeurs initiales et constantes des coordonnées et des vitesses par les symboles $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, $\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}'$: rien ne s'opposera à ce qu'on les prenne pour les arbitraires de la question, au lieu des quantités a, b, c, f, g, h, et l'on aura

$$\frac{dx}{da}=\frac{dx}{d\mathrm{x}}=1,\qquad \frac{dy}{db}=\frac{dy}{d\mathrm{y}}=1,\qquad \frac{dz}{dc}=\frac{dz}{d\mathrm{z}}=1,$$
$$\frac{dx'}{df}=\frac{dx'}{d\mathrm{x}'}=1,\qquad \frac{dy'}{dg}=\frac{dy'}{d\mathrm{y}'}=1,\qquad \frac{dz'}{dh}=\frac{dz'}{d\mathrm{z}'}=1,$$

puisqu'il est permis de remplacer les valeurs des variables $x, y, \ldots z'$ par le terme qui s'y trouve indépendant du temps. D'ailleurs, tous les autres coefficients différentiels qui entrent dans $[a, b]$, $[a, c]$, etc., seront nuls d'eux-mêmes en vertu de la supposition qu'on vient de faire, et l'on s'assurera, par le plus léger examen, que de tous les coefficients de la forme $[a, b]$, etc., il n'en est que six qui ne s'annulent point à la suite de ces substitutions; savoir :

$$[a,f]=1=-[f,a];\quad [b,g]=1=-[g,b];\quad [c,h]=1=-[h,c].$$

D'après ces remarques, on parviendra à ces expressions d'une extrême simplicité :

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{x}}.dt = d\mathrm{x}', & \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{y}}.dt = d\mathrm{y}', & \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{z}}.dt = d\mathrm{z}', \\ \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{x}'}.dt = -d\mathrm{x}, & \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{y}'}.dt = -d\mathrm{y}, & \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{z}'}.dt = -d\mathrm{z}; \end{array}\right\}\ldots(12)$$

mais ces expressions si simples sont encore plus curieuses qu'utiles, et il est toujours préférable d'employer celles que nous avons d'abord obtenues.

11. Les constantes arbitraires $a, b, \ldots h$ que nous y avons fait entrer, ne sont pas ordinairement ainsi désignées. Il est d'usage, le plus souvent, de prendre à cet effet les *éléments* des orbites, savoir : le demi-grand axe, la constante ajoutée au moyen mouvement, l'excentricité, la longitude du périhélie, celle du nœud ascendant, l'inclinaison de l'orbite ; et de les représenter par les lettres a, c [ou $n.l$, l étant l'arbitraire ajoutée au temps dans l'intégrale de l'équation $dt = \frac{1}{n}(1 - e\cos u).du$, où $n = a^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{\mu}$], e, ϖ, α et φ. En faisant usage de ces dernières dénominations, et remplaçant encore les six variables $x, y, \ldots z'$ par leurs valeurs initiales $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots \mathrm{z}'$, puisque t ne doit point entrer dans ces substitutions, on va voir que les formules (12), malgré leur simplicité, ramèneraient les formules (11) que nous avons d'abord trouvées.

En effet, considérant R comme une fonction des quantités $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \ldots \mathrm{z}'$, et celles-ci comme des fonctions des éléments a, c, e, ϖ, α et φ, l'on aurait

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}.dt = \left(\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{x}}\cdot\frac{d\mathrm{x}}{da} + \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{y}}\cdot\frac{d\mathrm{y}}{da} + \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{z}}\cdot\frac{d\mathrm{z}}{da} + \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{x}'}\cdot\frac{d\mathrm{x}'}{da} + \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{y}'}\cdot\frac{d\mathrm{y}'}{da} + \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{z}'}\cdot\frac{d\mathrm{z}'}{da}\right).dt,$$

ou

$$\frac{dR}{da}.dt = dx'.\frac{dx}{da} + dy'.\frac{dy}{da} + dz'.\frac{dz}{da} - dx.\frac{dx'}{da} - dy.\frac{dy'}{da} - dz.\frac{dz'}{da},$$

à cause des équations (12).

Mais l'on a :

$$dx' = \frac{dx'}{da}da + \frac{dx'}{dc}dc + \frac{dx'}{de}de + \frac{dx'}{d\varpi}d\varpi + \frac{dx'}{d\alpha}d\alpha + \frac{dx'}{d\varphi}d\varphi,$$

$$dx = \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{dc}dc + \frac{dx}{de}de + \frac{dx}{d\varpi}d\varpi + \frac{dx}{d\alpha}d\alpha + \frac{dx}{d\varphi}d\varphi,$$

....

et quatre autres équations absolument analogues pour les valeurs de dy', dy, dz' et dz.

Si donc on pose

$$\frac{dx}{da}\frac{dx'}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dx'}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dy'}{dc} - \frac{dy}{dc}\frac{dy'}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dz'}{dc} - \frac{dz}{dc}\frac{dz'}{da} = [a,c],$$

$$\frac{dx}{da}\frac{dx'}{de} - \frac{dx}{de}\frac{dx'}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dy'}{de} - \frac{dy}{de}\frac{dy'}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dz'}{de} - \frac{dz}{de}\frac{dz'}{da} = [a,e],$$

et trois autres combinaisons toutes pareilles qui auront pour expressions abrégées les coefficients constants $[a, \varpi]$, $[a, \alpha]$ et $[a, \varphi]$, le produit de toutes ces substitutions donnera pour résultat

$$\frac{dR}{da}.dt = [a,c]dc + [a,e]de + [a,\varpi]d\varpi + [a,\alpha]d\alpha + [a,\varphi]d\varphi \ldots (13)$$

On peut voir de même, à cause de la marche parfaitement symétrique de tous ces calculs, que l'on obtiendrait, en partant toujours des formules (12), des expressions entièrement analogues pour les quantités $\frac{dR}{dc}.dt$, $\frac{dR}{de}.dt$, $\frac{dR}{d\varpi}.dt$, $\frac{dR}{d\alpha}.dt$ et $\frac{dR}{d\varphi}.dt$, lesquelles, ainsi que la précédente $\frac{dR}{da}.dt$, ne différeraient des formules (11) que parce que les cons-

tantes a, b,...h de ces dernières se trouveraient remplacées par les éléments de l'orbite a, c, e, ϖ, α et φ.

Il peut sembler maintenant que, pour obtenir par la formule (13) et les cinq analogues que nous nous sommes dispensé d'écrire, les valeurs de da, dc,...$d\varphi$, il faudrait procéder à des éliminations qui pourraient être pénibles; mais on verra plus tard que, pour parvenir aux expressions de ces six différentielles des éléments par les quantités $\frac{dR}{da}.dt$, etc., et les coefficients constants $[a, c]$, etc., de telles éliminations ne sont pas nécessaires, et que l'on peut même s'épargner le calcul du plus grand nombre des coefficients $[a, c]$, etc.

Ce qui précède renferme, très-probablement, l'exposition de la suite des idées de l'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, alors que, pour la première fois, il considéra dans toute sa généralité la théorie de la variation des éléments dans la question des perturbations planétaires, et qu'il parvint à l'important résultat exprimé par les équations (7) et (9).

12. Une fois arrivé là, Lagrange ne s'y arrêta point; il voulut étendre ce résultat aux autres questions que présente la mécanique rationnelle, et consigna le succès de ses recherches dans un mémoire en date du 13 mars 1809, auquel il ne tarda pas à faire une *addition*, et ensuite un *supplément*, qui donnèrent à son travail une grande simplicité.

Dans ces questions nouvelles, il fallait admettre l'existence des équations de condition auxquelles les coordonnées pouvaient être assujetties, et par lesquelles quelques-unes de

ces variables se trouvant déterminées en fonction des autres, il ne reste qu'un certain nombre de variables vraiment indépendantes, servant à déterminer à chaque instant la position du système.

Voici donc quelle fut, en général, l'analyse qu'il employa, et dont les bases se trouvaient déjà dans la section IV de la partie II de la première édition de sa *Mécanique*.

Le système total des équations différentielles du second ordre qu'introduit la considération de toute question de mécanique, comporte toujours une intégrale rigoureuse, connue sous le nom d'*intégrale des forces vives*. En effet, si l'on désigne par X, Y, Z, les résultantes des forces qui, parallèlement aux trois axes, agissent sur chaque partie m du système considéré, l'on aura, en affectant des accents convenables les forces et les coordonnées relatives aux autres parties m', m'',..., et après avoir ajouté toutes les équations du mouvement multipliées par les masses et par les différentielles des coordonnées, l'on aura, dis-je, l'équation générale

$$\Sigma . m\left(\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2}\right) = \Sigma . m(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

et en intégrant

$$\frac{1}{2}\Sigma . m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = h + \Sigma . m\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) \ldots (a)$$

L'intégrale qui est seulement indiquée dans le second membre de cette équation s'obtient toujours, au moins par les quadratures, quand les forces X, Y, Z; X', Y', Z'; etc., résultent de l'attraction mutuelle des parties du système, ou d'attractions exercées par des centres fixes, parce qu'elles ne sont

alors exprimées que par des fonctions des distances. Soit, par exemple, P la fonction de la distance p qui représente soit l'attraction de m sur m', soit celle qu'exerce un centre fixe étranger au système: dans ces deux cas, on aurait évidemment

$$X = P.\frac{dp}{dx}, \qquad Y = P.\frac{dp}{dy}, \qquad Z = P.\frac{dp}{dz},$$

et par conséquent:

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = \int Pdp.$$

Or P étant supposée une fonction de p, $\int Pdp$ peut toujours s'obtenir exactement ou par approximation; et il en serait de même de tous les termes de cette nature, réductibles à des formes analogues $\int Qdq$, etc. Donc, dans le cas où l'on n'a à considérer que des forces de ces deux espèces, ce qui arrive le plus souvent dans la nature, en nommant V le terme $\Sigma . m\int (Xdx + Ydy + Zdz)$, et T celui qui se rapporte à la demi-somme des forces vives, l'intégrale précédente, ou (a), prendra la forme

$$T - V = H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

13. Mais, s'il faut considérer des centres mobiles de forces, indépendants du système, on ne serait plus certain d'obtenir une équation comme la précédente, parce que les forces P impliquant alors le temps t dans leur expression, l'intégrale que désigne la fonction V ne s'obtiendrait pas, en général, sous une forme algébrique. Cependant Lagrange a fait voir (*Mém. du* 13 *mars* 1809, *art.* 27-31) que si l'intensité de ces forces permet de les classer seulement parmi celles qui ne font que troubler le système, et dont il est permis de ne pas

tenir compte dans une première approximation, les variations de la force vive du système produites par ces sortes de forces ne peuvent jamais croître comme le temps, mais doivent demeurer périodiques, dans le cas où les mouvements des corps du système sans les forces perturbatrices, ainsi que ceux des centres de ces forces indépendants du système, sont eux-mêmes simplement périodiques. Il prouva de plus que ce résultat avait lieu en ayant égard non-seulement aux premiers termes dus aux forces perturbatrices, mais encore à ceux qui contiendraient les carrés et les produits de ces mêmes forces.

Reprenons la considération de l'équation (b), ou $T-V=H$; et puisque l'existence des équations de condition qui représentent la liaison des parties du système ne permet plus de regarder comme indépendantes les coordonnées primitives x, y, z; x', y', z'; etc.; désignons par φ, ψ, θ, etc., celles de ces coordonnées qui seront encore indépendantes après qu'on aura tenu compte des équations de condition. D'ailleurs, comme on verra que l'analyse suivante est vraiment générale, quel que fût le nombre de ces variables, bornons-nous, pour simplifier et pour abréger les calculs, à n'en considérer que trois, φ, ψ et θ; et indiquons par φ', ψ', θ', les trois vitesses $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$.

Cela posé, dans l'équation (b) T sera une fonction de $\varphi, \psi, \theta, \varphi', \psi', \theta'$; et V, par sa nature, ne pourra être fonction que de φ, ψ, θ, et nullement de φ', ψ', θ'. Si cependant il y a des forces perturbatrices et des centres mobiles, on supposera, conformément à ce qui a été dit plus haut, qu'on peut mettre au lieu de V une fonction $V+R$, en désignant par R

la partie provenant de l'existence de ces forces. Mais si l'on fait d'abord abstraction de ce terme R, l'on aura, en prenant la différentielle complète de l'équation (b) :

$$\frac{dT}{d\varphi'}d\varphi'+\frac{dT}{d\psi'}d\psi'+\frac{dT}{d\theta'}d\theta'+\frac{dT}{d\varphi}d\varphi+\frac{dT}{d\psi}d\psi+\frac{dT}{d\theta}d\theta-\frac{dV}{d\varphi}d\varphi-\frac{dV}{d\psi}d\psi-\frac{dV}{d\theta}d\theta=0\ldots(c)$$

D'autre part, en nous reportant à la valeur générale de la fonction T, il est évident que, quel que soit le résultat des substitutions provenant du changement des coordonnées primitives, cette fonction demeurera une fonction homogène de deux dimensions des variables φ', ψ' et θ', et qu'ainsi le théorème connu, relatif à l'importante propriété de cette espèce de fonctions, donnera

$$\frac{dT}{d\varphi'}.\varphi'+\frac{dT}{d\psi'}.\psi'+\frac{dT}{d\theta'}.\theta'=2.T\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

Substituons à présent la valeur de T qui résulte de (d) dans l'équation (b), et différentions ce résultat, il donnera :

$$\left(d.\frac{dT}{d\varphi'}\right).\varphi'+\frac{dT}{d\varphi'}.d\varphi'+\left(d.\frac{dT}{d\psi'}\right).\psi'+\frac{dT}{d\psi'}.d\psi'+\left(d.\frac{dT}{d\theta'}\right).\theta'+\frac{dT}{d\theta'}.d\theta'$$
$$-2\left(\frac{dV}{d\varphi}.d\varphi+\frac{dV}{d\psi}d\psi+\frac{dV}{d\theta}d\theta\right)=0;$$

retranchant alors de cette dernière équation celle que nous avons désignée par (c), remplaçant φ', ψ' et θ' par leurs valeurs, multipliant par dt, et profitant de ce que l'indépendance complète des différentielles $d\varphi$, $d\psi$ et $d\theta$ permet d'égaler séparément à zéro leurs coefficients respectifs, l'on obtiendra les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&d.\frac{dT}{d\varphi'}-\left(\frac{dT}{d\varphi}+\frac{dV}{d\varphi}\right).dt=0,\\ d.\frac{dT}{d\psi'}-\left(\frac{dT}{d\psi}+\frac{dV}{d\psi}\right).dt=0,\quad &d.\frac{dT}{d\theta'}-\left(\frac{dT}{d\theta}+\frac{dV}{d\theta}\right).dt=0.\end{aligned}\right\}\ldots(e)$$

Ces équations peuvent recevoir une forme plus simple encore si l'on pose $T + V = Z$; car V ne renfermant ni φ', ni ψ', ni θ', l'on aura

$$\frac{dZ}{d\varphi'} = \frac{dT}{d\varphi'}, \quad \frac{dZ}{d\psi'} = \frac{dT}{d\psi'}, \quad \frac{dZ}{d\theta'} = \frac{dT}{d\theta'};$$

en sorte qu'on pourra remplacer les équations (e) par celles-ci :

$$d.\frac{dZ}{d\varphi'} - \frac{dZ}{d\varphi}.dt = 0, \quad d.\frac{dZ}{d\psi'} - \frac{dZ}{d\psi}.dt = 0, \quad d.\frac{dZ}{d\theta'} - \frac{dZ}{d\theta}.dt = 0 \ldots (f)$$

14. On peut facilement vérifier le résultat de toutes ces opérations, en faisant voir que ces équations (f) peuvent restituer l'intégrale (b) dont elles dérivent primitivement. En effet, en les multipliant respectivement par φ', ψ', θ', et les ajoutant ensuite, l'on trouvera

$$\varphi'.d.\frac{dZ}{d\varphi'} + \psi'.d.\frac{dZ}{d\psi'} + \theta'.d.\frac{dZ}{d\theta'} - \frac{dZ}{d\varphi}d\varphi - \frac{dZ}{d\psi}d\psi - \frac{dZ}{d\theta}d\theta = 0;$$

mais les trois premiers termes de cette équation reviennent à

$$d.\left(\frac{dZ}{d\varphi'}.\varphi' + \frac{dZ}{d\psi'}.\psi' + \frac{dZ}{d\theta'}.\theta'\right) - \frac{dZ}{d\varphi'}d\varphi' - \frac{dZ}{d\psi'}d\psi' - \frac{dZ}{d\theta'}d\theta';$$

donc, puisque Z ne contient d'autres variables que φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', on pourra écrire l'équation précédente sous la forme

$$d.\left(\frac{dZ}{d\varphi'}.\varphi' + \frac{dZ}{d\psi'}.\psi' + \frac{dZ}{d\theta'}.\theta'\right) - dZ = 0,$$

qui donne par l'intégration

$$\frac{dZ}{d\varphi'}.\varphi' + \frac{dZ}{d\psi'}.\psi' + \frac{dZ}{d\theta'}.\theta' - Z = H;$$

ou, en remettant pour Z sa valeur $T + V$, et puisque

$\frac{dZ}{d\varphi'} = \frac{dT}{d\varphi'}$, etc. : $2T - (T + V) = H$, à cause de l'équation (d); c'est-à-dire, qu'on retrouvera $T - V = H$, ou l'équation (b) dont on était parti.

15. Si l'on admet qu'il y ait des forces perturbatrices, on se rappellera que R ne renferme pas plus que V les variables φ', ψ', θ'; et alors, comme nous l'avons dit, il suffira de remplacer, dans les équations (f), V par V + R. Dans ce cas, ces équations devront s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} d.\frac{dZ}{d\varphi'} - \frac{dZ}{d\varphi}.dt &= \frac{dR}{d\varphi}.dt, \\ d.\frac{dZ}{d\psi'} - \frac{dZ}{d\psi}.dt &= \frac{dR}{d\psi}.dt, \\ d.\frac{dZ}{d\theta'} - \frac{dZ}{d\theta}.dt &= \frac{dR}{d\theta}.dt. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(g)$$

Or, on doit pouvoir considérer comme connue la solution de ces équations, quand elles sont privées de leurs seconds membres, ou des équations (f). Dans cette supposition, on devra regarder φ, ψ et θ comme des fonctions données du temps t et des six constantes arbitraires a, b, c, f, g, h; et lorsqu'on voudra que ces valeurs satisfassent aux équations (g), on fera varier ces constantes : ce qui donnera de nouvelles expressions de φ, ψ, θ et de leurs dérivées φ', ψ', θ', qui sont relatives à t, seulement; et par ce moyen les variations des arbitraires permettront de tenir compte de l'effet de ces forces perturbatrices qu'on avait d'abord négligées.

En donnant au symbole δ la même signification que nous lui avons précédemment assignée, l'on aura

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{da}da + \frac{d\varphi}{db}db + \frac{d\varphi}{dc}dc + \frac{d\varphi}{df}df + \frac{d\varphi}{dg}dg + \frac{d\varphi}{dh}dh,$$

et cinq expressions analogues pour les variations $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\varphi'$, $\delta\psi'$ et $\delta\theta'$; et si l'on admet que les six arbitraires varient en même temps que t, l'on aura évidemment pour les différentielles totales de φ, ψ et θ, les expressions

$$\varphi' dt + \delta\varphi, \quad \psi' dt + \delta\psi, \quad \theta' dt + \delta\theta.$$

Mais en voulant satisfaire aux équations (g) au moyen des valeurs de φ, ψ, θ en fonction de t et des six constantes, et considérant alors ces arbitraires comme de nouvelles variables, nous aurons un nombre d'inconnues double de celui de ces équations, et par conséquent nous pourrons assujettir ces constantes à trois équations de condition, telles qu'il nous conviendra de les fixer : en sorte qu'en les réunissant aux équations (g), l'on aura, pour déterminer ces six constantes, six équations du premier ordre. Or, rien ne peut être plus convenable que de supposer aux différentielles premières de nos variables indépendantes φ, ψ et θ, la même forme, soit que $a, b, \ldots h$, demeurent constantes, soit que ces constantes deviennent variables. Nous poserons donc pour nos trois équations de condition

$$\delta\varphi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Ainsi, faisant varier les arbitraires dans les premiers membres des équations (g), afin de satisfaire à la présence de leurs seconds membres, l'on aura

$$d.\frac{dZ}{d\varphi'} + \delta.\frac{dZ}{d\varphi'} - \frac{dZ}{d\varphi}.dt = \frac{dR}{d\varphi}.dt,$$

puisqu'en vertu des équations (h), $\delta.\frac{dZ}{d\varphi} = 0$; et deux équations toutes pareilles en ψ et en θ. Mais en même temps les

équations (f) réduiront ces trois équations aux trois suivantes :

$$\frac{d\text{R}}{d\varphi}.dt = \delta.\frac{d\text{Z}}{d\varphi'}, \quad \frac{d\text{R}}{d\psi}.dt = \delta.\frac{d\text{Z}}{d\psi'}, \quad \frac{d\text{R}}{d\theta}.dt = \delta.\frac{d\text{Z}}{d\theta'} \ldots (i)$$

Maintenant, multiplions chacune des équations (i) respectivement par $\frac{d\varphi}{da}$, $\frac{d\psi}{da}$, $\frac{d\theta}{da}$, et ajoutons ces produits : il est évident que φ, ψ, et θ étant des fonctions de a, entre autres, cette somme donnera :

$$\frac{d\text{R}}{da}.dt = \frac{d\varphi}{da}.\delta\frac{d\text{Z}}{d\varphi'} + \frac{d\psi}{da}.\delta\frac{d\text{Z}}{d\psi'} + \frac{d\theta}{da}.\delta.\frac{d\text{Z}}{d\theta'},$$

et que les équations de condition (h) permettront d'ajouter à ce second membre les termes

$$-\frac{d.\frac{d\text{Z}}{d\varphi'}}{da}.\delta\varphi - \frac{d.\frac{d\text{Z}}{d\psi'}}{da}.\delta\psi - \frac{d.\frac{d\text{Z}}{d\theta'}}{da}.\delta\theta.$$

16. Nous venons d'obtenir une équation dont le second membre ne contient, ainsi que les équations (f), que la fonction Z, et qui, si on la multiplie par da, et qu'on suppose le symbole Δ uniquement relatif à la variabilité de a, pourrait s'écrire ainsi :

$$\Delta\text{R}.dt = \Delta\varphi.\delta\frac{d\text{Z}}{d\varphi'} - \delta\varphi.\Delta\frac{d\text{Z}}{d\varphi'} + \Delta\psi.\delta\frac{d\text{Z}}{d\psi'} - \delta\psi.\Delta\frac{d\text{Z}}{d\psi'} + \Delta\theta.\delta\frac{d\text{Z}}{d\theta'} - \delta\theta.\Delta\frac{d\text{Z}}{d\theta'}.$$

Or, si l'on fait varier les équations (f), successivement, par rapport à δ et à Δ, et qu'après avoir multiplié les premiers résultats, respectivement, par $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, et $\Delta\theta$, l'on en retranche les seconds multipliés, respectivement aussi, par $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, il ne sera pas difficile de voir que l'indépendance des signes

d'opérations d, δ et Δ permettra d'écrire ainsi le résultat :

$$\Delta\varphi\left(d.\delta\frac{dZ}{d\varphi'}-\delta.\frac{dZ}{d\varphi}dt\right)-\delta\varphi\left(d.\Delta\frac{dZ}{d\varphi'}-\Delta.\frac{dZ}{d\varphi}dt\right)$$
$$\Delta\psi\left(d.\delta\frac{dZ}{d\psi'}-\delta.\frac{dZ}{d\psi}dt\right)-\delta\psi\left(d.\Delta\frac{dZ}{d\psi'}-\Delta.\frac{dZ}{d\psi}dt\right)$$
$$\Delta\theta\left(d.\delta\frac{dZ}{d\theta'}-\delta.\frac{dZ}{d\theta}dt\right)-\delta\theta\left(d.\Delta\frac{dZ}{d\theta'}-\Delta.\frac{dZ}{d\theta}dt\right)=0;$$

et que cette équation-ci peut évidemment prendre la forme suivante :

$$d.\left(\Delta\varphi.\delta\frac{dZ}{d\varphi'}-\delta\varphi.\Delta\frac{dZ}{d\varphi'}+\Delta\psi.\delta\frac{dZ}{d\psi'}-\delta\psi.\Delta\frac{dZ}{d\psi'}+\Delta\theta.\delta\frac{dZ}{d\theta'}-\delta\theta\,\Delta\frac{dZ}{d\theta'}\right)$$
$$-\left(\Delta\varphi.\delta\frac{dZ}{d\varphi}+\Delta\psi.\delta\frac{dZ}{d\psi}+\Delta\theta.\delta\frac{dZ}{d\theta}+\Delta\varphi'.\delta\frac{dZ}{d\varphi'}+\Delta\psi'.\delta\frac{dZ}{d\psi'}+\Delta\theta'\delta\frac{dZ}{d\theta'}\right).dt$$
$$+\left(\delta\varphi.\Delta\frac{dZ}{d\varphi}+\delta\psi.\Delta\frac{dZ}{d\psi}+\delta\theta.\Delta\frac{dZ}{d\theta}+\delta\varphi'.\Delta\frac{dZ}{d\varphi'}+\delta\psi'.\Delta\frac{dZ}{d\psi'}+\delta\theta'\Delta\frac{dZ}{d\theta'}\right).dt=0.$$

Mais si l'on développe les opérations telles que $\delta\frac{dZ}{d\varphi}$, $\delta\frac{dZ}{d\varphi'}$,... $\Delta\frac{dZ}{d\varphi}$, $\Delta\frac{dZ}{d\varphi'}$,... qui ne sont qu'indiquées dans les deux systèmes de termes qui forment les coefficients de dt, on verra sans peine que l'opposition des signes fera disparaître identiquement tous les termes de ces deux coefficients réunis. Et comme ce n'est qu'un simple détail de calcul qui n'offre aucune difficulté, nous jugeons d'autant plus inutile de nous y arrêter, qu'il a été complétement exposé dans plusieurs écrits de Lagrange.

Ainsi, puisque l'équation précédente se réduit par cette destruction identique au premier terme collectif placé sous le signe d, on pourra l'intégrer immédiatement, et l'on aura cet important résultat :

$$\Delta\varphi.\delta\frac{dZ}{d\varphi'}-\delta\varphi.\Delta\frac{dZ}{d\varphi'}+\Delta\psi.\delta\frac{dZ}{d\psi'}-\delta\psi.\Delta\frac{dZ}{d\psi'}+\Delta\theta.\delta\frac{dZ}{d\theta'}-\delta\theta.\Delta\frac{dZ}{d\theta'}=constante\ldots(k)$$

Par conséquent, à cause de $\frac{dZ}{d\varphi'} = \frac{dT}{d\varphi'}$, $\frac{dZ}{d\psi'} = \frac{dT}{d\psi'}$, $\frac{dZ}{d\theta'} = \frac{dT}{d\theta'}$, nous pourrons écrire :

$$\Delta R . dt = \Delta\varphi . \delta \frac{dT}{d\varphi'} - \delta\varphi . \Delta \frac{dT}{d\varphi'} + \Delta\psi . \delta \frac{dT}{d\psi'} - \delta\psi . \Delta \frac{dT}{d\psi'} + \Delta\theta . \delta \frac{dT}{d\theta'} - \delta\theta . \Delta \frac{dT}{d\theta'}, \ldots (l)$$

ou encore :

$$\frac{dR}{da} . dt = constante \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (l)'$$

En sorte que, comme au lieu de rapporter le symbole Δ à l'arbitraire a, il pourrait être relatif à b, c, f, g, h, l'on voit que la valeur de $\Delta R . dt$ doit toujours être indépendante du temps t. On pourra donc, si t se rencontrait dans l'expression (l), le faire nul ou le remplacer par une constante quelconque; et il est clair que si l'on applique l'analyse précédente à la considération des cinq autres arbitraires $b, c, .. h$, on obtiendra cinq équations toutes semblables à $(l)'$.

17. Il ne reste plus qu'à développer l'équation (l) pour voir de plus près la forme qu'elle prend lorsqu'on remplace les variations simplement indiquées par le signe δ par leurs valeurs générales. Pour cela, continuant à supposer que le symbole Δ est relatif à la variabilité de a, nous aurons dans (l), après avoir posé, pour abréger, $\frac{dT}{d\varphi'} = T_1$, $\frac{dT}{d\psi'} = T_2$, $\frac{dT}{d\theta'} = T_3$:

1° $$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{da} da, \quad \Delta\psi = \frac{d\psi}{da} da, \quad \Delta\theta = \frac{d\theta}{da} da;$$

$$\Delta T_1 = \frac{dT_1}{da} da, \quad \Delta T_2 = \frac{dT_2}{da} da, \quad \Delta T_3 = \frac{dT_3}{da} da;$$

2° $$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{da} da + \frac{d\varphi}{db} db + \frac{d\varphi}{dc} dc + \frac{d\varphi}{df} df + \frac{d\varphi}{dg} dg + \frac{d\varphi}{dh} dh,$$

et deux expressions analogues pour $\delta\psi$ et $\delta\theta$;

$$\delta T_1 = \frac{dT_1}{da} da + \frac{dT_1}{db} db + \frac{dT_1}{dc} dc + \frac{dT_1}{df} df + \frac{dT_1}{dg} dg + \frac{dT_1}{dh} dh,$$

et deux expressions analogues pour δT_2 et δT_3.

Faisons à présent, dans l'équation (l), la substitution de ces valeurs; nous pourrons voir

1° que cette équation sera immédiatement divisible par da;

2° que les termes demeurant encore affectés de da s'y détruiront identiquement;

3° que si l'on fait, comme dans le cas des orbites planétaires, le facteur de db ou

$$\frac{d\varphi}{da}\cdot\frac{dT_1}{db} - \frac{d\varphi}{db}\cdot\frac{dT_1}{da} + \frac{d\psi}{da}\cdot\frac{dT_2}{db} - \frac{d\psi}{db}\cdot\frac{dT_2}{da} + \frac{d\theta}{da}\cdot\frac{dT_3}{db} - \frac{d\theta}{db}\cdot\frac{dT_3}{da}, \text{ égal à } [a,b],$$

et que l'on représente par des expressions analogues les facteurs de dc, df, dg et dh, l'équation (l) se transformera dans la suivante :

$$\frac{dR}{da}\cdot dt = [a,b]db + [a,c]dc + (a,f]df + [a,g]dg + [a,h]dh.$$

Or, en considérant la symétrie de cette analyse, il n'est pas difficile de reconnaître qu'en procédant de la même manière l'on obtiendrait pour $\frac{dR}{db}\cdot dt, \ldots \frac{dR}{dh}\cdot dt,$ des expressions entièrement semblables à la précédente, et qui présenteraient une parfaite analogie avec celles que nous avons déjà rencontrées lorsque nous avons directement considéré le cas offert par le système planétaire; en sorte que nos dernières formules se confondront manifestement avec les premières, lorsque nous remplacerons φ, ψ, θ par x, y, z qui sont tou-

jours censées indépendantes, et T_1, T_2, T_3 par leurs valeurs $m.x'$, $m.y'$, $m.z'$ dans ce cas-ci.

L'on peut même faire abstraction du facteur m, lequel, entrant aussi dans les autres fonctions V et R, disparaît de lui-même dans les équations différentielles. En effet, on sait que celles d'un corps m en mouvement autour du soleil, ont dû être multipliées par m dans tous leurs termes, pour pouvoir revêtir la forme sous laquelle nous avons présenté les équations dont nous avons déduit l'intégrale $T - V = H$, où nous avons ensuite supposé que V devenait $V + R$.

18. Pour terminer le résumé analytique des premiers travaux de Lagrange sur cette importante question, nous allons montrer comment il s'assura de ce que nous avons avancé en son nom, pour le cas où des centres mobiles de forces viennent compliquer le problème, et où l'on admet pourtant que ces forces ne sont que de l'ordre des perturbatrices.

Si l'on remonte aux équations (g), il sera facile de s'assurer que les mêmes opérations qui avaient procuré l'intégration de leurs premiers membres, qui reviennent aux équations (f), donnent pour intégrale de leur système, en désignant par a la constante arbitraire :

$$T - V = a + \int\left(\frac{dR}{d\varphi}\,d\varphi + \frac{dR}{d\psi}\,d\psi + \frac{dR}{d\theta}\,d\theta + \text{etc.}\right).$$

Or, la quantité sous le signe $\int$ ne sera pas intégrable, parce que R ne sera pas fonction des variables indépendantes φ, ψ, θ, etc., seulement, mais qu'elle le sera encore des autres variables qui dépendent des mouvements des centres de ces forces qui troublent les mouvements principaux du système ; et comme, quand il existe des forces de cette nature, la

constante a peut être regardée comme variable, il en résulte qu'alors on doit avoir

$$da = \frac{dR}{d\varphi} d\varphi + \frac{dR}{d\psi} d\psi + \frac{dR}{d\theta} d\theta + \text{etc.}$$

D'autre part, la force vive du système a pour expression 2T, ou $2a + 2V$, et V est une fonction donnée qui ne dépend que des coordonnées des corps de ce système. On voit donc que ce seront des variations de l'arbitraire a ou $2a$, qui seules répondront à celle qui résulte, pour la force vive, de l'action des forces perturbatrices.

Cependant comme la valeur de da n'est autre chose que la différentielle de R, où l'on n'a fait varier que les coordonnées φ, ψ, θ, etc., des corps du système, lesquelles sont censées connues en fonction du temps t, on peut regarder cette différentielle de R comme prise par rapport à t, en tant que l'on n'aura égard qu'aux variables indépendantes de ce système. On sait d'ailleurs que les équations différentielles du mouvement de celui-ci ne renferment point t lui-même, mais seulement dt; donc, parmi les arbitraires introduites par leur intégration, il y en aura nécessairement une qui se trouvera ajoutée au temps fini t, et que nous désignerons par c.

Les expressions de φ, ψ, θ, etc., seront ainsi des fonctions de $t + c$, et la valeur de la différentielle $\frac{dR}{d\varphi}.d\varphi + \frac{dR}{d\psi} d\psi + \frac{dR}{d\theta} d\theta +$ etc., que nous représenterons par d'R pour indiquer qu'elle n'est prise que par rapport au temps qui entre dans les valeurs de φ, ψ, θ, etc., pourra s'exprimer par $\frac{dR}{dc}.dt$,

à cause de $\frac{d'R}{dt} = \frac{dR}{dc}$. L'on aura donc : $da = \frac{dR}{dc} . dt$: expression aussi remarquable par sa simplicité que par la manière dont on l'obtient *a priori*, indépendamment de la variation des autres arbitraires.

Maintenant, on peut s'assurer que la valeur variable de a ne peut contenir aucun terme non périodique de la forme $k . t$. En effet, il faudrait, pour qu'il y en eût de tels, que, dans la valeur de $\frac{da}{dt}$, il pût entrer un terme constant k; mais, par notre hypothèse initiale, la fonction R ne contient que des quantités périodiques : il est donc impossible que la différentielle $\frac{dR}{dc}$ renferme un terme k qui ne soit pas périodique lui-même.

Quant aux termes qui pourraient provenir de la considération des secondes dimensions des forces perturbatrices, la démonstration procéderait d'une manière toute semblable à celle dont Lagrange, à la suite du premier Mémoire de Poisson, et d'après la méthode que nous exposons, fit voir à son tour que les grands axes des orbites, dans le système planétaire, étaient exempts de toute variation séculaire résultant des carrés et des produits des masses perturbatrices; et nous ne répéterons pas ce qu'il en dit dans les *art.* 10-17 de son *Mémoire* du 22 août 1808.

II. Analyse des recherches postérieures de Poisson sur le même sujet, renfermées dans son Mémoire du 16 octobre 1809.

19. Les deux Mémoires de Lagrange, dont nous venons de présenter une exposition analytique, étaient connus, lorsque, sept mois après le dernier, Poisson vint lire à l'Institut un fort beau travail où la plupart des mêmes questions étaient traitées d'une manière directe, et établies rigoureusement sous une forme aussi synthétique que profonde. Nous nous proposons maintenant de présenter ici ses résultats en développant la voie analytique qu'il doit avoir suivie et qu'il n'a point fait connaître : ce qui n'a pas été fait, à notre connaissance, et ne peut qu'être utile. En effet, lorsqu'on suit avec attention les calculs de ce grand géomètre, on ne peut se dissimuler qu'ils ne présentent que la démonstration de certains résultats qu'il semble impossible d'avoir prévus ou même soupçonnés, surtout si les travaux de Lagrange ne sont pas censés connus; en sorte que l'esprit n'est pas satisfait par la lecture de ce savant Mémoire, tant il est peu facile de se rendre raison des idées qui ont dû guider l'auteur dans ses recherches. Il est donc permis d'espérer que l'exposition suivante, où l'on a rattaché à l'analyse si lumineuse de Lagrange toute la série des procédés synthétiques de son célèbre et alors jeune émule, ne sera pas dépourvue d'intérêt.

Avant tout, nous rappellerons sommairement ce qu'il y avait surtout de plus connu lorsque Poisson composa son Mémoire; savoir, que chaque différentielle de la forme $\frac{dR}{da}.dt$

se trouvait donnée par une équation telle que

$$\frac{dR}{da}.dt = [a,b]db + [a,c]dc + [a,f]df + [a,g]dg + [a,h]dh \ldots (L),$$

où les coefficients $[a, b]$, etc., étaient des fonctions de nature symétrique des dérivées partielles $\frac{d\varphi}{da}, \frac{d\psi}{da}, \ldots \frac{d\theta'}{da}$; $\frac{d\varphi}{db}, \frac{d\psi}{db}, \ldots \frac{d\theta'}{db}$; etc.; et jouissaient de la propriété remarquable d'être indépendants du temps t (*). Il résultait par conséquent de l'existence de l'équation (L) et des cinq autres analogues, qu'au moyen de simples éliminations linéaires, on pouvait toujours obtenir les valeurs des différentielles da, db, ... dh en fonction de ces coefficients constants de la forme $[a, b]$, et des différentielles partielles $\frac{dR}{da}.dt$, $\frac{dR}{db}.dt$, etc.

20. Maintenant, Poisson s'était proposé, dans son Mémoire,

1° De parvenir *immédiatement* aux expressions de da, db, ...;

2° D'obtenir pour les coefficients de $\frac{dR}{da}.dt$, etc., des fonctions symétriques des dérivées partielles $\frac{da}{d\varphi}, \frac{da}{d\psi}, \ldots \frac{da}{d\theta'}$;

(*) Lagrange ne s'était pas borné à prouver que le second membre *tout entier* de l'équation (L) avait cette propriété; il avait démontré, n° 6 de son Mémoire du 22 août, qu'elle appartenait à chacun des coefficients $[a, b]$, etc. Pour abréger, et voulant donner cette démonstration d'après la méthode plus directe de Poisson, nous avons omis celle de Lagrange, qu'on trouvera d'ailleurs fort clairement exposée dans l'art. 61 du tome II de sa *Mécanique*.

$\frac{db}{d\varphi}, \frac{db}{d\psi}, \ldots \frac{db}{d\theta'}$; etc.; inverses des dérivées qui entraient dans les premiers coefficients de la forme $[a, b]$;

3° De prouver *directement* l'indépendance où ces nouveaux coefficients, qu'il représenta par les symboles (a, b), etc., se trouveraient par rapport au temps t.

Or, on doit remarquer, quant à l'importance réelle du second de ces trois points, que, dans plusieurs questions de mécanique, entre autres dans la théorie des rotations des corps célestes, l'on ne parvient point à exprimer les variables $\varphi, \psi, \ldots\ldots$ par des fonctions explicites du temps et des arbitraires, délivrées du signe de l'intégration, et qu'ainsi l'on ne peut pas, en général, former toujours l'expression des dérivées $\frac{d\varphi}{da}, \frac{d\psi}{da}, \ldots \frac{d\varphi}{db}, \frac{d\psi}{db}, \ldots$ etc.; tandis qu'au contraire les constantes arbitraires $a, b, \ldots\ldots$ étant toujours explicitement données en dehors des intégrations qui ne seraient qu'indiquées, il est, dans tous les cas, possible de différentier par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes, même sous le signe intégral qui n'est jamais relatif qu'au temps t, et par conséquent de former sans difficulté les dérivées $\frac{da}{d\varphi}, \frac{da}{d\psi}, \ldots$ etc.

21. Cela posé, voici, pour arriver à son but, la marche analytique dont le célèbre auteur aura pu faire emploi.

Ainsi, en s'attachant aux idées développées par Lagrange, dans son Mémoire du 13 mars 1809, Poisson put obtenir par les mêmes moyens les équations qui terminent notre article 13, savoir :

$$d.\frac{dZ}{d\varphi'} - \frac{dZ}{d\varphi}.dt = 0,\ d.\frac{dZ}{d\psi'} - \frac{dZ}{d\psi}.dt = 0,\ d.\frac{dZ}{d\theta'} - \frac{dZ}{d\theta}.dt = 0; \ldots (f)$$

et ensuite, après avoir introduit la considération des forces perturbatrices, arriver aux trois équations que nous avons données au commencement de l'article 15, et qui sont :

$$\left.\begin{array}{c} d.\frac{dZ}{d\varphi'}-\frac{dZ}{d\varphi}.dt=\frac{dR}{d\varphi}.dt \qquad d.\frac{dZ}{d\psi'}-\frac{dZ}{d\psi}.dt=\frac{dR}{d\psi}.dt, \\ d.\frac{dZ}{d\theta'}-\frac{dZ}{d\theta}.dt=\frac{dR}{d\theta}.dt. \end{array}\right\}\ldots\ldots(g)$$

En continuant à raisonner comme l'avait fait Lagrange, Poisson fut encore naturellement conduit, ainsi que lui, et en admettant qu'on fît varier les constantes arbitraires, tant aux trois équations (h) qu'aux trois équations (i) du même article 15.

Rappelons d'abord les premières :

$$\delta\varphi=0, \qquad \delta\psi=0, \qquad \delta\theta=0;\ldots\ldots\ldots\ldots(h)$$

quant aux dernières, imitant la forme des équations (4) de Lagrange (art. 2), il posa les relations

$$\frac{dZ}{d\varphi'}=s, \qquad \frac{dZ}{d\psi'}=u, \qquad \frac{dZ}{d\theta'}=v,\ldots\ldots\ldots(m)$$

et il put ensuite écrire les équations (i) sous la forme suivante :

$$\delta s=\frac{dR}{d\varphi}.dt, \qquad \delta u=\frac{dR}{d\psi}.dt, \qquad \delta v=\frac{dR}{d\theta}.dt\ldots\ldots(J)$$

Mais alors, en considérant de plus près ce qui devait résulter de ces équations (m) qu'il venait d'établir, Poisson suivit des idées qui lui appartiennent en propre, et que nous allons développer, sans nous attacher à suivre de trop près ses traces. On verra que les conséquences qu'il sut décou-

vrir et qu'il en tira, révèlent une science bien profonde de l'analyse.

22. Dans les équations (f) Z est une fonction des six variables φ, $\psi, \ldots \theta'$; mais puisque nous avons posé les équations (m), les variables s, u, v devront être considérées comme des fonctions de ces six variables : d'où, réciproquement, φ', ψ', θ' deviendront des fonctions des variables φ, ψ, θ, s, u, v considérées comme indépendantes. Par conséquent, il faudra distinguer entre la valeur du coefficient $\frac{dZ}{d\varphi}$ qui entre dans la première équation (f), par exemple, et celle que doit prendre ce coefficient en vertu des équations (m), quand φ', ψ', θ' deviennent par là des fonctions de φ, $\psi, \ldots v$.

Entourons de parenthèses cette *première* valeur, et les équations (f) deviendront

$$\frac{ds}{dt}=\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right), \quad \frac{du}{dt}=\left(\frac{dZ}{d\psi}\right), \quad \frac{dv}{dt}=\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) \ldots\ldots (f)'$$

Alors, en calculant l'expression de la *seconde* valeur, on obtiendra les équations suivantes :

$$\frac{dZ}{d\varphi}=\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)+\frac{dZ}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{dZ}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{dZ}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\varphi},$$
$$\frac{dZ}{d\psi}=\left(\frac{dZ}{d\psi}\right)+\frac{dZ}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{d\psi}+\frac{dZ}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{d\psi}+\frac{dZ}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\psi},$$
$$\frac{dZ}{d\theta}=\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)+\frac{dZ}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta}+\frac{dZ}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{d\theta}+\frac{dZ}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\theta}.$$

Donc, en tirant de ces dernières équations les valeurs de $\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)$, $\left(\frac{dZ}{d\psi}\right)$, $\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)$; employant les relations (m), et écrivant s', u', v' au lieu de $\frac{ds}{dt}, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$, les équations $(f)'$ deviendront

$$\left.\begin{aligned} s' &= \frac{dZ}{d\varphi} - s.\frac{d\varphi'}{d\varphi} - u.\frac{d\psi'}{d\varphi} - v.\frac{d\theta'}{d\varphi},\\ u' &= \frac{dZ}{d\psi} - s.\frac{d\varphi'}{d\psi} - u.\frac{d\psi'}{d\psi} - v.\frac{d\theta'}{d\psi},\\ v' &= \frac{dZ}{d\theta} - s.\frac{d\varphi'}{d\theta} - u.\frac{d\psi'}{d\theta} - v.\frac{d\theta'}{d\theta}.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(n)$$

23. Après avoir ainsi transformé les équations du mouvement, admettons, comme Lagrange, qu'on ait tiré des intégrales de ces équations du second ordre qui comportent six constantes arbitraires la valeur de l'une de celles-ci, de a par exemple, et qu'elle soit donnée par cette expression

$$a = \text{fonct.}\ (t, s, u, v, \varphi, \psi, \theta), \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{A})$$

qui représentera, par conséquent, l'une des intégrales premières des équations (f) du mouvement. Comme on a vu que, dans cette analyse, on se propose d'employer directement des dérivées partielles, telles que $\frac{da}{d\varphi}, \frac{da}{d\psi}, \cdots \frac{da}{dv}$, il faut donc travailler à les obtenir, et, pour cela, différentier la valeur précédente de a, que l'on doit en effet regarder comme variable, pour qu'on puisse satisfaire aux équations (J).

En procédant à cette opération, on devra exprimer les variations des six quantités $\varphi, \psi, \ldots\ldots v$, par leurs valeurs qui résultent des équations (h) et (J), et l'on obtiendra ainsi l'équation

$$da = \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{d\text{R}}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{d\text{R}}{d\psi} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{d\text{R}}{d\theta}\right).dt \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{o})$$

Or, comme on aura à faire emploi des coefficients différen-

tiels partiels $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db}$, etc., et non de ceux qui entrent dans l'équation (o), il y faudra remplacer $\frac{dR}{d\varphi}$, $\frac{dR}{d\psi}$, $\frac{dR}{d\theta}$ par leur valeur en fonction des autres : ce qui se peut, puisque R étant une fonction de φ, ψ, θ, l'est aussi par cela même des six constantes qui entrent, avec t, dans l'expression de ces trois variables.

L'on aura ainsi les trois relations

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{dR}{da}\cdot\frac{da}{d\varphi}+\frac{dR}{db}\cdot\frac{db}{d\varphi}+\frac{dR}{dc}\cdot\frac{dc}{d\varphi}+\frac{dR}{df}\cdot\frac{df}{d\varphi}+\frac{dR}{dg}\cdot\frac{dg}{d\varphi}+\frac{dR}{dh}\cdot\frac{dh}{d\varphi},$$
$$\frac{dR}{d\psi}=\frac{dR}{da}\cdot\frac{da}{d\psi}+\frac{dR}{db}\cdot\frac{db}{d\psi}+\frac{dR}{dc}\cdot\frac{dc}{d\psi}+\frac{dR}{df}\cdot\frac{df}{d\psi}+\frac{dR}{dg}\cdot\frac{dg}{d\psi}+\frac{dR}{dh}\cdot\frac{dh}{d\psi},$$
$$\frac{dR}{d\theta}=\frac{dR}{da}\cdot\frac{da}{d\theta}+\frac{dR}{db}\cdot\frac{db}{d\theta}+\frac{dR}{dc}\cdot\frac{dc}{d\theta}+\frac{dR}{df}\cdot\frac{df}{d\theta}+\frac{dR}{dg}\cdot\frac{dg}{d\theta}+\frac{dR}{dh}\cdot\frac{dh}{d\theta};$$

et ces valeurs étant substituées dans celle de da, donneront

$$\begin{aligned} da=&\left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{da}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta}\right)\cdot\frac{dR}{da}dt+\left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta}\right)\cdot\frac{dR}{db}dt\\ &+\left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dc}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{dc}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dc}{d\theta}\right)\cdot\frac{dR}{dc}dt+\left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{df}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{df}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{df}{d\theta}\right)\cdot\frac{dR}{df}dt\\ &+\left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dg}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{dg}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dg}{d\theta}\right)\cdot\frac{dR}{dg}dt+\left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dh}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{dh}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dh}{d\theta}\right)\cdot\frac{dR}{dh}dt. \end{aligned}$$

Rappelons-nous maintenant l'ingénieux artifice de Lagrange dans le calcul de la valeur de $\Delta R\,.\,dt$ et de $\frac{dR}{da}\,.\,dt$, lorsque, pour ses deux célèbres démonstrations des art. 7 et 15, il eut l'idée de retrancher de cette valeur trois termes, *nuls* en vertu des équations (8) et (h); et alors considérons, d'une manière semblable, que la fonction R ne renfermant que φ, ψ et θ, se trouve indépendante de s, u, et v; en sorte

qu'en la regardant comme une fonction des arbitraires $a, b, \ldots h$ qui sont elles-mêmes des fonctions de $\varphi, \psi, \ldots v$, ses différentielles partielles relatives à s, u, v devront être nulles : ce qui donnera

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR}{da}\cdot\frac{da}{ds} + \frac{dR}{db}\cdot\frac{db}{ds} + \frac{dR}{dc}\cdot\frac{dc}{ds} + \frac{dR}{df}\cdot\frac{df}{ds} + \frac{dR}{dg}\cdot\frac{dg}{ds} + \frac{dR}{dh}\cdot\frac{dh}{ds} = 0,$$
$$\frac{dR}{du} = \frac{dR}{da}\cdot\frac{da}{du} + \frac{dR}{db}\cdot\frac{db}{du} + \frac{dR}{dc}\cdot\frac{dc}{du} + \frac{dR}{df}\cdot\frac{df}{du} + \frac{dR}{dg}\cdot\frac{dg}{du} + \frac{dR}{dh}\cdot\frac{dh}{du} = 0,$$
$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{da}\cdot\frac{da}{dv} + \frac{dR}{db}\cdot\frac{db}{dv} + \frac{dR}{dc}\cdot\frac{dc}{dv} + \frac{dR}{df}\cdot\frac{df}{dv} + \frac{dR}{dg}\cdot\frac{dg}{dv} + \frac{dR}{dh}\cdot\frac{dh}{dv} = 0;$$

alors, après avoir multiplié ces expressions de $\frac{dR}{ds}$, $\frac{dR}{du}$ et $\frac{dR}{dv}$, la première par $\frac{da}{d\varphi}$, la seconde par $\frac{da}{d\psi}$, la troisième par $\frac{da}{d\theta}$, nous pourrons retrancher de la valeur précédente de da la somme de ces produits qui sont tous les trois nuls, et cette valeur deviendra par là :

$$\begin{aligned} da = & \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{ds} + \frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{du} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{dv}\right)\cdot\frac{dR}{db}dt \\ & + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dc}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{dc}{ds} + \frac{da}{du}\cdot\frac{dc}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\cdot\frac{dc}{du} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{dc}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{dc}{dv}\right)\cdot\frac{dR}{dc}dt \\ & + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{df}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{df}{ds} + \frac{da}{du}\cdot\frac{df}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\cdot\frac{df}{du} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{df}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{df}{dv}\right)\cdot\frac{dR}{df}dt \\ & + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dg}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{dg}{ds} + \frac{da}{du}\cdot\frac{dg}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\cdot\frac{dg}{du} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{dg}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{dg}{dv}\right)\cdot\frac{dR}{dg}dt \\ & + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dh}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{dh}{ds} + \frac{da}{du}\cdot\frac{dh}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\cdot\frac{dh}{du} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{dh}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{dh}{dv}\right)\cdot\frac{dR}{dh}dt; \end{aligned}$$

expression où l'on devra remarquer que la quantité $\frac{dR}{da}$ a identiquement disparu : de même que, dans la démonstration de Lagrange, la différentielle da avait aussi disparu de l'expres-

sion de $\frac{dR}{da}$. Ce qui, dans un procédé inverse de ce dernier, autorisait naturellement l'attente du résultat que nous venons d'acquérir.

24. Des trois points qui caractérisent la démonstration que nous analysons, on voit qu'il en est déjà deux qui se trouvent obtenus par le grand géomètre qui en est l'auteur; car, 1° il est parvenu directement à l'expression de da, et il est bien évident qu'une marche toute pareille conduirait à celle des cinq autres différentielles $db, \ldots dh$; 2° cette expression est donnée par des fonctions parfaitement symétriques des dérivées partielles $\frac{da}{ds}, \frac{db}{d\varphi}, \ldots\ldots$ etc. (voyez l'art. 20). Il ne reste donc plus qu'à démontrer directement que chacune de ces fonctions qui sont facteurs des coefficients différentiels de R par rapport aux arbitraires, est entièrement indépendante du temps t. C'est cette partie de la démonstration générale qui nécessite les calculs les plus compliqués; mais nous espérons pouvoir la présenter avec toute la clarté nécessaire, et sans nous écarter d'une marche vraiment analytique.

Pour arriver à la preuve que nous cherchons, il faudra faire voir que la différentielle de chacune de ces fonctions relativement au temps est nulle. Prenons pour exemple la première, qu'on désignera convenablement, d'une manière abrégée, par un symbole tel que (a, b), et l'on aura ainsi

$$(a, b) = \frac{da}{ds} \cdot \frac{db}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi} \cdot \frac{db}{ds} + \frac{da}{du} \cdot \frac{db}{d\psi} - \frac{da}{d\psi} \cdot \frac{db}{du} + \frac{da}{dv} \cdot \frac{db}{d\theta} - \frac{da}{d\theta} \cdot \frac{db}{dv}.$$

On voit par là que le développement de la différentielle de la fonction (a, b) entraînera la considération des quantités

$d.\frac{da}{ds}$, $d.\frac{db}{d\varphi}$, ... etc.; et, pour les obtenir, nous commencerons par remonter à la valeur (A) de l'arbitraire a que nous a fournie l'une des intégrales premières des équations du mouvement, avant que l'on y ait introduit la présence des forces perturbatrices, et nous différentierons cette valeur. Or, évidemment la différentielle, relative au temps t, d'une pareille valeur de a, sera nulle, et l'on aura par conséquent

$$\frac{da}{dt}+\frac{da}{ds}.s'+\frac{da}{du}.u'+\frac{da}{dv}.v'+\frac{da}{d\varphi}.\varphi'+\frac{da}{d\psi}.\psi'+\frac{da}{d\theta}.\theta'=0;\ldots(p)$$

mais φ', ψ', θ' sont des fonctions de $\varphi, \psi, \ldots v$ données par les équations (m), et s', u', v' sont des fonctions de ces mêmes variables, en vertu des équations (n). On pourra donc supposer que l'on a substitué dans (p) les valeurs de ces six fonctions, et considérant alors le premier membre de cette équation comme une fonction de $t, s, u, v, \varphi, \psi, \theta$ identiquement nulle, il sera permis de le différentier par rapport à l'une quelconque de ces variables.

25. Si, par exemple, on différentie (p), après ces substitutions, par rapport à φ, l'on aura :

$$\frac{d^2a}{d\varphi.dt}+\frac{d^2a}{d\varphi^2}.\varphi'+\frac{d^2a}{d\varphi.d\psi}.\psi'+\frac{d^2a}{d\varphi.d\theta}.\theta'+\frac{d^2a}{d\varphi.ds}.s'+\frac{d^2a}{d\varphi.du}.u'+\frac{d^2a}{d\varphi.dv}.v'$$
$$+\frac{da}{d\varphi}.\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\psi}.\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\theta}.\frac{d\theta'}{d\varphi}+\frac{da}{ds}.\frac{ds'}{d\varphi}+\frac{da}{du}.\frac{du'}{d\varphi}+\frac{da}{dv}.\frac{dv'}{d\varphi}=0.$$

Or, les sept premiers termes de cette équation expriment la différentielle complète de $\frac{da}{d\varphi}$ prise par rapport à t, et divisée par dt; on en conclura donc

$$d\,.\,\frac{da}{d\varphi}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{d\varphi}+\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds'}{d\varphi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{du'}{d\varphi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dv'}{d\varphi}\right).\,dt;$$

et il est bien évident qu'on trouverait d'une manière absolument semblable :

$$d\,.\,\frac{da}{d\psi}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{d\psi}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{d\psi'}{d\psi}+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{d\psi}+\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds'}{d\psi}+\frac{da}{du}\cdot\frac{du'}{d\psi}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dv'}{d\psi}\right).\,dt,$$
$$d\,.\,\frac{da}{d\theta}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{d\psi'}{d\theta}+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{d\theta}+\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds'}{d\theta}+\frac{da}{du}\cdot\frac{du'}{d\theta}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dv'}{d\theta}\right).\,dt.$$

Il n'est pas moins certain que si l'on eût considéré une autre arbitraire telle que b, comme donnée ainsi que a par une autre des intégrales premières de la forme de l'équation (A), l'on eût obtenu, par des procédés entièrement pareils aux précédents, trois équations donnant les valeurs de $d\,.\,\frac{db}{d\varphi}$, $d\,.\,\frac{db}{d\psi}$, $d\,.\,\frac{db}{d\theta}$, par des expressions telles que celles que nous venons d'écrire, pourvu qu'on y remplace la lettre a par la lettre b.

De même, en partant des intégrales premières qui donnent les valeurs des arbitraires a et b, il est clair qu'en différentiant successivement la première par rapport à s, ensuite par rapport à u, enfin relativement à v, l'on obtiendra, par une suite de procédés symétriquement analogues aux précédents, les trois équations suivantes :

$$d\,.\,\frac{da}{ds}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{ds}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{d\psi'}{ds}+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{ds}+\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds'}{ds}+\frac{da}{du}\cdot\frac{du'}{ds}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dv'}{ds}\right).\,dt,$$
$$d\,.\,\frac{da}{du}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{du}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{d\psi'}{du}+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{du}+\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds'}{du}+\frac{da}{du}\cdot\frac{du'}{du}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dv'}{du}\right).\,dt,$$
$$d\,.\,\frac{da}{dv}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{dv}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{d\psi'}{dv}+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{dv}+\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds'}{dv}+\frac{da}{du}\cdot\frac{du'}{dv}+\frac{da}{dv}\cdot\frac{dv'}{dv}\right).\,dt.$$

et l'on doit voir immédiatement qu'en faisant les mêmes opérations sur l'intégrale première qui donne l'expression de la seconde arbitraire b, l'on obtiendrait pour $d.\frac{db}{ds}$, $d.\frac{db}{du}$, et $d.\frac{db}{dv}$, des valeurs parfaitement égales aux seconds membres des trois équations précédentes, lorsqu'on y aura simplement remplacé la lettre a par la lettre b.

Remontons à présent à la fonction (a, b) dont il nous importe de pouvoir démontrer que la différentielle par rapport au temps t est toujours nulle.

Si nous la développons, nous verrons qu'elle se compose de 12 produits; c'est-à-dire que l'on aura

$$\begin{aligned} d.(a,b) = {} & \frac{da}{ds} \times d.\frac{db}{d\varphi} - \frac{db}{ds} \times d.\frac{da}{d\varphi} + \frac{db}{d\varphi} \times d.\frac{da}{ds} - \frac{da}{d\varphi} \times d.\frac{db}{ds} \\ & + \frac{da}{du} \times d.\frac{db}{d\psi} - \frac{db}{du} \times d.\frac{da}{d\psi} + \frac{db}{d\psi} \times d.\frac{da}{du} - \frac{da}{d\psi} \times d.\frac{db}{du} \\ & + \frac{da}{dv} \times d.\frac{db}{d\theta} - \frac{db}{dv} \times d.\frac{da}{d\theta} + \frac{db}{d\theta} \times d.\frac{da}{dv} - \frac{da}{d\theta} \times d.\frac{db}{dv}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme nous venons de préparer les valeurs des 12 différentielles qui entrent chacune dans l'un de ces 12 produits, nous pouvons former immédiatement ceux-ci, les ajouter avec les signes convenables, et procéder ensuite à l'examen attentif de ce que cette somme deviendra.

Après avoir opéré ce calcul qui n'offre aucune difficulté, et fait la réduction de tous les termes qui se détruisent identiquement, nous obtiendrons pour résultat :

$$
\begin{aligned}
d.(a,b) = & \left[\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{du}-\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{ds}\right]\cdot\left(\frac{du'}{d\varphi}-\frac{ds'}{d\psi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{dv}-\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{du}\right]\cdot\left(\frac{dv'}{d\psi}-\frac{du'}{d\theta}\right)\\
& + \left[\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{ds}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{dv}\right]\cdot\left(\frac{ds'}{d\theta}-\frac{dv'}{d\varphi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{ds}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right]\cdot\left(\frac{ds'}{ds}+\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{ds}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\psi}\right]\cdot\left(\frac{ds'}{du}+\frac{d\psi'}{d\varphi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{ds}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\theta}\right]\cdot\left(\frac{ds'}{dv}+\frac{d\theta'}{d\varphi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{du}-\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right]\cdot\left(\frac{du'}{ds}+\frac{d\varphi'}{d\psi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{du}-\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi}\right]\cdot\left(\frac{du'}{du}+\frac{d\psi'}{d\psi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{du}-\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\theta}\right]\cdot\left(\frac{du'}{dv}+\frac{d\theta'}{d\psi}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{dv}-\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right]\cdot\left(\frac{dv'}{ds}+\frac{d\varphi'}{d\theta}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{dv}-\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\psi}\right]\cdot\left(\frac{dv'}{du}+\frac{d\psi'}{d\theta}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{dv}-\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta}\right]\cdot\left(\frac{dv'}{dv}+\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{d\psi}+\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right]\cdot\left(\frac{d\psi'}{ds}-\frac{d\varphi'}{du}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{d\theta}-\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{d\psi}\right]\cdot\left(\frac{d\theta'}{du}-\frac{d\psi'}{dv}\right)\\
& + \left[\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{d\varphi}-\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{d\theta}\right]\cdot\left(\frac{d\varphi'}{dv}-\frac{d\theta'}{ds}\right).
\end{aligned}
$$

Cette expression de la différentielle de la fonction repré-

sentée par (a, b) paraît d'abord fort compliquée; cependant, comme on doit se croire certain que ce coefficient (a, b) de $\frac{dR}{db}.dt$ est indépendant du temps t, et qu'ainsi sa différentielle doit s'annuler d'elle-même, on peut espérer de découvrir comment, par exemple, chacun des facteurs tels que $\frac{du'}{d\varphi} - \frac{ds'}{d\psi}$, etc., qui multiplient séparément les 15 termes de cette expression, pourrait faire disparaître le terme qui s'en trouve affecté.

26. Pour étudier la valeur de chacun de ces facteurs, remontons aux équations (n) qui donnent celles des fonctions s', u', v'. En examinant leur composition, et n'oubliant pas que dans ces équations s, u, v sont des variables indépendantes, il ne sera pas difficile de s'assurer qu'en différentiant la première par rapport à ψ, et la retranchant alors de la seconde, différentiée par rapport à φ, l'on aura identiquement

$$\frac{du'}{d\varphi} - \frac{ds'}{d\psi} = 0;$$

que de même en différentiant la seconde par rapport à θ, et la retranchant de la troisième, différentiée par rapport à ψ, l'on trouvera

$$\frac{dv'}{d\psi} - \frac{du'}{d\theta} = 0;$$

et qu'enfin, en différentiant la troisième par rapport à φ, et la retranchant de la première, différentiée par rapport à θ, l'on aura encore

$$\frac{ds'}{d\theta} - \frac{dv'}{d\varphi} = 0.$$

Ainsi, voilà déjà les trois premiers termes qui disparaissent d'eux-mêmes.

Poursuivons, et différentiant par rapport à s la première des équations (n), nous aurons :

$$\frac{ds'}{ds}=\frac{d^2Z}{ds.d\varphi}-s.\frac{d^2\varphi'}{ds.d\varphi}-u.\frac{d^2\psi'}{ds.d\varphi}-v.\frac{d^2\theta'}{ds.d\varphi}-\frac{d\varphi'}{d\varphi};$$

mais puisque Z ne contient s que parce que φ', ψ' et θ' en sont des fonctions, l'on aura nécessairement, en vertu des équations (m),

$$\frac{dZ}{ds}=s.\frac{d\varphi'}{ds}+u.\frac{d\psi'}{ds}+v.\frac{d\theta'}{ds}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(q)'$$

d'où l'on déduira, en différentiant par rapport à φ :

$$\frac{d^2Z}{ds.d\varphi}=s.\frac{d^2\varphi'}{ds.d\varphi}+u.\frac{d^2\psi'}{ds.d\varphi}+v.\frac{d^2\theta'}{ds.d\varphi};$$

et cette valeur, substituée dans celle que nous venons de trouver pour $\frac{ds'}{ds}$, amènera l'équation

$$\frac{ds'}{ds}+\frac{d\varphi'}{d\varphi}=0.$$

De même, en différentiant cette première équation (n) par rapport à u, et à cause de l'équation

$$\frac{dZ}{du}=s.\frac{d\varphi'}{du}+u.\frac{d\psi'}{du}+v.\frac{d\theta'}{du}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(q)''$$

de laquelle on déduirait $\frac{d^2Z}{du.d\varphi}$ et sa valeur, l'on aura, en procédant en tout de la même manière,

$$\frac{ds'}{du} + \frac{d\psi'}{d\varphi} = 0.$$

Enfin, différentiant encore la même équation (n) par rapport à v, et considérant l'équation

$$\frac{dZ}{dv} = s.\frac{d\varphi'}{dv} + u.\frac{d\psi'}{dv} + v.\frac{d\theta'}{dv} \ldots\ldots\ldots (q)'''$$

de laquelle on obtiendrait $\frac{d^2Z}{dv.d\varphi}$ et sa valeur, on parviendra en procédant de même à l'équation

$$\frac{ds'}{dv} + \frac{d\theta'}{d\varphi} = 0.$$

Or, en traitant d'une manière parfaitement semblable, d'abord, la seconde des équations (n), et ensuite la troisième, on obtiendra successivement les six équations

$$\frac{du'}{ds} + \frac{d\varphi'}{d\psi} = 0, \quad \frac{du'}{du} + \frac{d\psi'}{d\psi} = 0, \quad \frac{du'}{dv} + \frac{d\theta'}{d\psi} = 0;$$
$$\frac{dv'}{ds} + \frac{d\varphi'}{d\theta} = 0, \quad \frac{dv'}{du} + \frac{d\psi'}{d\theta} = 0, \quad \frac{dv'}{dv} + \frac{d\theta'}{d\theta} = 0.$$

Voilà donc encore les neuf termes suivants de l'expression de $d.(a, b)$ qui disparaissent aussi.

Adressons-nous à présent de nouveau aux équations (q) qui donnent les valeurs de $\frac{dZ}{ds}$, $\frac{dZ}{du}$ et $\frac{dZ}{dv}$; et nous verrons presque sans peine qu'en différentiant $(q)'$ par rapport à u, et en retranchant $(q)''$ différentiée par rapport à s, nous obtiendrons

$$\frac{d\psi'}{ds} - \frac{d\varphi'}{du} = 0;$$

qu'en différentiant $(q)''$ par rapport à v, et en en retranchant $(q)'''$ différentiée par rapport à u, nous aurons

$$\frac{d\theta'}{du}-\frac{d\psi'}{dv}=0;$$

et qu'en différentiant $(q)'''$ par rapport à s, et en en retranchant $(q)'$ différentiée par rapport à v, nous trouverons

$$\frac{d\varphi'}{dv}-\frac{d\theta'}{ds}=0.$$

Les trois derniers termes de l'expression de $d.(a, b)$ disparaissant ainsi, de même que les 12 premiers, nous pourrons conclure de l'équation $d.(a, b)=0$, l'important résultat que représente celle-ci :

$$(a, b)=\textit{constante};$$

c'est-à-dire, que ce coefficient ne saurait contenir explicitement le temps t, et qu'il ne peut être qu'une fonction des constantes a et b, et des autres arbitraires comprises dans les intégrales des équations du mouvement, après qu'on aura substitué aux variables φ, ψ,... v, leurs valeurs en fonction de t et de ces arbitraires.

27. Il est facile maintenant de reconnaître, d'après la parfaite symétrie de tous ces calculs et la similitude complète des valeurs qu'on peut s'attendre à trouver en prenant d'autres arbitraires que a et b, qu'il n'y aurait aucune difficulté à obtenir le même résultat pour les quatre autres coefficients (a,c), (a,f), (a,g), (a,h) qui entrent dans la valeur de da. Et, de même, on ne pourra douter que si l'on eût cherché l'expression des autres différentielles db, dc, .. dh en suivant

les mêmes procédés que pour la valeur de da, toutes ces expressions dont celle de da est évidemment le type, nous auraient conduits aux mêmes résultats obtenus pour celle-ci. En sorte que l'on peut désormais tenir pour certain que les 30 coefficients qui, dans les valeurs des différentielles des 6 arbitraires, y multiplieraient les coefficients différentiels partiels de la fonction perturbatrice R, pris par rapport à ces mêmes arbitraires, jouissent tous de la propriété si remarquable d'être indépendants du temps t.

On a donc tous les moyens de former facilement les 30 coefficients de la forme $(a, b), (a, c), \ldots (g, h)$; et comme, d'après ces notations, il est clair qu'on formera le coefficient (b, a) en permutant entre elles les lettres a et b du coefficient (a, b), on remarquera bien vite l'identité de ces deux coefficients, au signe près, ou que

$$(b, a) = -(a, b).$$

Cette remarque étant étendue à tous les coefficients qui renferment les deux mêmes lettres dans un ordre différent, comme (h, c) qui revient manifestement à $-(c, h)$, etc., permettra de réduire de 30 à 15 le nombre des coefficients vraiment différents dont le calcul pourrait être nécessaire.

Enfin, l'on voit du premier coup d'œil, en remontant à la composition réelle de chacun de ces coefficients, pourquoi les coefficients différentiels $\frac{dR}{da}, \frac{dR}{db}, \cdots \frac{dR}{dh}$ ne se rencontrent point, respectivement, dans les valeurs de da, db, ... dh. Ils y devraient avoir, en effet, pour facteurs, des coefficients formés des deux mêmes lettres, tels que $(a, a), (b, b), \ldots (h, h)$; mais évidemment, par tout ce qui précède, l'on doit trouver

$$(a,a)=0,\ (b,b)=0,\ldots\ldots(h,h)=0.$$

Ainsi, en faisant usage des notations que nous venons d'exposer, l'on aura

$$\frac{da}{dt}=(a,b).\frac{d\mathrm{R}}{db}+(a,c).\frac{d\mathrm{R}}{dc}+(a,f).\frac{d\mathrm{R}}{df}+(a,g).\frac{d\mathrm{R}}{dg}+(a,h).\frac{d\mathrm{R}}{dh},$$

et cette expression sera le type d'après lequel on pourrait écrire celles de $\frac{db}{dt},\ldots\frac{dh}{dt}$. On aurait, par exemple :

$$\frac{df}{dt}=-(a,f).\frac{d\mathrm{R}}{da}-(b,f).\frac{d\mathrm{R}}{db}-(c,f).\frac{d\mathrm{R}}{dc}+(f,g).\frac{d\mathrm{R}}{dg}+(f,h).\frac{d\mathrm{R}}{dh};$$

car les trois premiers coefficients auraient déjà été écrits avec le signe *plus* dans les valeurs de $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ et $\frac{dc}{dt}$, par lesquelles on est censé avoir commencé le calcul.

28. Telle est la célèbre démonstration de Poisson, à laquelle des travaux récents de M. Jacobi paraissent avoir rattaché les conséquences les plus importantes pour les progrès de la mécanique et du calcul intégral. Selon ce grand géomètre, l'équation $d.(a,b)=0$ renferme *un théorème vraiment prodigieux*. (Voy. les *Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, T. XI, page 529, ou le *Journal de M. Liouville*, T. V, page 350.)

Maintenant, si l'on examine attentivement l'exposé que nous venons de faire de cette démonstration, nous pensons que le mérite singulier de ce beau travail paraîtra surtout consister en ceci : c'est que l'auteur, après avoir conçu toute la convenance de l'entreprendre et de poser avec précision les questions qu'il appelait à résoudre, a su pressentir tout ce qui pouvait résulter du changement que les substitutions

contenues dans les équations (m) introduiraient implicitement. Il n'y avait, peut-être, qu'un grand analyste qui pût bien le prévoir. N'est-ce pas là que se trouve, en effet, l'origine de ces équations (n) et (q) auxquelles on a dû les moyens de faire totalement disparaître la longue expression rencontrée pour $d.(a,b)$? Pour concevoir nettement ce qu'enfermait un tel changement, et en faire dériver des déductions si précieuses, il nous paraît qu'il fallait une connaissance bien profonde de l'analyse, et une grande habitude de l'emploi de cet admirable instrument.

Néanmoins, nous ne saurions, en terminant, nous empêcher de répéter ce qu'a dit Lagrange : c'est que, très-probablement, jamais on n'eût poursuivi de cette manière ce grand résultat, si l'on n'avait pas été, d'avance, persuadé qu'*il devait avoir lieu ;* et peut-être nous est-il permis de croire que ceux qui auront bien lu ce qui précède, seront aussi de cet avis.

III. Détermination effective des différentielles des six éléments.

29. Nous sommes à présent en possession des moyens nécessaires pour former *à priori* les expressions des différentielles da, db, ... dh des six arbitraires qui peuvent représenter les éléments des orbites. Mais quand il s'agit, en effet, des mouvements des planètes, on va voir que l'on peut apporter à ces calculs d'importantes simplifications qui les abrégeront singulièrement. Car il faut convenir qu'il serait assez long de déterminer les valeurs des 15 coefficients (a,b), (a,c), ... etc., en suivant la marche directe qui vient d'être indiquée.

Lagrange et Poisson l'ont fait sans doute, et il n'y a aucune difficulté réelle ; mais nous ferons voir que l'emploi de ce procédé n'est rigoureusement nécessaire que pour *un seul* de ces coefficients.

Nous avons déjà remarqué plus haut, que lorsqu'il est question des mouvements planétaires, c'est-à-dire d'un système libre, et où les coordonnées ne sont assujetties à aucune équation de condition, le nombre des variables indépendantes sera celui de ces coordonnées, et par conséquent se trouvera triple de celui des corps. Ainsi x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires du corps m qui fera partie de ce système, nous pourrons prendre $\varphi = x$, $\psi = y$, et $\theta = z$; d'où $\varphi' = x'$, $\psi' = y'$, $\theta' = z'$; et alors pour ce corps en particulier l'on aura $\mathrm{T} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, et par conséquent

$$s = m.x', \qquad u = m.y', \qquad v = m.z'.$$

Dans ce cas, on aura manifestement :

$$(a,b) = \frac{1}{m}\left(\frac{da}{dx'}\cdot\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\cdot\frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'}\cdot\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\cdot\frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'}\cdot\frac{db}{dz} - \frac{da}{dz}\cdot\frac{db}{dz'}\right);$$

et comme on trouvera un pareil résultat pour chacun des autres corps m', m'', ... du système, l'on obtiendra en sommant :

$$(a,b) = \Sigma.\frac{1}{m}\left(\frac{da}{dx'}\cdot\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\cdot\frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'}\cdot\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\cdot\frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'}\cdot\frac{db}{dz} - \frac{da}{dz}\cdot\frac{db}{dz'}\right).$$

Les valeurs des 14 autres coefficients de même forme se simplifieraient d'une manière semblable; mais nous allons montrer comment on peut se dispenser du calcul de la valeur de ces 15 coefficients à l'exception d'un seul : ce qui ne sau-

rait pourtant affaiblir l'importance de la théorie que nous exposons. En effet, d'une part, c'est cette théorie même, comme on le verra, qui autorise cette facilité; de l'autre, puisqu'il faut abolument recourir à ses résultats pour l'un des coefficients, cela seul la rend indispensable.

30. Commençons par désigner les arbitraires qui devront représenter les éléments, par les notations $a, \varepsilon, e, \varpi, \alpha$, et φ: indiquant pour nous, dans cet ordre, le demi-grand axe, la longitude moyenne de l'époque, le rapport de l'excentricité au grand axe, le lieu du périhélie, celui du nœud, et l'inclinaison de l'orbite sur un plan fixe. Les quatre premières de ces notations sont employées par Laplace dans les 6 formules que renferme le *Supplément* au T. III de la *Mécanique céleste;* quant aux deux dernières, elles sont implicitement comprises dans les valeurs qu'il donne pour deux différentielles dp et dq : les variables p et q étant assignées par les équations : $p = \sin. \alpha. \operatorname{tang}. \varphi, q = \cos. \alpha. \operatorname{tang}. \varphi$.

Reprenons maintenant l'intégrale des forces vives, aisément obtenue des trois équations différentielles du mouvement d'une planète, que nous avons déjà rencontrée au début de cet écrit, et que nous écrirons sous la forme

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + h = 2\int\left(\frac{d\text{R}}{dx}.dx + \frac{d\text{R}}{dy}.dy + \frac{d\text{R}}{dz}.dz\right);$$

μ étant la somme $1 + m$ des masses du soleil et de la planète.

Nous avons vu en même temps que le second membre de cette équation revenait à $\frac{d\text{R}}{ndt}.ndt$, et que, c étant la constante ajoutée à l'anomalie moyenne de la planète, on avait $\frac{d\text{R}}{ndt} = \frac{d\text{R}}{dc}$.

Enfin nous avons trouvé, en ce même endroit, qu'avec les signes que nous adoptons ici, l'on devait avoir

$$-dh = 2.\frac{dR}{ndt}.ndt = 2.\frac{dR}{dc}.ndt.$$

Mais la constante h, quand on détermine sa valeur dans la théorie elliptique, est égale à $\frac{\mu}{a}$. Donc, à cause de $-dh = \frac{\mu}{a^2}.da$, et de la relation connue $\mu = n^2 a^3$, l'on aura

$$da = \frac{2}{an}.\frac{dR}{dc}.dt \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$

31. Les mêmes équations différentielles donneront de plus pour l'une des intégrales des aires,

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = k' + \int\left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right).dt;$$

et un raisonnement pareil à celui dont on a déduit la valeur de dh, donnera l'équation

$$dk' = \left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right).dt.$$

Or le facteur de dt dans ce second membre représente évidemment le moment des forces perturbatrices autour de l'axe des z. Donc, en considérant le mobile dans le plan fixe des x,y où $z = 0$, comme s'il se trouvait dans l'un de ses nœuds, l'on aura : $x = r\cos.\alpha$, $y = r\sin.\alpha$; d'où $r^2 = x^2 + y^2$, et tang. $\alpha = \frac{y}{x}$: équation qui donnera la position du nœud.

Cette transformation donnera

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dr}.\frac{dr}{dx} + \frac{dR}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dx}, \qquad \frac{dR}{dy} = \frac{dR}{dr}.\frac{dr}{dy} + \frac{dR}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dy},$$

et l'on en déduira facilement

$$x\frac{d\mathrm{R}}{dy}-y\frac{d\mathrm{R}}{dx}=\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}.$$

Par conséquent l'on aura

$$dk'=\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}.dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Il résulte clairement de cette expression très-simple, que :
« Autour d'un axe perpendiculaire à un plan et passant « par l'origine des coordonnées, la différentielle d'une aire, « rapportée à cette origine, s'exprime par la dérivée partielle « de la force perturbatrice prise par rapport à l'angle que « cette force tend à faire décrire au mobile sur le plan de « cette aire, multipliée par *dt*. »

En vertu de la généralité de ce théorème, si l'on prend pour plan celui-même de l'orbite, en nommant k l'aire qui y serait décrite par le mobile à partir de l'extrémité du grand axe, et si l'on appelle β l'angle qui serait parcouru autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, entre le lieu du périhélie et celui du nœud, l'on aura semblablement

$$dk=\frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Enfin, considérant encore un plan passant par deux axes perpendiculaires l'un au plan fixe des x, y, l'autre à celui de l'orbite, ce plan sera celui de l'angle φ qui mesure l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe. Or, sur ce plan des φ, la projection de l'aire k serait nulle, en général, puisque le plan de cette aire est perpendiculaire au premier; mais si le lieu du nœud vient à varier, cette aire donnera lieu à une projec-

tion infiniment petite que nous désignerons par dk'', et qui semblerait décrite sur le plan des φ autour de la ligne des nœuds qui lui est perpendiculaire : en sorte qu'on aurait par le théorème précédent

$$dk'' = \frac{dR}{d\varphi} . dt.$$

Pour parvenir à évaluer cette petite aire dk'', on peut employer le triangle sphérique formé par l'arc égal à φ, et par deux arcs de 90° perpendiculairement abaissés du lieu du nœud sur les extrémités de l'arc φ. En effet, si le lieu du nœud, ou α, vient à y varier infiniment peu, le plan de l'orbite cessera d'être rigoureusement perpendiculaire à celui des φ, et alors l'aire k aura sur celui-ci la projection représentée par dk''.

Dans ce triangle, soit B l'angle formé par le plan de l'orbite et celui des φ; le côté opposé étant désigné par b, la formule connue $\cot. B = \cot. b \sin. \varphi$, donnera, par la différentiation, et puisque φ ne doit pas varier : $\frac{dB}{\sin^2 B} = \frac{db}{\sin^2 b} . \sin \varphi$; où, à cause de $B = b = 90°$,

$$dB = db. \sin. \varphi.$$

Mais l'arc b n'aura varié que par le petit mouvement du nœud, donc $db = d\alpha$. D'ailleurs, aux quantités près du 3e ordre, l'on a : $dB = \sin. dB$; ainsi, puisque $\sin. dB = \cos. (90° - dB) = \cos. B'$, en désignant par B' l'angle B après qu'il aura varié, l'on voit que $\cos. B' = d\alpha \sin. \varphi$. Par conséquent, comme la projection dk'' doit être égale à $k \cos. B'$, l'on aura la relation

$$d\alpha . k \sin \varphi = \frac{dR}{d\varphi} . dt. \ldots\ldots\ldots\ldots (\varphi)$$

32. Rappelons-nous maintenant que k' est la projection de k sur le plan fixe, et qu'ainsi l'on a : $k' = k.\cos.\varphi$; et puisque d'ailleurs l'aire k sur le plan de l'orbite est donnée par l'équation $k = \sqrt{\mu a}.\sqrt{1-e^2}$, nous aurons :

1° $dk = \frac{1}{2}\cdot\frac{da\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}}.\sqrt{1-e^2} - \sqrt{\mu a}.\frac{ede}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{an}{2}.\sqrt{1-e^2}.da - \frac{a^2ne}{\sqrt{1-e^2}}.de;$

2° $dk' = dk\cos\varphi - k\sin\varphi.d\varphi = \frac{an.\cos\varphi}{2}.\sqrt{1-e^2}.da - \frac{a^2ne.\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}}.de - a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi.d\varphi$

en sorte que substituant ces valeurs dans les équations (α), (β) et (φ), et reprenant l'équation (c), nous obtiendrons les relations suivantes :

$$\frac{dR}{dc}\cdot dt = \frac{an}{2}.da,$$

$$\frac{dR}{d\beta}\cdot dt = \frac{an}{2}.\sqrt{1-e^2}.da - \frac{a^2n.e}{\sqrt{1-e^2}}.de,$$

$$\frac{dR}{d\alpha}\cdot dt = \frac{an}{2}.\sqrt{1-e^2}.\cos\varphi.da - \frac{a^2n.e}{\sqrt{1-e^2}}.\cos\varphi.de - a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi.d\varphi,$$

$$\frac{dR}{d\varphi}\cdot dt = a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi.d\alpha.$$

Nous venons d'écrire ces équations sous la forme adoptée par Lagrange dans sa théorie que nous avons exposée, et il n'y a au fond aucun inconvénient, vu la simplicité de ces expressions qui rendra faciles les éliminations conduisant aux valeurs des différentielles des éléments.

Telles que sont ces équations, elles nous donnent déjà les valeurs de 6 des 15 coefficients qui entrent dans les formules générales, savoir de $[c,a]$, $[\beta,a]$, $[\beta,e]$, $[\alpha,a]$, $[\alpha,e]$, $[\alpha,\varphi]$, et de plus elles nous apprennent que 8 des 9 autres sont nuls, en sorte qu'il n'y a plus d'inconnu que le coefficient $[a,e]$, lequel se trouve le seul que la comparaison des équations

précédentes aux formules générales ne fasse pas connaître d'avance.

En effet, pour déterminer *à priori* les valeurs de $\frac{dR}{da} \cdot dt$ et de $\frac{dR}{de} \cdot dt$, les seules qu'il nous reste à présenter, comme l'on aurait en général

$$\frac{dR}{da} \cdot dt = [a,c].dc + [a,e].de + [a,\text{б}].d\text{б} + [a,\alpha].d\alpha + [a,\varphi].d\varphi,$$
$$\frac{dR}{de} \cdot dt = [e,a].da + [e,c].dc + [e,\text{б}].d\text{б} + [e,\alpha].d\alpha + [e,\varphi].d\varphi;$$

l'on voit qu'à cause de $[a,\varphi] = 0$, $[c,e] = 0$, $[e,\varphi] = 0$, en vertu des 4 valeurs précédentes de $\frac{dR}{dc} dt$, etc., il ne reste à calculer que le coefficient $[a,e]$ pour que l'on ait complétement les valeurs de $\frac{dR}{da} \cdot dt$ et de $\frac{dR}{de} \cdot dt$.

Pour procéder à ce calcul, remontons à la valeur générale

$$[a,e] = \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx'}{de} - \frac{dx}{de} \cdot \frac{dx'}{da} + \frac{dy}{da} \cdot \frac{dy'}{de} - \frac{dy}{de} \cdot \frac{dy'}{da} + \frac{dz}{da} \cdot \frac{dz'}{de} - \frac{dz}{de} \cdot \frac{dz'}{da},$$

et à la transformation bien connue (*Mécan. anal.*, T. II, p. 15) qui permet de poser

$$x = mX + nY, \quad y = m_1 X + n_1 Y, \quad z = m_2 X + n_2 Y,$$

$m, m_1, \ldots n_2$ étant des coefficients indépendants de a et de e, tandis que l'on a

$$X = r \cdot \cos v, \quad Y = r \cdot \sin v.$$

X et Y étant ainsi les coordonnées du lieu de la planète dans son orbite, r en est le rayon vecteur et v son anomalie

vraie. Or la théorie du mouvement elliptique fournit les relations

$$r\cos.v = a(\cos u - e), \qquad r\sin v = a\sqrt{1-e^2}.\sin u,$$

u désignant l'anomalie excentrique.

Par conséquent les équations

$$X = a(\cos u - e), \qquad Y = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

montrent que ces nouvelles coordonnées seront en effet des fonctions de a et de e.

Si l'on fait ces substitutions dans les valeurs précédentes de x, y, et z, on remarquera facilement que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, introduira les trois conditions

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 1, \quad n^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1, \quad mn + m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

et alors la nouvelle valeur du coefficient $[a,e]$ sera :

$$[a,e] = \frac{dX}{da}\cdot\frac{dX'}{de} - \frac{dX}{de}\cdot\frac{dX'}{da} + \frac{dY}{da}\cdot\frac{dY'}{de} - \frac{dY}{de}\cdot\frac{dY'}{da}.$$

Mais les valeurs de X′ ou $-a\sin u.\frac{du}{dt}$, et de Y′ ou $a\sqrt{1-e^2}.\cos u.\frac{du}{dt}$, devenant, à cause de la relation connue, $ndt = (1 - e\cos u).du$:

$$X' = -\frac{an}{1-e\cos u}.\sin u, \qquad Y' = \frac{an\cdot\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}.\cos u,$$

il est évident, sans pousser plus loin le calcul, que tous les termes de la nouvelle valeur de $[a,e]$ auront sin u pour facteur commun. Donc, puisque cette valeur doit être absolument indépendante du temps t, remontons à l'équation $u - e\sin u = nt + c$, et faisons-y $nt = -c$: nous en

pourrons conclure $u - e \sin u = 0$, d'où, nécessairement : $u = 0$, et par conséquent

$$[a,e] = 0.$$

L'on peut maintenant ajouter aux 4 valeurs déjà obtenues, et à cause de

$$[a,c] = -[c,a], \quad [a,\beta] = -[\beta,a], \quad [a,\alpha] = -[\alpha,a],$$
$$[e,\beta] = -[\beta,e], \quad [e,\alpha] = -[\alpha,e],$$

les deux dernières valeurs cherchées, savoir :

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}.dt = -\frac{an}{2}.dc - \frac{an}{2}.\sqrt{1-e^2}.(d\beta + \cos\varphi.d\alpha),$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt = \frac{a^2n.e}{\sqrt{1-e^2}}.(d\beta + \cos\varphi.d\alpha),$$

et il n'y aura rien de plus facile que de déduire de ces six valeurs celles des différentielles da, dc, de, $d\beta$, $d\alpha$, $d\varphi$ des arbitraires ici considérées comme éléments.

33. Mais comme il en est deux dans le nombre, savoir c et β, qui ne sont pas des éléments communément employés dans les théories astronomiques, il faut les remplacer par les constantes ε et ϖ, c'est-à-dire par les lieux de l'époque et du périhélie, qui se trouvent être en rapport connu avec c et β.

Voyons quel changement résultera de là dans les formules précédentes.

Et d'abord on sait que $n.l = c = \varepsilon - \varpi$, et qu'ainsi $dc = d\varepsilon - d\varpi$. Ensuite β, ou l'angle compté du périhélie au nœud supposé fixe, venant à varier quand ces deux points varient eux-mêmes, la différentielle $d\beta$ devra représenter la variation totale du lieu du périhélie diminuée du mouvement du nœud rapporté du plan fixe à l'orbite, lequel, aux quantités près

du second ordre, s'exprimera par $d\alpha\,.\,\cos\varphi$: en sorte qu'on aura $d\mathrm{6} = d\varpi - d\alpha\,.\,\cos\varphi$.

Il reste encore à transformer convenablement en conséquence de ces substitutions les dérivées partielles de R. Or évidemment les différentielles complètes de cette fonction, en faisant usage de ces deux systèmes d'arbitraires, devant être égales, il suffira de comparer les dérivées de R qui, dans le premier système, multiplient dc, $d\mathrm{6}$ et $d\alpha$, et, dans le second, $d\varepsilon$, $d\varpi$, et $d\alpha$. L'on aura donc, en substituant pour dc et $d\mathrm{6}$ les valeurs que nous venons de trouver, et distinguant par un signe particulier la dérivée $\frac{dR}{d\alpha}$ relative au premier système, l'équation suivante :

$$\frac{dR}{dc}\,.\,(d\varepsilon - d\varpi) + \frac{dR}{d\mathrm{6}}\,.\,(d\varpi - d\alpha\,.\cos\varphi) + \left(\frac{dR}{d\alpha}\right).\,d\alpha = \frac{dR}{d\varepsilon}\,.\,d\varepsilon + \frac{dR}{d\varpi}d\varpi + \frac{dR}{d\alpha}\,.\,d\alpha,$$

laquelle, à raison de l'indépendance des différentielles $d\varepsilon$, $d\varpi$ et $d\alpha$, donnera ces trois-ci :

$$\frac{dR}{dc} = \frac{dR}{d\varepsilon},\quad \frac{dR}{d\mathrm{6}} = \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\varpi},\quad \left(\frac{dR}{d\alpha}\right) = \frac{dR}{d\alpha} + \left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right).\cos\varphi.$$

Nous pouvons maintenant substituer, dans les six formules que nous avions obtenues, les valeurs que nous venons de trouver pour dc, $d\mathrm{6}$, $\frac{dR}{dc}$, $\frac{dR}{d\mathrm{6}}$ et $\left(\frac{dR}{d\alpha}\right)$, et ces formules deviendront pour le cas où R est censée varier par rapport aux six éléments astronomiques :

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}.dt = -\frac{an}{2}.d\varepsilon + \frac{an}{2}.(1-\sqrt{1-e^2}).d\varpi,$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt = \frac{an}{2}.da,$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt = \frac{a^2n.e}{\sqrt{1-e^2}}.d\varpi,$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}.dt = -\frac{a^2n.e}{\sqrt{1-e^2}}.de - \frac{an}{2}.(1-\sqrt{1-e^2}).da,$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}.dt = -a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi.d\varphi,$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}.dt = a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi.d\alpha.$$

De là, par des éliminations aussi simples que faciles, on obtiendra enfin :

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ldots da = \frac{2}{an}.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt,\\
&(2)\ldots d\varepsilon = -\frac{2}{an}.\frac{d\mathrm{R}}{da}.dt + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n.e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt,\\
&(3)\ldots de = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n.e}\left[(1-\sqrt{1-e^2})\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} + \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}\right].dt,\\
&(4)\ldots d\varpi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n.e}.\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt,\\
&(5)\ldots d\alpha = \frac{1}{a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi}.\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}.dt,\\
&(6)\ldots d\varphi = -\frac{1}{a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi}.\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}.dt;
\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})$$

et si l'on veut, on pourra dans ces formules remplacer les facteurs $\frac{1}{an}$ et $\frac{1}{a^2n}$ par $\frac{a^2n}{\mu}$ et $\frac{an}{\mu}$ qui leur sont équivalents, et prendre ensuite $\mu = 1$, si cette convention est adoptée dans toute la suite du calcul.

34. Telles sont les valeurs les plus généralement adoptées pour les différentielles des éléments dans la mécanique cé-

leste. Lorsqu'on les intégrera, l'on aura les variations finies de ces éléments, que l'on ajoutera à leurs valeurs primitives qui entrent dans le mouvement elliptique; et l'on aura ainsi les expressions qui conviennent au mouvement qui est troublé par les autres corps du système, lesquelles serviront alors à déterminer à chaque instant la position de chacun de ceux-ci. Mais les quadratures desquelles dépend la détermination de ces variations finies, ne sont pas toujours possibles à effectuer, à parler en général, et il faut recourir le plus souvent, pour les obtenir, à des approximations successives. Pour cet effet, on n'a d'abord égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices, et l'on arrive ainsi à une première valeur approchée de ces éléments devenus variables; c'est ensuite au moyen de cette première valeur que l'on réussit à pouvoir tenir compte des carrés et des produits des masses s'élevant au second ordre; et c'est en poursuivant successivement le même procédé que l'on pourrait pousser cette approximation aussi loin que de telles questions le rendraient nécessaire.

35. Le système précédent de formules que Laplace et Poisson ont surtout employé, permet de remarquer qu'avec les éléments qu'il suppose, l'importante équation $\delta R\,.\,dt = 0$ se subdivise naturellement dans les deux suivantes :

$$\frac{dR}{da}\,da + \frac{dR}{d\varepsilon}\,d\varepsilon + \frac{dR}{de}\,de + \frac{dR}{d\varpi}\,d\varpi = 0,$$
$$\frac{dR}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dR}{d\varphi}\,d\varphi = 0;$$

ce système, nous l'avons indiqué par le symbole (I).

Mais d'autres éléments ont été quelquefois considérés, et il peut être bon d'en exposer les conséquences. Voici, par

exemple, deux autres systèmes présentés par Poisson dans son Mémoire de 1809.

Prenons, en premier lieu, pour éléments les six constantes h, l, ϵ, k, α et φ.

Nous avons vu que $-dh = 2 \cdot \frac{d\mathrm{R}}{ndt} \cdot ndt = 2 \cdot \frac{d\mathrm{R}}{dt} \cdot dt$. Mais $nt + c$ étant égal à $n(t+l)$, R est une fonction de $(t+l)$, en sorte que $\frac{d\mathrm{R}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, et par conséquent $dh = -2 \cdot \frac{d\mathrm{R}}{dl} \cdot dt$. De plus, nous avons trouvé : $\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha} dt = dk \cdot \cos\varphi - d\varphi \cdot k \sin\varphi$; $\frac{d\mathrm{R}}{d\epsilon} \cdot dt = dk$, et enfin $\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi} \cdot dt = d\alpha \cdot k \sin\varphi$. On pourra donc déduire immédiatement des formules générales :

$$\frac{d\mathrm{R}}{dh} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot dl + [h,k] \cdot dk;\ \frac{d\mathrm{R}}{dk} dt = -d\epsilon - \cos\varphi \cdot d\alpha - [h,k] \cdot dh,$$

et tout se réduira, comme on voit, au calcul du coefficient inconnu $[h, k]$.

Reportons-nous donc à celui que nous avons fait du coefficient $[a,e]$ (art. 32), et remarquons que de $k^2 = a\mu \cdot (1-e^2)$, et $h = \frac{\mu}{a}$, l'on tire $e^2 = 1 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2 \cdot h$; et, de même, que les valeurs alors employées pour X et Y donneront à présent

$$\mathrm{X} = \frac{\mu}{h}\left[\cos u - \sqrt{1 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2 \cdot h}\right], \quad \mathrm{Y} = \frac{k}{\sqrt{h}} \cdot \sin u,$$

$$\mathrm{X}' = -\frac{\mu \cdot n}{h\left[1 - \sqrt{1 - h\left(\frac{k}{\mu}\right)^2}\right]} \cdot \sin u.$$

L'on pourra donc conclure de nouveau que X' et Y se trouvant encore avoir sin u pour facteur, le coefficient $[h,k]$ doit être nul, par la même raison que nous en avons donnée à l'occasion du coefficient $[a,e]$.

Ainsi, en éliminant, l'on obtiendra pour ce nouveau système, que nous désignerons par (II) :

$$\left.\begin{aligned}
dh &= -\quad 2 \cdot \frac{dR}{dl} \cdot dt,\\
dl &= \quad 2 \cdot \frac{dR}{dh} \cdot dt,\\
d\epsilon &= -\quad \frac{dR}{dk} \cdot dt - \frac{\cos\varphi}{k\sin\varphi} \cdot \frac{dR}{d\varphi} \cdot dt,\\
dk &= \quad \frac{dR}{d\epsilon} \cdot dt,\\
d\alpha &= \frac{1}{k\sin\varphi} \cdot \frac{dR}{d\varphi} \cdot dt,\\
d\varphi &= -\frac{1}{k\sin\varphi} \cdot \frac{dR}{d\alpha} \cdot dt + \frac{\cos\varphi}{k\sin\varphi} \cdot \frac{dR}{d\epsilon} \cdot dt.
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(II)}$$

Telles sont les valeurs données par Poisson dans son Mémoire (*Journ. Polyt.*, n° XV, p. 306), si ce n'est qu'il y désigne par g, γ et Ω, ce que nous appelons ϵ, φ et R.

Dans ce système on peut voir que l'équation $\delta R \cdot dt = 0$ se sépare aussi naturellement en deux autres; mais ce ne sont pas les mêmes que fournit le système (I). Celui-là donne :

$$\frac{dR}{dh}\,dh + \frac{dR}{dl}\,dl = 0,$$

$$\frac{dR}{d\epsilon}\,d\epsilon + \frac{dR}{dk}\,dk + \frac{dR}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dR}{d\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Prenons, en second lieu, le dernier système présenté par Poisson, page 313 du volume cité, et qui ne diffère du précédent que par l'introduction de l'élément ϖ au lieu de l'élément ϵ. L'on a vu que la différentielle $d\varpi$, ou $d\epsilon + d\alpha \cdot \cos\varphi$, donnera la variation totale de la distance du périhélie au nœud réel. Donc, en introduisant cette substitution dans les formules précédentes, comme il est clair que $\frac{dR}{d\epsilon}$

et $\frac{dR}{d\alpha}$ en seront seuls affectés, nous poserons l'équation identique

$$\frac{dR}{d\beta}\,d\beta + \left(\frac{dR}{d\alpha}\right)d\alpha = \frac{dR}{d\varpi}\,d\varpi + \frac{dR}{d\alpha}\,d\alpha,$$

et mettant dans le second membre la valeur de $d\varpi$ que nous venons de rappeler, nous aurons en comparant les termes affectés des mêmes différentielles :

$$\frac{dR}{d\varpi} = \frac{dR}{d\beta}, \qquad \frac{dR}{d\alpha} = \left(\frac{dR}{d\alpha}\right) - \cos\varphi\,.\frac{dR}{d\varpi};$$

d'où l'on déduira promptement

$$dk = \frac{dR}{d\varpi}\,.\,dt, \qquad d\varpi = d\beta + d\alpha\,.\cos\varphi = -\frac{dR}{dk}\,.\,dt,$$

$$d\varphi = -\frac{1}{k\sin\varphi}.\left(\frac{dR}{d\alpha} + \cos\varphi\,.\frac{dR}{d\varpi}\right).dt + \frac{\cos\varphi}{k\sin\varphi}.\frac{dR}{d\varpi}.dt = -\frac{1}{k\sin\varphi}.\frac{dR}{d\alpha}\,.\,dt.$$

L'on aura donc pour ce nouveau système, en le désignant par (III) :

$$\left.\begin{aligned}
dh &= -\;2\,.\frac{dR}{dl}\,.\,dt,\\
dl &= 2\,.\frac{dR}{dh}\,.\,dt,\\
d\varpi &= -\frac{dR}{dk}\,.\,dt,\\
dk &= \frac{dR}{d\varpi}\,.\,dt,\\
d\varphi &= -\frac{1}{k\sin\varphi}\,.\frac{dR}{d\alpha}\,.\,dt,\\
d\alpha &= \frac{1}{k\sin\varphi}\,.\frac{dR}{d\varphi}\,.\,dt,
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{III})$$

Avec ce choix d'éléments, on voit que l'on rencontre deux résultats assez remarquables ; l'un, que chacune de

leurs différentielles ne dépend que d'un seul terme; l'autre, que l'équation générale $\delta R \,.\, dt = 0$ s'y partage d'elle-même en trois autres, savoir :

$$\frac{dR}{dh} dh + \frac{dR}{dl} dl = 0,$$

$$\frac{dR}{d\varpi} d\varpi + \frac{dR}{dk} dk = 0,$$

$$\frac{dR}{d\varphi} d\varphi + \frac{dR}{d\alpha} d\alpha = 0.$$

Nous ferons observer, en passant, que ces mêmes résultats subsisteraient si l'on eût pris l'axe a pour élément, au lieu de h ou $\frac{\mu}{a}$. Car, à cause de $dh = -\frac{\mu}{a^2} . da$, l'on obtiendrait par la première des formules (III) :

$$da = \frac{2a^2}{\mu} . \frac{dR}{dl} . dt,$$

et l'équation évidente $\frac{dR}{dh} . dh = \frac{dR}{da} . da$, donnant $\frac{dR}{dh} = -\frac{a^2}{\mu} . \frac{dR}{da}$, la seconde de ces formules deviendrait :

$$dl = -\frac{2a^2}{\mu} . \frac{dR}{da} . dt.$$

Par conséquent, remplaçant par ces valeurs les deux premières des formules (III), l'on conclurait encore

$$\frac{dR}{da} da + \frac{dR}{dl} dl = 0\,;$$

et les quatre dernières ne subissant aucune altération, l'on aurait un système (III)', applicable au cas où l'on prend pour éléments a, l, k, ϖ, α et φ.

36. Lagrange, dans le Tome II de sa *Mécanique*, p. 102

et 103, a employé un système qui ne diffère de (III)' que par l'introduction de l'élément e au lieu de l'aire k, et de (I) que parce qu'il fait usage de l'arbitraire l au lieu de l'élément ε. Voici comment on obtient ses formules, dans ce système que nous désignerons par (IV).

Puisque l'on a $k = \sqrt{a\mu}.\sqrt{1-e^2}$, il en résulte

$$dk = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{a}}.\sqrt{1-e^2}.da - \frac{\sqrt{a\mu}.e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot de.$$

Établissant alors l'équation identique

$$\left(\frac{dR}{da}\right)da + \frac{dR}{dk}\,dk = \frac{dR}{da}\,da + \frac{dR}{de}\,de,$$

mettant pour dk sa valeur précédente, et comparant les coefficients des mêmes différentielles, on aura :

$$\frac{dR}{da} = \left(\frac{dR}{da}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{a}}.\sqrt{1-e^2}.\frac{dR}{dk}, \qquad \frac{dR}{de} = -\frac{\sqrt{a\mu}.e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{dR}{dk};$$

équations d'où l'on tire aisément, en mettant pour $\left(\frac{dR}{da}\right)$ sa valeur $-\frac{\mu}{2a^2}\cdot\frac{dl}{dt}$, et pour $\frac{dR}{dk}$ celle qui est donnée par le même système (III) ou (III)' :

$$\frac{dR}{da}.dt = -\frac{\mu}{2a^2}.dl - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{a}}.\sqrt{1-e^2}.d\varpi, \quad \frac{dR}{de}.dt = \frac{\sqrt{a\mu}.e}{\sqrt{1-e^2}}.d\varpi.$$

Combinant alors ces valeurs avec celles qui sont demeurées invariables dans le système précédent, on obtiendra aisément :

$$\left.\begin{aligned}
da &= \frac{2a^2}{\mu}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{dl}\cdot dt,\\
dl &= -\frac{2a^2}{\mu}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot dt - \frac{a(1-e^2)}{\mu.e}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt,\\
de &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a\mu}.e}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}\cdot dt + \frac{a(1-e^2)}{\mu.e}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{dl}.dt,\\
d\varpi &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a\mu}.e}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt,\\
d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a\mu}.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}.dt,\\
d\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{a\mu}.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}.dt:
\end{aligned}\right\}\ldots.(\mathrm{IV})$$

où l'on peut remarquer qu'ainsi que dans le système (I) l'équation générale $\delta\mathrm{R}\,.\,dt = 0$ se séparera d'elle-même en ces deux-ci :

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}da + \frac{d\mathrm{R}}{dl}dl + \frac{d\mathrm{R}}{de}de + \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}d\varpi = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}d\alpha + \frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}d\varphi = 0.$$

Tel est le système employé par Lagrange, si ce n'est qu'il désigne par c, χ, h et i les éléments qui sont pour nous $-l$, ϖ, α et φ; et qu'il prend g, b et Ω pour ce que nous désignons par μ, $a(1-e^2)$ et R. On voit qu'il ne diffère du système (I) que par l'emploi de l au lieu de ε, et parce qu'on a conservé le facteur μ dans les coefficients.

37. Lorsque l'auteur (page 105) veut y introduire ε au lieu de c (qui pour nous est $-l$), comme il ne cherche que la variation séculaire de cet élément, nous ne le suivrons pas dans son procédé, mais nous remplacerons l'un de ces éléments par l'autre au moyen de l'équation connue $n.\,l = \varepsilon - \varpi$.

On en déduit $ndl + ldn = d\varepsilon - d\varpi$, et puisque $n = a^{-\frac{3}{2}}.\sqrt{\mu}$, l'on a

$$dn = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cdot\frac{da}{a^2} = -\frac{3n.da}{2a}; \text{ d'où : } dl = \frac{d\varepsilon - d\varpi}{n} + \frac{3}{2}\cdot\frac{l}{a}.da.$$

Ainsi, comme pour introduire de il y aura trois différentielles engagées, dl, da et $d\varpi$, on posera l'équation identique

$$\frac{d\text{R}}{dl}\,dl + \left(\frac{d\text{R}}{da}\right)da + \left(\frac{d\text{R}}{d\varpi}\right)d\varpi = \frac{d\text{R}}{d\varepsilon}\,d\varepsilon + \frac{d\text{R}}{da}\,da + \frac{d\text{R}}{d\varpi}\,d\varpi\,;$$

et substituant la valeur trouvée pour dl, on aura en comparant

$$\frac{d\text{R}}{dl} = n.\frac{d\text{R}}{d\varepsilon}, \qquad \frac{d\text{R}}{da} = \left(\frac{d\text{R}}{da}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{l}{a}\cdot\frac{d\text{R}}{dl}, \qquad \frac{d\text{R}}{d\varpi} = \left(\frac{d\text{R}}{d\varpi}\right) - \frac{1}{n}\cdot\frac{d\text{R}}{dl}.$$

La première de ces équations changera la première formule du système (IV) en celle-ci :

$$da = 2.\frac{a^2 n}{\mu}\cdot\frac{d\text{R}}{d\varepsilon}.dt = \frac{2}{an}\cdot\frac{d\text{R}}{d\varepsilon}.dt \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

La troisième donnera

$$\frac{d\text{R}}{d\varpi}.dt = -\frac{an}{2}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right).da - \frac{a^2 n.e}{\sqrt{1-e^2}}.de,$$

et la seconde :

$$\frac{d\text{R}}{da}.dt = -\frac{\mu}{2a^2}.dl - \frac{an}{2}.\sqrt{1-e^2}.d\varpi + \frac{3}{2}\cdot\frac{l}{a}.da$$

$$= -\frac{\mu}{2a^2}\left[\frac{d\varepsilon - d\varpi}{n} + \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{l}{a} - \frac{3}{2}\cdot\frac{l}{a}\right).da\right] - \frac{an}{2}.\sqrt{1-e^2}.d\varpi \ldots (k)$$

$$= -\frac{an}{2}.d\varepsilon + \frac{an}{2}\cdot\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right).d\varpi.$$

Or cette dernière relation, en mettant pour $d\varpi$ sa valeur $\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 n.e}\cdot\frac{d\text{R}}{de}.dt$, conduit à la formule

$$d\varepsilon = -\frac{2}{an}\cdot\frac{d\text{R}}{da}.dt + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 n.e}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\cdot\frac{d\text{R}}{de}.dt \ldots (2)$$

et l'on tire de la précédente

$$de = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 n.e} \cdot \left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) . \frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right] . dt \ldots\ldots (3)$$

Réunissant à présent ces formules (1), (2), (3), à celles qui donnent $d\varpi$, $d\alpha$ et $d\varphi$ dans le système (IV), on retrouvera le système (I) qui est le plus généralement adopté.

Ici nous nous arrêterons un moment pour faire remarquer, d'une part, que le terme en da provenant de la différentiation effectuée sur n fonction de a, et qui, en vertu de la théorie générale, ne saurait entrer en effet dans l'expression de $\frac{dR}{da} . dt$, a par le fait identiquement disparu de l'équation (k); d'autre part, que puisque la valeur précédente de $d\varepsilon$ se trouve revenir à $ndl + d\varpi$, on peut conclure par la comparaison avec la valeur qui résulterait de l'équation $d\varepsilon = d(nl + \varpi)$, qu'il faut en effet que le terme ldn disparaisse aussi de lui-même dans la valeur de $d\varepsilon$, comme dans celle de $\frac{dR}{da} . dt$. Au surplus, nous verrons bientôt pourquoi les termes affectés de dn s'évanouissent d'eux-mêmes dans ces calculs, et quelles en sont les précieuses conséquences.

38. Enfin, nous avions d'abord employé la constante c au lieu de l'élément ε, et si nous avions continué à la considérer comme l'un des éléments, ainsi que l'ont fait Lagrange dans son premier Mémoire, et Poisson dans le sien de 1809, nous aurions tiré des formules par lesquelles nous avons préparé le système (I) :

$$dc = -\frac{2}{an} \cdot \frac{dR}{da} . dt - \frac{(1-e^2)}{a^2 n.e} \cdot \frac{dR}{de} . dt ;$$

et de plus, à cause de $\frac{d\text{R}}{d\varepsilon}=\frac{d\text{R}}{dc}$, deux autres formules de ce système seraient devenues

$$da=\frac{2}{an}\cdot\frac{d\text{R}}{dc}\cdot dt,$$

$$de=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n.e}\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\cdot\frac{d\text{R}}{dc}+\frac{d\text{R}}{d\varpi}\right]\cdot dt.$$

Or ces trois formules jointes à celles qui, dans le système (I), donnent $d\varpi$, $d\alpha$ et $d\varphi$, constitueraient le système suivant que nous désignerons par (V), savoir :

$$\left.\begin{aligned}
da &= \frac{2}{an}\cdot\frac{d\text{R}}{dc}\cdot dt,\\
dc &= -\frac{2}{an}\cdot\frac{d\text{R}}{da}\cdot dt-\frac{(1-e^2)}{a^2n.e}\cdot\frac{d\text{R}}{de}\cdot dt,\\
de &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n.e}\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\cdot\frac{d\text{R}}{dc}+\frac{d\text{R}}{d\varpi}\right]\cdot dt,\\
d\varpi &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n.e}\cdot\frac{d\text{R}}{de}\cdot dt,\\
d\alpha &= \frac{1}{a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi}\cdot\frac{d\text{R}}{d\varphi}\cdot dt,\\
d\varphi &= -\frac{1}{a^2n.\sqrt{1-e^2}.\sin\varphi}\cdot\frac{d\text{R}}{d\alpha}\cdot dt;
\end{aligned}\right\}\ldots.(\text{V})$$

et dans ce système l'équation générale $\delta\text{R}\,.\,dt=0$ se séparerait encore d'elle-même en ces deux-ci :

$$\frac{d\text{R}}{da}da+\frac{d\text{R}}{dc}dc+\frac{d\text{R}}{de}de+\frac{d\text{R}}{d\varpi}d\varpi=0,$$

$$\frac{d\text{R}}{d\alpha}d\alpha+\frac{d\text{R}}{d\varphi}d\varphi=0.$$

En résumant ce que nous venons d'établir, on verra d'un coup d'œil que le système

(I)	est relatif aux éléments	$a,\ \varepsilon,\ e,\ \varpi,\ \alpha,\ \varphi$;
(II)	. . . .	$h,\ l,\ k,\ \beta,\ \alpha,\ \varphi$;
(III)	. . . .	$h,\ l,\ k,\ \varpi,\ \alpha,\ \varphi$;
(III)′	. . . .	$a,\ l,\ k,\ \varpi,\ \alpha,\ \varphi$;
(IV)	. . . .	$a,\ l,\ c,\ \varpi,\ \alpha,\ \varphi$;
(V)	. . . .	$a,\ c,\ e,\ \varpi,\ \alpha,\ \varphi$.

D'ailleurs, la comparaison des systèmes (I), (IV) et (V) nous présentera un fait pareil à ceux que nous avons remarqués à la fin de l'article précédent, savoir, que la valeur de dc, système (V), étant égale à la différence $(d\varepsilon - d\varpi)$, système (I), et au terme ndl du système (IV), il faut toujours que dans la différentielle de la relation $n.l = \varepsilon - \varpi$, le terme $l.dn$ disparaisse dans les calculs dont nous nous occupons en ce moment.

39. Quoique nous nous soyons déjà beaucoup arrêtés sur ce sujet, il faut pourtant revenir encore aux cinq dernières formules du système (I), afin de leur faire subir une transformation essentielle qui délivre leurs dénominateurs de la présence des très-petits diviseurs e et $\sin\varphi$; car, dans les orbites planétaires, les excentricités et les inclinaisons sont des quantités fort peu considérables.

Pour cela, remarquons que l'on a : $1-\sqrt{1-e^2} = \dfrac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}$; et désignons, pour abréger, ce second membre par eE, comme aussi la quantité $\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{a^2n}$ par m. La formule (2) du système (I) s'écrira donc ainsi :

$$d\varepsilon = -\frac{2}{an}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{da}.dt + m\ \mathrm{E}.\frac{d\mathrm{R}}{de}.dt, \ldots\ldots\ldots (2)'$$

où la petite quantité e n'ent re plus au dénominateur.

Les formules (3) et (4) s'écriront alors elles-mêmes sous ces formes :

$$de = -m.\mathrm{E}.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt - \frac{m}{e}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}.dt,$$
$$d\varpi = \qquad\qquad + \frac{m}{e}\cdot\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}.dt;$$

et pour délivrer le facteur m de son diviseur e, il suffira de poser, d'après le principe de la célèbre transformation de Lagrange : $\beta = e.\sin\varpi$, $\gamma = e.\cos\varpi$, relations qui donnent

$$d\beta = de.\sin\varpi + \gamma.d\varpi, \qquad d\gamma = de.\cos\varpi - \beta.d\varpi;$$

alors l'équation identique

$$\frac{d\mathrm{R}}{de}de + \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}d\varpi = \frac{d\mathrm{R}}{d\beta}d\beta + \frac{d\mathrm{R}}{a\gamma}d\gamma,$$

donnera, en y substituant pour $d\beta$ et $d\gamma$ leurs valeurs :

$$\frac{d\mathrm{R}}{de} = \frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.\sin\varpi + \frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.\cos\varpi, \qquad \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} = \frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.\gamma - \frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.\beta.$$

Mettant ensuite ces dernières valeurs dans celles de de et de $d\varpi$, l'on en conclura :

$$d\beta = -m.\mathrm{E}.\sin\varpi.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt - \frac{m}{e}\sin\varpi\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.\gamma - \frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.\beta\right) + \frac{m}{e}.\gamma\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.\sin\varpi + \frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.\cos\varpi\right),$$
$$d\gamma = -m.\mathrm{E}.\cos\varpi.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt - \frac{m}{e}\cos\varpi\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.\gamma - \frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.\beta\right) - \frac{m}{e}.\beta\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.\sin\varpi + \frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.\cos\varpi\right);$$

et ces valeurs, à cause de celles de β et de γ, se réduiront immédiatement à celles-ci :

$$d\beta = -m.\mathrm{E}\sin\varpi.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt + m.\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}.dt, \ldots\ldots.(3)'$$
$$d\gamma = -m.\mathrm{E}\cos\varpi.\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}.dt - m.\frac{d\mathrm{R}}{d\beta}.dt. \ldots\ldots.(4)'$$

De même, pour délivrer les formules (5) et (6) du petit diviseur sin φ, faisons

$$p = \sin\alpha . \sin\varphi, \qquad q = \cos\alpha . \sin\varphi,$$

d'où

$$dp = d\alpha . q + d\varphi \sin\alpha \cos\varphi, \qquad dq = -d\alpha . p + d\varphi . \cos\alpha \cos\varphi.$$

D'ailleurs on devra avoir

$$\frac{d\text{R}}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\text{R}}{d\varphi} d\varphi = \frac{d\text{R}}{dp} dp + \frac{d\text{R}}{dq} dq;$$

et remplaçant dp et dq par les valeurs qu'on vient de trouver, on obtiendra

$$\frac{d\text{R}}{d\alpha} = \frac{d\text{R}}{dp} . q - \frac{d\text{R}}{dq} . p,$$

$$\frac{d\text{R}}{d\varphi} = \frac{d\text{R}}{dp} . \sin\alpha \cos\varphi + \frac{d\text{R}}{dq} . \cos\alpha \cos\varphi.$$

Substituant ensuite ces expressions dans les valeurs (5) et (6) de $d\alpha$ et $d\varphi$, qui entrent dans celles que nous venons de donner pour dp et dq, l'on aura en réduisant :

$$dp = \frac{\cos\varphi}{a^2 n . \sqrt{1-e^2}} . \frac{d\text{R}}{dq} . dt, \quad \ldots \ldots \quad (5)'$$

$$dq = -\frac{\cos\varphi}{a^2 n . \sqrt{1-e^2}} . \frac{d\text{R}}{dp} . dt. \quad \ldots \ldots \quad (6)'$$

Dans le *Supplément* au Tome III de sa *Mécanique céleste*, Laplace avait d'abord pris, pour les quantités p et q, les valeurs sin α . tang φ et cos α . tang φ; ce qui, en procédant de la même manière, lui donnait pour les formules (5) et (6), les suivantes :

$$dp = \frac{1}{a^2 n.\sqrt{1-e^2}.\cos^3\varphi} \cdot \frac{dR}{dq} . dt,$$

$$dq = -\frac{1}{a^2 n.\sqrt{1-e^2}.\cos^3\varphi} \cdot \frac{dR}{dp} . dt.$$

Mais $\cos^3\varphi = (1 + \tang^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$; et alors, en négligeant $\tang^2\varphi$ comme une petite quantité du second ordre, ces deux formules devenaient

$$dp = \frac{1}{a^2 n.\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{dR}{dq} . dt, \qquad dq = -\frac{1}{a^2 n.\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{dR}{dp} . dt;$$

cependant, comme la quantité négligée se trouvait entraîner quelque inexactitude dans certains résultats fort délicats, ce grand géomètre donna, dans le Tome V de la *Méc. cél.*, page 329, les formules (5)′ et (6)′ où rien n'a été négligé.

Réunissons maintenant les six formules (1), (2)′,...(6)′, et nous aurons celles qu'on emploie le plus souvent dans les applications.

Si l'on y remet pour m, comme pour $\frac{dR}{de}$, leurs valeurs, il en résultera enfin que a, ε, e, ϖ, α et φ étant les éléments astronomiques d'une orbite, si l'on pose

$$e.\sin\varpi = \beta, \qquad e.\cos\varphi = \gamma,$$

$$\sin\alpha.\sin\varphi = p, \qquad \cos\alpha.\sin\varphi = q,$$

$$\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = E;$$

l'on aura, en remplaçant $\frac{1}{a^2 n}$ par $\frac{an}{\mu}$:

$$
\left.\begin{aligned}
&(1)\ldots da = \frac{an}{\mu}.2a.\frac{dR}{d\varepsilon}.dt,\\
&(2)\ldots d\varepsilon = -\frac{an}{\mu}.2a\frac{dR}{da}.dt+\frac{an}{\mu}.\sqrt{1-e^2}.E\left[\sin\varpi.\frac{dR}{d\mathcal{E}}+\cos\varpi.\frac{dR}{d\gamma}\right].dt,\\
&(3)\ldots d\mathcal{E} = -\frac{an}{\mu}.\sqrt{1-e^2}.E\sin\varpi.\frac{dR}{d\varepsilon}.dt+\frac{an}{\mu}.\sqrt{1-e^2}.\frac{dR}{d\gamma}.dt,\\
&(4)\ldots d\gamma = -\frac{an}{\mu}.\sqrt{1-e^2}.E\cos\varpi.\frac{dR}{de}.dt-\frac{an}{\mu}.\sqrt{1-e^2}.\frac{dR}{d\mathcal{E}}.dt,\\
&(5)\ldots dp = \frac{an}{\mu}.\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}}.\frac{dR}{dq}.dt,\\
&(6)\ldots dq = -\frac{an}{\mu}.\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}}.\frac{dR}{dp}.dt.
\end{aligned}\right\}(1)'
$$

On peut remarquer que toutes ces formules présentent $\frac{an}{\mu}$ comme facteur de chacun de leurs termes, en sorte que la somme des masses du soleil et de la planète troublée les divise tous; et comme d'ailleurs la fonction R renferme les diverses masses m', m'', ... des planètes perturbatrices, il s'ensuit que chaque terme de ces formules, après le développement des coefficients $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{d\varepsilon}$, etc., sera multiplié par un rapport de la forme $\frac{m'}{\mu}$, ou $\frac{m''}{\mu}$, ... etc., lequel représente une fort petite quantité.

L'on sait, d'ailleurs, que dans les applications à la théorie du mouvement de la terre, l'on doit multiplier μ par un nombre f^2, f étant égal à 0,0172021, si l'on veut calculer numériquement la valeur de $n^2 . a^3$. Il faudra donc remplacer $\frac{an}{\mu}$ par $\frac{f^2}{a^2n}$, en même temps qu'on exprimera les masses perturbatrices m', m'', ..., par des fractions dont la masse du soleil sera l'unité principale.

40. Nous venons de nous occuper des principaux systèmes

de formules qui donnent l'expression des différentielles des diverses constantes qu'on peut prendre pour éléments des orbites, et de recommander surtout le système (I)' qui est le plus suivi dans les applications. Cependant, pour pouvoir considérer ces dernières formules comme entièrement suffisantes pour l'emploi qu'on se propose d'en faire, il reste à discuter un point d'une importance véritable, relatif à la variabilité de n, c'est-à-dire, de ce coefficient du moyen mouvement $n.t$ qui affecte les termes du développement de R ou de la fonction perturbatrice. En effet, n est une fonction du grand axe a, donnée par la relation $\mu = n^2 . a^3$, de laquelle résulte l'équation

$$dn = -\frac{3}{2} . \frac{n}{a} . da.$$

Or, toute l'analyse que nous exposons suppose que l'anomalie moyenne θ, ou la longitude moyenne λ, sont exprimées par les relations

$$\theta = n.t + c = n(t + l), \qquad \lambda = nt + \varepsilon = nt + c + \varpi = \theta + \varpi,$$

tant dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique proprement dit. Ainsi, lorsque R se présente comme une fonction des éléments et de certaines fonctions périodiques de θ ou de λ, et que l'on a à calculer la valeur du coefficient différentiel $\frac{dR}{da}$ qui entre dans les expressions trouvées pour dc, dl et $d\varepsilon$, s'il fallait faire varier dans R le coefficient n du temps t et de l, il arriverait que le temps t sortirait de dessous les signes périodiques *sinus*, *cosinus*, etc., ce qui rendrait *séculaires*, ou croissant avec le temps t sans limites,

toutes les inégalités qui naîtraient des termes introduits par là dans le calcul des mouvements planétaires.

Mais si l'on calcule ces mêmes mouvements par les méthodes qu'on y a d'abord employées durant plus d'un demi-siècle, on s'assure aisément que la plupart des inégalités planétaires sont simplement *périodiques,* c'est-à-dire, que le temps t y demeure toujours compris sous les signes *sinus, cosinus,* etc. Il est donc nécessaire, dans l'emploi de la méthode de Lagrange, de parvenir à s'assurer que le coefficient n, dans la valeur de θ, doit pouvoir être considéré comme invariable, lors même que les éléments ne le sont pas.

Pour cela, remarquons que l'expression de $\frac{d\text{R}}{da}$ devra contenir, en faisant tout varier :

1° Des termes provenant de ceux qui, dans la valeur de R, contiendraient a explicitement; mais ces termes s'annuleront nécessairement, puisque la théorie générale prouve qu'aucun terme affecté de da ne peut subsister dans l'expression de $\frac{d\text{R}}{da}$;

2° Des termes dont se composera la valeur absolue de $\frac{d\text{R}}{da}$, en fonction des différentielles des autres éléments, telle qu'on la verrait résulter des formules comprises dans les divers systèmes que nous avons présentés, et en particulier dans ceux qu'on a désignés par (I) et (I)';

3° Des termes provenant de la variation de n fonction de a, et qu'on représentera par $\frac{d\text{R}}{dn}\cdot\frac{dn}{da}$;

4° Enfin, des termes résultant de la variation de c fonction de n, puisque n est une fonction de a, et qu'on exprimera en conséquence par $\frac{d\text{R}}{dc}\cdot\frac{dc}{dn}\cdot\frac{dn}{da}$.

Représentons, pour abréger, ces trois dernières espèces de termes, dans l'ordre où nous en avons parlé, par les symboles E, N et C; d'après cette convention, l'on aurait ainsi :

$$\frac{dR}{da} = E + N + C.$$

Or, quand R est considéré comme une fonction de $(nt + c)$, l'on a : $\frac{dR}{dn} = t \cdot \frac{dR}{dc}$; et, d'autre part, à cause de $c = n \cdot l$, on a : $\frac{dc}{dn} = l$. L'équation précédente deviendra donc, après avoir fait ces substitutions :

$$\frac{dR}{da} = E + \frac{dR}{dc}(t + l) \cdot \frac{dn}{da}.$$

Maintenant, si l'on fait le calcul de ce que sera la valeur définitive de $\frac{dR}{da} \cdot dt$, en multipliant par dt l'équation précédente, et remplaçant, d'après le système (V), où c est pris pour élément, les quantités $E \cdot dt$ et $\frac{dR}{dc} \cdot dt$ par les valeurs résultant des formules de ce système, l'on trouvera

$$\frac{dR}{da} \cdot dt = -\frac{an}{2}\left[dc + \sqrt{1 - e^2}\, d\varpi - (t + l) \cdot \frac{dn}{da} da\right].$$

Mais on sait, d'une part, que la différentielle da ne saurait faire partie de la valeur de $\frac{dR}{da} \cdot dt$, parce qu'elle y a nécessairement un coefficient de la forme $[a, a]$, ou *zéro ;* d'autre part, que chacun des coefficients des différentielles des éléments, dans les expressions de cette nature, doit être indépendant du temps t. Nous sommes donc appelés, comme nous

l'avons été déjà dans le calcul des coefficients $[a,e]$ et $[h,k]$, (art. 32 et 35), à remplacer dans cette équation t par $-l$, et il en résultera la condition

$$N + C = o;$$

en sorte que l'équation précédente se réduira simplement à

$$\frac{dR}{da}.dt = -\frac{an}{2}.(dc + \sqrt{1-e^2}.d\varpi),$$

précisément comme si n n'eût pas varié.

Ainsi, dans cette analyse, si l'on désigne avec Lagrange par Δ l'indice d'une différentiation relative à une seule constante, telle que n par exemple, on aura par ce qui précède: $\Delta R = o$; et puisque $\Delta\theta = \Delta\lambda = (t + l)\,dn$, l'on aura aussi: $\Delta\theta = \Delta\lambda = o$.

41. La démonstration que nous venons de donner entraîne plus de développement que celle de Lagrange, suivi sur ce point par Poisson, qui n'a fait que répéter son calcul. Suivant ces deux grands géomètres, « R étant une fonction « de θ ou $(nt + c)$, si l'on suppose que n, fonction de a seul, « vient à varier, la variation complète qui s'ensuivrait pour « $(nt+c)$ se composerait d'un terme tdn, *plus* le terme résul- « tant, dans la valeur de dc, de la variation que subirait en « conséquence le coefficient différentiel $\frac{dR}{da}$ qui en fait partie, « savoir $-\frac{2}{an}\cdot\frac{dR}{dn}\cdot\frac{dn}{da}$; c'est-à-dire, en tout, de

« $$tdn - \frac{2}{an}\cdot\frac{dR}{dn}\cdot\frac{dn}{da}.dt.$$

« Mais $\frac{dR}{dn} = t.\frac{dR}{dc}$, et $-\frac{2}{an}\cdot\frac{dR}{dc}.dt = da$; on aurait donc

« pour résultat, en substituant,

« $$tdn - t.\frac{dn}{da}da = tdn - tdn, \quad \text{ou} \quad zéro. »$$

Telle est la réponse faite par Lagrange à la grave difficulté naissant de ce que le coefficient n doit varier en même temps que l'axe a. Elle paraît satisfaisante, et pourtant on peut remarquer

1° Que dn n'y est censé disparaître qu'en vertu d'un simple fait de calcul, qui lui donne $(t - t)$ pour facteur, et que cette disparition n'y est point la suite du *principe général* qui domine en quelque sorte toute cette théorie;

2° Que cette réponse n'est pas propre à rendre raison de la destruction identique des termes affectés de ldn, dans l'équation (k) de l'article 37, et dans les valeurs de dc et de $d\epsilon$ que l'on trouve égales à ndl, et à $ndl + d\varpi$, seulement, (même article, à la fin);

3° Que si Lagrange avait voulu déterminer *directement* ce qui devait résulter de la variation de c, fonction de n, dans la valeur de $\Delta(nt + c)$, il aurait trouvé pour ce résultat $\frac{dc}{dn}.dn$ ou ldn; d'où, comparant ensuite cette expression à celle qu'il a obtenue par son procédé, il aurait rencontré une égalité bien singulière, celle de ldn à $-tdn$, c'est-à-dire de la constante l à la variable $-t$: égalité qui ne saurait dériver uniquement d'un *calcul* de cette nature, et qui ne nous paraît légitime que comme conséquence de l'application du *principe* $t + l = 0$, sur lequel notre démonstration s'est appuyée;

4° Enfin, que cette démonstration ne donne point immé

diatement $\Delta R = 0$, mais seulement comme une conséquence du résultat $\Delta(nt + c) = 0$ auquel on est parvenu : ce qui pourrait laisser un doute sur ce qui survient en effet dans la valeur de $\frac{dR}{da}$, lorsque n est considéré comme variable.

Nous oserions donc avancer qu'après un examen attentif des quatre observations que nous venons de nous permettre, il serait possible de trouver que la démonstration de l'illustre auteur que nous avons présentée dans toute sa simplicité, est encore plus spécieuse qu'absolument suffisante.

42. En terminant cet écrit, nous reviendrons aux conséquences pratiques des calculs précédents, et nous ferons remarquer qu'en vertu de la relation identique $nt = \int ndt + \int tdn$ et de ce qui précède, on devra se borner à exprimer l'anomalie moyenne $(nt + c)$ par $\int ndt + c$, où n et c ne seront pas considérés comme variables lors même que a variera. On vient de voir en effet que la variation de c, dérivant de celle de n, permet de n'avoir aucun égard, dans l'expression de l'anomalie moyenne, au terme $\int tdn$.

Ainsi, nt se rapportant toujours au mouvement simplement elliptique, on emploiera $\int ndt$ dans le mouvement troublé. Or, si l'on veut calculer la perturbation éprouvée par le premier, représentons $\int ndt$ par ρ, et nous aurons

$$d^2\rho = dn.dt = -3.\frac{dt}{a^2}\cdot\frac{dR}{d\varepsilon}.dt,$$

à cause de $\frac{dR}{dc} = \frac{dR}{d\varepsilon}$. On déduira de là par l'intégration

$$d\rho = n.dt - 3.\int\frac{dt}{a^2}\cdot\frac{dR}{d\varepsilon}.dt,$$

$$\rho = n.t + c - 3.\iint\frac{dt}{a^2}\cdot\frac{dR}{d\varepsilon}.dt,$$

où $nt + c$ représente évidemment le mouvement elliptique; et par conséquent le mouvement troublé, ou plutôt la perturbation du moyen mouvement elliptique, sera déterminée par le calcul du terme $-3.\iint \frac{dt}{a^2} \cdot \frac{dR}{d\varepsilon} . dt.$

P. S. Cet écrit était composé depuis longtemps, lorsque j'ai rencontré dans le 28ᵉ Cahier du Journal de l'École Polytechnique qui venait de paraître, un savant Mémoire de M. J. Binet, renfermant, aux pages 76 et 77, une critique très-fine d'une transformation introduite par Lagrange, page 65 de son beau travail de 1808. Comme j'ai fait usage de cette même transformation, à la suite de Poisson dans le Mémoire qui termine le 15ᵉ Cahier du Journal de l'École, je crois devoir faire remarquer qu'en rapprochant la page 77 de M. Binet, de la page 310 de Poisson, ou des articles 33 et 35 de l'écrit précédent, l'on pourra s'assurer bien aisément que, *dans le cas actuel,* l'observation très-remarquable de M. B. ne saurait infirmer l'exactitude du résultat obtenu par Lagrange. En effet, la quantité dont l'omission motive la critique dont je parle, étant manifestement du second ordre, a pu légitimement être négligée. C'est pourquoi, tout en adoptant la critique de M. Binet, je ne trouve rien à changer au résultat que j'ai présenté. — Mais j'ajouterai, en finissant, que le Mémoire *sur l'invariabilité des grands axes*, quel que soit l'ordre des forces perturbatrices considérées, qui fut in-

séré au Tome XV des *Comptes rendus* (page 328, séance du 16 août 1842), a été détaché de l'écrit précédent, dont il devait former la IVe partie (1).

---

(1) Voyez une Addition à ce mémoire, tome XV, p. 853, où l'esprit de la démonstration générale est résumé en peu de mots.

MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENCES FINIES A UNE SEULE VARIABLE,

D'UN ORDRE QUELCONQUE,

ET A COEFFICIENTS VARIABLES.

Présenté à l'Académie des sciences, le 25 septembre 1843,

PAR M. J. BINET.

Dans ces recherches j'expose une méthode pour intégrer l'équation linéaire aux différences finies, quel que soit son ordre ainsi que la forme de ses coefficients; le résultat offre la fonction inconnue du problème, avec la généralité que comporte l'ordre de l'équation, et sous une forme explicite : en cela, elle est parfaitement analogue à l'intégrale de l'équation linéaire du premier ordre, due aux premiers travaux de Lagrange. Le véritable caractère de ces formules est de présenter le résultat final de l'élimination d'un nombre indéterminé d'inconnues, entre un nombre convenable d'équa-

tions, où elles entrent en petit nombre au premier degré, et d'une manière semblable dans chacune des équations. Nos formules n'exigent plus que de simples opérations d'algèbre sur des quantités primitivement données. Pour l'équation du second ordre, nous avons évalué, par une formule, le nombre des termes, dont l'intégrale se compose, et la même marche est applicable à tous les ordres. On sent bien que la complication des formules finales doit s'accroître avec l'ordre de l'équation, et, dès le second, l'espèce des combinaisons des coefficients est fort éloignée des produits de termes contigus que l'on remarque dans la formule de Lagrange, pour le premier ordre : à mesure que l'ordre s'élève, les combinaisons présentent un type particulier; mais dans tous les ordres, une analogie naturelle demeure empreinte.

Les équations à différences finies du second ordre s'offrent dans un grand nombre de recherches spéciales, et, par exemple, Lagrange les a rencontrées dans une question relative à la construction des instruments d'optique. M. Biot a formé, pour ce problème, des expressions qui donnent explicitement les inconnues en fonction des quantités connues. Pour le même sujet, M. Gauss a proposé un algorithme, qui s'était déjà présenté à Euler, pour opérer la réduction en fraction ordinaire d'une fraction continue. On ne peut méconnaître qu'à l'aide de ce symbole on ne parvienne à résoudre explicitement l'équation linéaire du second ordre, sans dernier terme, ainsi que M. Terquem en a fait la remarque : la composition de ce symbole a souvent occupé les analystes, pour en décrire la loi, qui conserve toujours beaucoup de complication : il sera maintenant facile de former le symbole d'Euler par les combinaisons que nous allons exposer; mais

ce symbole, particulier au second ordre, ne fournit aucune ouverture pour aborder les ordres plus élevés.

On trouve, dans le tome XV des Nouveaux Mémoires de cette Académie, un mémoire où M. Libri propose une manière d'écrire le résultat de l'intégration de l'équation linéaire d'un ordre quelconque, à l'aide de certaines fonctions discontinues peu usitées parmi les géomètres, et, pour cette raison, il serait utile que l'auteur fît l'application de son procédé à un ordre déterminé, tel que le second ordre. Cette application rendrait sensibles le caractère et les ressources de la méthode.

Dans l'état actuel de la science analytique, pour résoudre la question des équations linéaires aux différences, j'ai été amené à considérer un genre de combinaisons de plusieurs séries de grandeurs, formées d'après un mode spécial, et que je nomme des combinaisons *discontiguës*. Les sommes de ces sortes de combinaisons jouissent de propriétés singulières et curieuses que j'expose dans la première partie de ce mémoire. La seconde partie contient l'application de ces propriétés, d'abord à l'équation à différences finies du second ordre, et ensuite aux équations d'ordres plus élevés.

On a fréquemment remarqué des analogies entre le calcul différentiel et le calcul aux différences finies : dans quelques circonstances, à un progrès dans les différences finies, est venue répondre une acquisition correspondante pour le calcul différentiel; mais cette analogie, plus apparente que réelle, selon l'opinion de Lagrange, est à beaucoup d'égards limitée, et, dans le sujet actuel, nous ne pensons pas que l'on ait rien à attendre pour l'intégration de l'équation différentielle linéaire d'un ordre élevé, de la méthode que nous pré-

sentons relativement aux équations à différences finies linéaires, intégrées sous le point de vue que nous avons indiqué ci-dessus, et qui consiste à profiter de la loi uniforme qui règne dans une série d'équations semblables, pour trouver l'expression de l'une des inconnues qu'elles renferment, considérée comme le terme général d'une suite (Voyez la 19e leçon sur le calcul des fonctions, de Lagrange).

PREMIÈRE PARTIE.

Sur les combinaisons discontiguës.

[1] Lorsqu'on développe le produit

$$(1+xr_1)(1+xr_2)(1+xr_3)\ldots(1+xr_n),$$

selon les puissances de x, on obtient un polynôme

$$1+xR_1+x^2R_2+x^3R_3+\text{etc.}\ldots+x^nR_n,$$

dont les coefficients $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont des fonctions homogènes des lettres $r_1, r_2, r_3\ldots r_n$ savoir :

$$R_1=r_1+r_2+r_3+r_4\ldots+r_n,$$
$$R_2=r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_2r_3+\ldots+r_{n-1}r_n,$$
$$R_3=r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+\text{etc.}$$

. . . .

. . . .

R_1 renferme n termes différents. R_2 renferme $n\cdot\frac{n-1}{2}$, com-

binaisons ou produits à deux lettres : nous y supposerons les lettres rangées selon l'ordre de leurs indices,

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}, r_n:$$

on remarque alors des combinaisons $r_1 r_2$, $r_2 r_3, \ldots r_i r_{i+1}$, de lettres contiguës ou de lettres consécutives, selon l'ordre des indices, et d'autres produits qui ne renferment pas de lettres contiguës : nous les nommerons des combinaisons discontiguës; on reconnaît aisément que ces produits discontigus, à deux lettres, sont au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Dans R_3 se trouvent toutes les combinaisons à trois éléments de la série $r_1, r_2, \ldots r_n$; et, parmi ces combinaisons, nous distinguerons celles qui ne renferment que des lettres discontiguës. On aura pareillement dans R_4 toutes les combinaisons à 4 lettres, et parmi elles on distinguera la classe de celles que nous nommerons discontiguës à quatre lettres, et dont le caractère est de ne pas contenir deux lettres à indices consécutifs : il en sera ainsi des autres ordres de combinaisons discontiguës.

Nous dénoterons par $H_1(1,n)$ la somme $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ des lettres $r_1, r_2, \ldots r_n$; par $H_2(1,n)$ la somme de toutes les combinaisons binaires discontiguës, telles que

$$\begin{array}{r} r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_1 r_5 + \ldots + r_1 r_n \\ + r_2 r_4 + r_2 r_5 + \ldots + r_2 r_n \\ + r_3 r_5 + \ldots + r_3 r_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ + r_{n-2} r_n; \end{array}$$

$H_3(1,n)$ désignera la somme des combinaisons discontiguës à

trois lettres, prises parmi les r_1, r_2,...r_n, telles que

$$r_1r_3r_5 + r_1r_3r_6 + \text{etc.}.. + r_2r_4r_6 + \text{etc.}.. + r_{n-4}r_{n-2}r_n;$$

et en général $H_i(1,n)$ sera la somme des produits discontigus à i lettres, de la même série r_1, r_2,...r_n. Sur quoi l'on doit remarquer que si n est impair, i ne pourra surpasser la moitié de $n+1$ ou $(n+1):2$, et l'on aura pour la dernière somme possible d'éléments discontigus

$$H_{(n+1):2}(1,n) = r_1r_3r_5\ldots r_{n-2}r_n:$$

ainsi cette fonction $H_{(n+1):2}(1,n)$ ne renfermera qu'un seul terme, et l'on devrait considérer comme nulles les sommes de combinaisons discontiguës relatives à des valeurs de $i > (n+1):2$. Quand n sera pair, on pourra former les $H_1(1,n)$, $H_2(1,n)$,...$H_{n:2}(1,n)$, seulement; et cette dernière somme se composera de $\frac{n}{2}+1$ termes, tels que

$$r_1r_3\ldots r_{n-3}r_{n-1} + r_1r_3\ldots r_{n-3}r_n + \text{etc.}$$

Pour ce cas de n pair, il n'y aura donc pas lieu de former des sommes $H_i(1,n)$ pour des $i > \frac{n}{2}$: elles devront être regardées comme nulles. On peut exprimer cette limite i par la formule $i = \frac{1}{2}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$, qui donne $i = \frac{n}{2}$ quand n est pair, et $i = \frac{n+1}{2}$ dans l'autre cas : on peut encore écrire $i = \frac{1}{2}\left[n + \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$.

Exemples : soit $n = 5$, on aura $\frac{n+1}{2} = 3$;

$$H_1(1,5) = \left[\begin{matrix} r_1 + r_2 + r_3 \\ + r_4 + r_5 \end{matrix}\right],\quad H_2(1,5) = \left[\begin{matrix} r_1r_3 + r_1r_4 + r_1r_5 \\ + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_5 \end{matrix}\right],$$

$$H_3(1,5) = r_1r_3r_5,\qquad H_4(1,5) = 0,\qquad H_5(1,5) = 0, \text{ etc.}$$

Soit $n=6$, on aura $\frac{n}{2}=3$;

$$H_1(1,6)=\begin{bmatrix} r_1+r_2+r_3 \\ +r_4+r_5+r_6 \end{bmatrix},\quad H_2(1,6)=\begin{bmatrix} r_1r_3+r_1r_4+r_1r_5+r_1r_6+r_2r_4 \\ +r_2r_5+r_2r_6+r_3r_5+r_3r_6+r_4r_6 \end{bmatrix},$$
$$H_3(1,6)=r_1r_3r_5+r_1r_3r_6+r_1r_4r_6+r_2r_4r_6,\quad H_4(1,6)=0,\ \text{etc.}$$

La loi de formation de ces fonctions homogènes particulières

$$H_2(1,n),\quad H_3(1,n),\quad H_4(1,n)\ldots H_i(1,n),$$

est assez simple : il sera utile, pour l'objet que nous avons en vue, de la bien saisir.

[2] Ayant mis à part la lettre r_n, soit $H_2(1,n-1)$ la somme des combinaisons discontiguës binaires, provenant des autres lettres $r_1, r_2, r_3\ldots r_{n-1}$: si vous ajoutez à cette somme les produits

$$r_n(r_1+r_2+r_3\ldots+r_{n-2})=r_nH_1(1,n-2),$$

qui offrent la lettre r_n associée à toutes les autres, moins sa contiguë r_{n-1}, vous aurez évidemment la totalité des produits discontigus, à deux lettres, des éléments $r_1, r_2,\ldots r_{n-1}, r_n$; on aura donc

$$H_2(1,n)=H_2(1,n-1)+r_nH_1(1,n-2).$$

La même considération est applicable aux produits discontigus à 3 lettres, de la série $r_1, r_2,\ldots r_n$: $H_3(1,n-1)$ étant la somme de tous les produits discontigus des $n-1$ premières lettres, on devra y ajouter r_n multiplié par tous les produits discontigus des $n-2$ premières lettres, savoir, $r_n.H_2(1,n-2)$, pour composer la somme entière des produits discontigus à trois lettres; ainsi l'on aura

$$H_3(1,n)=H_3(1,n-1)+r_nH_2(1,n-2);$$

il est manifeste que la même considération s'étend à une somme de produits discontigus à i facteurs, en sorte que

$$H_i(1,n) = H_i(1,n-1) + r_n H_{i-1}(1,n-2). \qquad (1)$$

Pour former $H_i(1,n)$, on peut suivre un autre ordre dans la combinaison des lettres, en mettant à part la lettre r_1 : on combinera d'abord, en produits discontigus, les autres lettres $r_2, r_3, \ldots r_n$; on formera ainsi une première somme $H_i(2,n)$ qui fera partie de la somme totale $H_i(1,n)$: soit $H_{i-1}(3,n)$ la somme des produits discontigus, à $i-1$ lettres, de la série $r_3, r_4, \ldots r_n$; il est visible que $r_1 H_{i-1}(3,n)$ composera l'ensemble des combinaisons discontiguës à i lettres, qui renfermeront la lettre r_1, car cette lettre doit être associée à toute combinaison discontiguë qui ne renferme pas r_1 et r_2; on aura donc

$$(2) \qquad H_i(1,n) = H_i(2,n) + r_1 H_{i-1}(3,n).$$

On aura de la même manière, avec la série $r_2, r_3, \ldots r_n$,

$$H_i(2,n) = H_i(3,n) + r_2 H_{i-1}(4,n);$$

et la série partielle $r_m, r_{m+1}, \ldots r_n$, donnera aussi

$$(3) \qquad H_i(m,n) = H_i(m+1,n) + r_m H_{i-1}(m+2,n);$$

formule qui suppose $m+2 < n$.

[3] A l'aide de ces fonctions homogènes

$$H_1(1,n),\ H_2(1,n),\ H_3(1,n), \ldots H_i(1,n),$$

nous composerons la fonction suivante

$$G(1,n) = 1 + H_1(1,n) + H_2(1,n) + \ldots + H_i(1,n),$$

i étant le nombre entier compris dans $\frac{n+1}{2}$:

ainsi $G(1,n)$ renferme, outre l'unité, toutes les combinaisons discontiguës qui peuvent être formées avec les lettres $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$, rangées dans l'ordre invariable de leurs indices $1, 2, 3, \ldots n$: l'unité a dû être adjointe à la somme $H_1(1,n)+H_2(1,n)+$etc., dans la composition de $G(1,n)$, pour la régularité des équations où cette fonction doit entrer : cette unité représente, en quelque sorte, la combinaison dont toutes les lettres r sont écartées. Nous pourrons nommer quelquefois $G(1,n)$ le groupe ou le système de toutes les combinaisons discontiguës provenant de la série $r_1, r_2, \ldots r_n$. On aura, par exemple,

$$\begin{aligned}
G(1,1) &= 1 + r_1, \\
G(1,2) &= 1 + r_1 + r_2, \\
G(1,3) &= 1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_1 r_3, \\
G(1,4) &= 1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_4, \\
G(1,5) &= 1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 \\
&\quad + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_1 r_5 + r_2 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_5 + r_1 r_3 r_5, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Le caractère de cette discontiguïté des combinaisons peut être exprimé pour chaque terme du groupe $G(1,n)$ de la manière suivante : r_f étant le facteur du moindre indice f, une combinaison discontiguë sera de cette forme

$$r_f \cdot r_{f+2+h} \cdot r_{f+4+h+h_1} \cdot r_{f+6+h+h_1+h_2} \cdot \ldots$$

h, h_1, h_2, étant des entiers positifs, ou nuls.

Nous dénoterons semblablement par

$$G(m,n) = 1 + H_1(m,n) + H_2(m,n) + H_3(m,n) + \text{etc.},$$

le groupe provenant de la série $r_m, r_{m+1} \ldots r_n$, où les lettres

sont toujours disposées dans l'ordre ascendant des indices $m, m+1, \ldots n$. S'il devient nécessaire de rendre apparentes les lettres r dans les sommes $G(m,n)$, nous écrirons $G(r_m, r_n)$.

Nous avons représenté ci-dessus le produit

$$(1+xr_1)(1+xr_2)(1+xr_3)\ldots(1+xr_n),$$

par

$$1+xR_1+x^2R_2+\ldots+x^{n-1}R_{n-1}+x^nR_n,$$

où les sommes $R_1, R_2, R_3, \ldots$ renferment toutes les combinaisons des $r_1, r_2, \ldots r_n$, une à une, deux à deux, etc. Les fonctions homogènes $H_1(1,n)$, $H_2(1,n)$ etc., ne font partie que des $R_1, R_2, \ldots R_i$, pour lesquels $i <= \frac{n+1}{2}$: si donc on rejette du produit

$$1+xR_1+x^2R_2+x^3R_3+\text{etc.}+x^iR_i,$$

1° tous les termes où $i > \frac{n+1}{2}$; 2° que dans les $R_2, R_3, \ldots R_i$, on efface les combinaisons qui contiennent des lettres contiguës $r_f . r_{f+1}$, et qu'ensuite on pose $x=1$; le produit $1+R_1+R_2+$ etc., ainsi tronqué, sera la fonction $G(1,n)$ ou $G(r_1, r_n)$. Nous allons reconnaître ses propriétés principales.

En écartant r_n, composons avec les lettres $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ une somme de combinaisons discontiguës, en sorte que

$$G(1,n-1)=1+H_1(1,n-1)+H_2(1,n-1)+H_3(1,n-1)+\text{etc.}:$$

cette somme résultera, si l'on veut, de la précédente $G(1,n)$ où l'on posera $r_n=0$, c'est-à-dire dont on effacerait tous les termes contenant la dernière lettre r_n. On aura, par la soustraction

$$\begin{aligned} G(1,n) - G(1,n-1) = {} & H_1(1,n) - H_1(1,n-1) \\ & + H_2(1,n) - H_2(1,n-1) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + H_i(1,n) - H_i(1,n-1); \end{aligned}$$

mais en vertu des notations et des relations antérieures,

$$\begin{aligned} H_1(1,n) - H_1(1,n-1) &= r_n \\ H_2(1,n) - H_2(1,n-1) &= r_n H_1(1,n-2) \\ H_3(1,n) - H_3(1,n-1) &= r_n H_2(1,n-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_i(1,n) - H_i(1,n-1) &= r_n H_{i-1}(1,n-2); \end{aligned}$$

ainsi le second membre de l'équation est égal à

$$r_n[1 + H_1(1,n-2) + H_2(1,n-2) + H_3(1,n-2) + \ldots H_{i-1}(1,n-2)].$$

Or, la quantité comprise entre les crochets peut être remplacée par $G(1,n-2)$, d'après la notation convenue; l'équation devient donc

$$G(1,n) - G(1,n-1) = r_n G(1,n-2),$$

ou bien

$$(4) \qquad G(1,n) = G(1,n-1) + r_n G(1,n-2).$$

Cette relation est évidente, en observant que si dans la somme $G(1,n)$ de toutes les combinaisons discontiguës, vous posez $r_n = 0$, il ne peut rester que la partie de ces combinaisons provenant des seuls éléments $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$, et que nous dénotons par $G(1,n-1)$; quant à la partie qui disparaît en posant $r_n = 0$, elle renferme r_n multiplié par toutes les combinaisons discontiguës auxquelles r_n peut s'associer pour former encore des combinaisons discontiguës; or, r_n

peut s'associer par multiplication avec tous les termes de la formule

$$1 + H_1(1,n-2) + H_2(1,n-2) + \text{etc.},$$

c'est-à-dire que r_n doit être multiplié par $G(1,n-2)$. La relation $G(1,n) = G(1,n-1) + r_n G(1,n-2)$ est remarquable en elle-même : c'est d'elle que nous tirerons le moyen de former l'intégrale complète de l'équation linéaire aux différences finies du second ordre.

Si au lieu de combiner les n lettres $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ pour la formation des $H_1(1,n)$, $H_2(1,n) \ldots$, et par suite, pour la composition de $G(1,n)$, on emploie seulement les $n-1$ lettres $r_2, r_3, \ldots r_n$, en écartant la première lettre r_1, la formule précédente prendra cette expression

$$(5) \qquad G(2,n) = G(2,n-1) + r_n G(2,n-2),$$

$G(2,n)$ représentant ce que devient $G(1,n)$ quand on y enlève tous les termes en r_1, ce qui revient à poser $r_1 = 0$ dans $G(1,n)$.

Lorsque l'on n'emploie que la série $r_m, r_{m+1}, \ldots r_n$, commençant dans l'ordre croissant des indices à r_m, et finissant à r_n, on a semblablement

$$(6) \qquad G(m,n) = G(m,n-1) + r_n G(m,n-2),$$

et ici $G(m,n)$ est la fonction

$$G(m,n) = 1 + H_1(m,n) + H_2(m,n) + H_3(m,n) \ldots + H_k(m,n),$$

qui est formée avec les sommes $H_1(m,n)$, $H_2(m,n)$, etc. des produits discontigus donnés par les lettres $r_m, r_{m+1}, \ldots r_n$. On retrouverait cette somme $G(m,n)$ en posant $r_1 = 0$,

$r_2 = 0, \ldots r_{m-1} = 0$, dans $G(1,n)$. Cette règle peut s'étendre jusqu'à $m = n$, et alors $G(n,n) = 1 + r_n$.

[4] Il est utile de faire une observation sur l'application des formules précédentes à certains cas où elles offrent quelques singularités. Nous avons posé dans l'article précédent

$$G(1,n) = 1 + H_1(1,n) + H_2(1,n) + \text{etc.}$$

Cette définition suppose n éléments $r_1, r_2, \ldots r_n$, dont les indices 1, 2, 3,... sont rangés dans l'ordre croissant : ainsi n peut être 2 ; il peut être encore 1, et l'on a

$$G(1,2) = 1 + r_1 + r_2, \quad G(1,1) = 1 + r_1,$$

d'après les définitions; mais elles ne s'étendent pas à $G(1,0)$. Par suite de la formation de $G(1,n)$ on vient d'établir cette équation identique

$$(4) \qquad G(1,n) = G(1,n-1) + r_n G(1,n-2).$$

Elle n'offre rien de particulier quand $n = 3$; mais si on l'applique au cas de $n = 2$, elle devient

$$G(1,2) = G(1,1) + r_2 G(1,0):$$

son premier membre est déterminé, ainsi que $G(1,1)$, dans le second ; elle devient donc

$$1 + r_1 + r_2 = 1 + r_1 + r_2 G(1,0),$$

ce qui donne, après avoir divisé par r_2,

$$G(1,0) = 1.$$

Nous venons de dire que ce caractère ou symbole $G(1,0)$ n'est pas compris dans la définition de $G(1,n)$ et l'on voit que sa valeur $G(1,0) = 1$ sera une conséquence de l'extension don-

née à la formule (4), à un cas pour lequel elle n'a pas été constituée; mais l'analogie algébrique exigeant qu'elle puisse être ainsi étendue, il faudra admettre que $G(1,0)=1$.

Si, par une nouvelle extension de la même formule, on pose $n=1$, elle devient

$$G(1,1)=G(1,0)+r_1G(1,-1);$$

mais

$$G(1,1)=1+r_1,\quad G(1,0)=1;$$

donc

$$1+r_1=1+r_1G(1,-1);$$

cela exigera que $G(1,-1)=1$.

Nous avons formé cette autre équation identique (6)

$$G(m,n)=G(m,n-1)+r_nG(m,n-2):$$

elle suppose l'ordre ascendant des indices dans les lettres $r_m, r_{m+1},\ldots r_n$ dont les fonctions $G(m,n)$, $G(m,n-1)$, $G(m,n-2)$ sont composées. Si l'on suppose $n=m+2$, l'équation se vérifie sur-le-champ, car

$$\begin{aligned}G(m,m+2)&=1+r_m+r_{m+1}+r_{m+2}+r_mr_{m+2},\\G(m,m+1)&=1+r_m+r_{m+1},\\G(m,m)&=1+r_m,\end{aligned}$$

et l'on a bien

$$G(m,m+2)=G(m,m+1)+r_{m+2}G(m,m).$$

Mais si l'on y pose $n=m+1$, elle devient

$$G(m,m+1)=G(m,m)+r_{m+1}G(m,m-1):$$

ici le symbole $G(m,m-1)$ n'est pas compris dans la définition de $G(m,n)$ qui suppose $m<=n$. Si cependant on

remplace par leurs valeurs les deux fonctions $G(m,m+1)$, $G(m,m)$, on aura cette équation

$$1+r_m+r_{m+1}=1+r_m+r_{m+1}G(m,m-1).$$

Pour qu'elle subsiste, il faudra supposer que $G(m,m-1)=1$, et c'est ce que nous admettrons toujours comme valeur du symbole $G(m,m-1)$.

Que l'on donne à n la valeur m, l'équation (6) devient

$$G(m,m)=G(m,m-1)+r_mG(m,m-2),$$

ou bien

$$1+r_m=1+r_mG(m,m-2);$$

ainsi, pour la même raison, $G(m,m-2)=1$.

Les deux symboles

$$(7)\qquad \begin{cases} G(m,m-1)=1, \\ G(m,m-2)=1, \end{cases}$$

se présenteront souvent dans l'usage que nous aurons à faire des fonctions $G(m,n)$: quand on y pose $m=1$, on retrouve les valeurs, convenues ci-dessus, de

$$G(1,0)=1,\quad G(1,-1)=1.$$

Si l'on étendait l'équation (6) à $n=m-1$, elle deviendrait

$$G(m,m-1)=G(m,m-2)+r_{m-1}G(m,m-3),$$

ou bien $1=1+r_{m-1}G(m,m-3)$, c'est-à-dire

$$r_{m-1}G(m,m-3)=0.$$

Ainsi pour étendre la formule (6) à $n=m-1$, il faudra admettre que le symbole $G(m,m-3)=0$: par cette valeur on explique des particularités offertes par les formules dans quelques cas.

[5] La somme $G(1,n)$ peut être composée en combinant les lettres r_1, r_2, ... r_n dans un ordre inverse de celui que nous avons suivi : pour cela on écartera d'abord r_1, et l'on formera avec les combinaisons discontiguës des lettres r_2, r_3, ... r_n, la somme $G(2,n)$; on formera de plus la somme $G(3,n)$ avec les produits discontigus des éléments $r_3, r_4, \ldots r_n$, laquelle étant multipliée par r_1 fournira tous les produits discontigus qui peuvent admettre r_1, savoir, $r_1 G(3,n)$; ajoutant ces deux parties dont $G(1,n)$ doit évidemment se composer, on aura :

(8) $$G(1,n) = G(2,n) + r_1\, G(3,n).$$

La série des lettres r_2, r_3, ... r_n donnera pareillement

$$G(2,n) = G(3,n) + r_2\, G(4,n);$$

la série r_3, r_4, ... r_n donnera

$$G(3,n) = G(4,n) + r_3 G(5,n);$$

et en général

(9) $$G(m,n) = G(m+1,n) + r_m G(m+2,n).$$

Cette suite de formules s'étend jusqu'à $m = n - 2$, savoir,

$$G(n-2,n) = G(n-1,n) + r_{n-2}\, G(n,n).$$

Le groupe $G(1,n)$ n'est point une fonction symétrique des lettres r_1, r_2, ... r_n; mais on vient de voir, par les formes précédentes de $G(1,n)$, que r_1 se combine avec les lettres r_2, r_3, ... r_n, à peu près de la même manière que r_n avec les r_{n-1}, r_{n-2}, ... r_2, r_1. Des analogies semblables se remarquent entre r_2 et r_{n-1}. Examinons comment une quelconque r_m des lettres r_1, r_2, ... r_{m-1}, r_m, r_{m+1}, ... r_n, entre dans la formation du groupe $G(1,n)$. Les lettres r_1, r_2, ... r_{m-1}, combinées en

produits discontigus formeront un groupe $G(1,m-1)$; les lettres suivantes r_m, r_{m+1}, r_{m+2}, ... r_n fourniront un autre groupe de produits discontigus représenté par

$$G(m,n) = G(m+1,n) + r_m\, G(m+2,n);$$

le produit de ces deux groupes sera

$$\begin{aligned} G(1,m-1).\ G(m,n) = {} & G(1,m-1)\, G(m+1,n) \\ & + G(1,m-1)\, r_m\, G(m+2,n); \end{aligned}$$

mais

$$G(1,m-1) = G(1,m-2) + r_{m-1} G(1,m-3);$$

on aura donc à la place du produit

$$\begin{aligned} G(1,m-1)\, G(m+1,n) + G(1,m-2)\, r_m G(m+2,n) \\ + G(1,m-3)\, r_{m-1}\, r_m G(m+2,n). \end{aligned}$$

Le dernier terme de ce produit contient $r_{m-1}\ r_m$: cette combinaison ne peut faire partie des produits discontigus ; mais les deux autres classes du produit ne renferment que des combinaisons discontiguës admissibles, et qui font évidemment partie des termes du groupe complet $G(1,n)$: en effet, un terme discontigu quelconque du groupe

$$G(1,m-1) = 1 + H_1(1,m-1) + H_2(1,m-1) + \text{etc.}$$

ayant $m-1$ pour le plus haut indice de ses lettres, sera associé, dans le produit $G(1,m-1)G(m+1,n)$, avec un terme de

$$G(m+1,n) = 1 + H_1(m+1,n) + H_2(m+2,n) + \text{etc.}$$

dont le moindre indice est $m+1$, et il en résultera une combinaison discontiguë, puisque $m+1$ est de deux rangs au-dessus de $m-1$: l'ensemble des termes de ce produit sera la partie de $G(1,n)$ indépendante de r_m ; celle qui dépend

de r_m est fournie par le produit

$$G(1,m-2).r_m.G(m+2,n);$$

car r_m peut s'associer à tout terme du produit

$$G(1,m-2) \times G(m+2,n)$$

pour former une combinaison discontiguë, le plus haut indice étant $m-2$ dans $G(1,m-2)$, et le moindre indice de $G(m+2,n)$ étant $m+2$. On aura donc cette formule :

$$(10) \quad G(1,n)=G(1,m-1)G(m+1,n)+r_m G(1,m-2)G(m+2,n).$$

Puisqu'une lettre quelconque r_m n'entre qu'au premier degré dans le groupe complet $G(1,n)$, il s'ensuit que si r_m devient $r_m+\rho_m$, l'accroissement $\Delta G(1,n)$ du groupe sera ainsi exprimé

$$\Delta G(1,n)=\rho_m G(1,m-2)G(m+2,n).$$

Quand on pose $r_m=0$ dans $G(1,n)$, ce groupe est nécessairement décomposable en deux facteurs

$$G(1,m-1)G(m+1,n).$$

Dans l'équation (10), on peut remplacer successivement r_m par $r_1, r_2, \ldots r_n$, c'est-à-dire m par $1, 2, 3, \ldots n$; on aura ainsi

$$\begin{aligned} G(1,n) &= \qquad G(2,n)+r_1G(3,n) \\ &= G(1,1)G(3,n)+r_2G(4,n) \\ &= G(1,2)G(4,n)+r_3G(5,n)G(1,1) \\ &= G(1,3)G(5,n)+r_4G(6,n)G(1,2) \\ &= \text{etc.} \end{aligned}$$

[6] Nous mettrons en évidence les lettres r dans l'équation (10), et nous y écrirons $xr_1, xr_2, \ldots xr_n$ à la place

des lettres $r_1, r_2, \ldots r_n$: la fonction $G(1,n)$ sera remplacée par $G(xr_1, xr_n)$, et elle représente alors le polynôme du degré $i = \frac{1}{2}\left(n + \sin^2 \frac{\pi n}{2}\right)$,

$$G(xr_1, xr_n) = 1 + xH_1(1,n) + x^2H_2(1,n) + \ldots + x^iH_i(1,n),$$

$H_1(1,n)$, $H_2(1,n)$, etc., étant encore les fonctions homogènes définies, art. [3], : il n'est pas nécessaire d'y rendre les lettres r apparentes. La même substitution étant faite dans les quatre groupes G du second membre de la formule (10), donne ces valeurs

$$\begin{aligned}
G(xr_1,xr_{m-1}) &= 1 + x\,H_1(1,m-1) + x^2\,H_2(1,m-1) + \text{etc.}\\
G(xr_{m+1},xr_n) &= 1 + x\,H_1(m+1,n) + x^2\,H_2(m+1,n) + \text{etc.}\\
G(xr_1,xr_{m-2}) &= 1 + x\,H_1(1,m-2) + x^2\,H_2(1,m-2) + \text{etc.}\\
G(xr_{m+2},xr_n) &= 1 + x\,H_1(m+2,n) + x^2\,H_2(m+2,n) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On formera le produit des deux premières de ces fonctions G entre elles, et ensuite le produit des deux autres; et ces produits seront à substituer avec $G(xr_1, xr_n)$ dans l'équation (10) qui est maintenant

$$(11)\qquad \begin{aligned}
G(xr_1,xr_n) = {} & G(xr_1,xr_{m-1}) \times G(xr_{m+1},xr_n)\\
& + xr_m\,G(xr_1,xr_{m-2}) \times G(xr_{m+2},xr_n) :
\end{aligned}$$

après avoir opéré la substitution, l'on comparera les termes affectés des puissances semblables en x des deux membres : dans le premier, le terme affecté de x^g sera $x^g.H_g(1,n)$; dans le second membre, les termes en x^g se composeront de deux classes distinctes : la première sera donnée par le produit $G(xr_1,xr_{m-1}) \times G(xr_{m+1},xr_n)$: la partie en x^g sera, d'après les

valeurs ci-dessus :

$$x^g \left\{ \begin{array}{l} H_g(1,m-1)+H_{g-1}(1,m-1).H_1(m+1,n)+H_{g-2}(1,m-1).H_2(m+1,n)+ \\ \qquad \ldots+H_1(1,m-1).H_{g-1}(m+1,n)+H_g(m+1,n) \end{array} \right\};$$

pour former les termes en x^g, de la seconde classe, on devra ne prendre dans le produit

$$G(xr_1,xr_{m-2}) \times G(xr_{m+2},xr_n)$$

que les termes en x^{g-1}, parce que étant multipliés par xr_m ils prendront le facteur x^g : voici ces termes :

$$\begin{array}{l} H_{g-1}(1,m-2)+H_{g-2}(1,m-2)H_1(m+2,n)+H_{g-3}(1,m-2)H_2(m+2,n)+ \\ \quad \ldots+H_2(1,m-2)H_{g-3}(m+2,n)+H_1(1,m-2)H_{g-2}(m+2,n)+H_{g-1}(m+2,n); \end{array}$$

multipliant donc cette classe de termes par r_m et l'ajoutant à la première classe, indépendante de r_m, on formera l'équation

$$\left. \begin{array}{l} H_g(1,n)=H_g(1,m-1)+H_{g-1}(1,m-1)H_1(m+1,n)+H_{g-2}(1,m-1)H_2(m+1,n)+ \\ \qquad +H_{g-3}(1,m-1)H_3(m+1,n)+\ldots+H_g(m+1,n) \\ +r_m\left[\begin{array}{l} H_{g-1}(1,m-2)+H_{g-2}(1,m-2)H_1(m+2,n)+H_{g-3}(1,m-2)H_2(m+2,n)+ \\ \qquad \ldots+H_1(1,m-2)H_{g-2}(m+2,n)+H_{g-1}(m+2,n) \end{array} \right]. \end{array} \right\} (12)$$

Cette formule indique comment un élément r_m entre dans la composition de la fonction homogène $H_g(1,n)$. Il est facile de reconnaître que l'on eût obtenu ce résultat, en considérant séparément la manière dont on peut composer tous les produits discontigus de l'ordre g, où la lettre r_m n'entre pas, et ensuite tous ceux où cette lettre r_m est employée comme facteur; ces derniers ne peuvent évidemment être que les combinaisons de l'ordre $g-1$, où les trois lettres r_m, r_{m-1}, r_{m+1} n'entrent pas, multipliées par r_m.

Pour exemple, prenons $g=2$, nous aurons

$$H_2(1,n)=H_2(1,m-1)+H_1(1,m-1)\,H_1(m+1,n)+H_2(m+1,n)$$
$$+r_m[H_1(1,m-2)+H_1(m+2,n)].$$

Soit encore $g=3$

$$H_3(1,n)=H_3(1,m-1)+H_2(1,m-1)\,H_1(m+1,n)+H_1(1,m-1)H_2(m+1,n)$$
$$+H_3(m+1,n)$$
$$+r_m[H_2(1,m-2)+H_1(1,m-2)\,H_1(m+2,n)+H_2(m+2,n)].$$

Reprenons l'équation (11), écrite sous la forme suivante

$$G(xr_1,xr_m,xr_n)=\quad G(xr_1,xr_{m-1})\times G(xr_{m+1},xr_n)$$
$$+\,xr_mG(xr_1,xr_{m-2})\times G(xr_{m+2},xr_n),$$

afin de manifester la composition en r_m du premier membre : l'on y changera le signe de la lettre r_m seule, on aura

$$G(xr_1,-xr_m,xr_n)=\quad G(xr_1,xr_{m-1})\times G(xr_{m+1},xr_n)$$
$$-\,xr_mG(xr_1,xr_{m-2})\times G(xr_{m+2},xr_n);$$

en ajoutant et en retranchant on aura

$$G(xr_1,xr_m,xr_n)+G(xr_1,-xr_m,xr_n)=$$
$$=2G(xr_1,xr_{m-1})\times G(xr_{m+1},xr_n);$$
$$G(xr_1,xr_m,xr_n)-G(xr_1,-xr_m,xr_n)=$$
$$=2xr_mG(xr_1,xr_{m-2})\times G(xr_{m+2},xr_n).$$

Dans la première de ces égalités, r_m n'entre pas au second membre, et l'on voit que la somme des deux polynômes du premier est décomposable en deux facteurs rationnels de formes déterminées. La différence des mêmes polynômes est aussi décomposable en $2xr_m$ et en deux facteurs de formes pareillement déterminées. Ces relations nous semblent devoir

être remarquées : elles sont également applicables à chaque élément de la série $r_2, r_3, \ldots r_{n-2}$ mis à la place de r_m.

[7] Reprenons l'équation (6) provenant d'une série partielle $r_m, r_{m+1}, \ldots r_n$,

$$G(m,n) = G(m,n-1) + r_n G(m,n-2) :$$

avec une seconde série partielle $r_l, r_{l+1}, \ldots r_m, r_{m+1}, \ldots r_n$, qui comprend la série $r_m, r_{m+1}, \ldots r_n$, formons aussi l'équation semblable

$$G(l,n) = G(l,n-1) + r_n G(l,n-2) :$$

ajoutons ces équations, en multipliant la première par $G(l,n-1)$, et la seconde par $-G(m,n-1)$; il en résulte

$$G(m,n)\, G(l,n-1) - G(m,n-1)\, G(l,n) =$$
$$- r_n[G(m,n-1)\, G(l,n-2) - G(m,n-2)\, G(l,n-1)].$$

Afin d'abréger, je désigne, pour un instant, le premier membre de l'équation par $G'(n)$, et alors le second est évidemment $-r_n G'(n-1)$, car m et l entrent de la même manière dans $G'(n)$ et dans $G'(n-1)$: on aura donc

$$G'(n) = - r_n G'(n-1),$$

et par conséquent

$$G'(n-1) = - r_{n-1}\, G'(n-2),$$
$$G'(n-2) = - r_{n-2}\, G'(n-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G'(m+1) = - r_{m+1}\, G'(m),$$
$$G'(m) \quad = - r_m \quad G'(m-1).$$

Après avoir multiplié par ordre ces formules et avoir enlevé le facteur commun aux deux membres, on aura

$$G'(n)=(-1)^{n-m+1}r_n r_{n-1} r_{n-2} \ldots r_{m+1} r_m . G'(m-1).$$

Or,

$$G'(m-1)=G(m,m-1)\,G(l,m-2)-G(m,m-2)G(l,m-1).$$

Mais, art. [4], $G(m,m-1)=1$, $G(m,m-2)=1$;
ainsi

$$G'(m-1)=G(l,m-2)-G(l,m-1)=-r_{m-1}G(l,m-3),$$

en vertu de l'équation

$$G(l,m-1)=G(l,m-2)+r_{m-1}G(l,m-3).$$

Substituant dans la valeur de $G'(n)$ on aura

$$(13)\qquad \begin{aligned} G'(n)&=G(m,n)G(l,n-1)-G(m,n-1)G(l,n)\\ &=(-1)^{n-m}r_{m-1}r_m r_{m+1}\ldots r_n G(l,m-3). \end{aligned}$$

Supposons $l=m-1$, et remplaçons par l'unité dans le second membre, la quantité $G(m-1,m-3)$, art. [4]; l'équation donnera alors

$$\left.\begin{aligned} G(m,n)\,G(m-1,n-1)-G(m,n-1)\,G(m-1,n)\\ =(-1)^{n-m}r_{m-1}r_m\ldots r_n. \end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Si vous posez ici $m=2$,

$$G(2,n)\,G(1,n-1)-G(2,n-1)\,G(1,n)=(-1)^n r_1 r_2\ldots r_n;$$

si l'on fait $m=3$,

$$G(3,n)\,G(2,n-1)-G(3,n-1)\,G(2,n)=(-1)^{n-1}r_2 r_3\ldots r_n;$$

et ainsi de suite.

Nous avons encore à remarquer une autre relation que présentent les sommes des combinaisons discontiguës $G(l,n)$, et qui est analogue à la précédente. Soient $l < m < n$ trois entiers, on a

$$G(l,m) = G(l+1,m) + r_l G(l+2,m)$$
$$G(l,n) = G(l+1,n) + r_l G(l+2,n);$$

multipliant la première équation par $G(l+1,n)$ et ajoutant à la seconde multipliée par $-G(l+1,m)$, on aura

$$G(l,m)G(l+1,n) - G(l,n)G(l+1,m)$$
$$= -r_l[G(l+1,m)G(l+2,n) - G(l+1,n)G(l+2,m)]:$$

désignons le premier membre de cette formule par $G''(l)$, le second membre sera dénoté par $-r_l G''(l+1)$, et l'on aura

$$G''(l) = -r_l G''(l+1);$$

l'on aura aussi, en remplaçant l par $l+1$, $l+2$, etc. . . .

$$G''(l+1) = -r_{l+1} G''(l+2),$$
$$G''(l+2) = -r_{l+2} G''(l+3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$G''(m) = -r_m G''(m+1);$$

on formera le produit de ces $m-l+1$ formules, et en effaçant un facteur commun aux deux membres, il vient

$$G''(l) = (-1)^{m-l} r_l r_{l+1} \dots r_m . G''(m+1);$$

mais

$$G''(m+1) = G(m+1,m)G(m+2,n) - G(m+1,n)G(m+2,m)$$
$$= G(m+2,n) - G(m+1,n) = -r_{m+1}G(m+3,n);$$

par suite de cette valeur, celle de $G''(l)$ donne l'équation

$$(15)\quad \begin{cases} G(l,m)\,G(l+1,n) - G(l,n)\,G(l+1,m) \\ \qquad = (-1)^{m-l} r_l r_{l+1} \ldots r_m r_{m+1} G(m+3,n). \end{cases}$$

On doit remarquer, dans cette relation, que la lettre l n'affecte plus que les r_l, r_{l+1}, $r_{l+2} \ldots$ dans le second membre, et qu'elle n'entre pas dans le $G(m+3,n)$: c'est ainsi que dans l'équation (13) n n'entrait pas dans $G(l,m-3)$. Ces deux formules ont entre elles une analogie dont on se rendra aisément compte.

Si vous posez $m=n-1$ dans la relation (15), et que vous remplaciez $G(n+2,n)$ par l'unité, [4], il vient

$$\begin{aligned} &G(l,n-1)\,G(l+1,n) - G(l,n)G(l+1,n-1) \\ &\qquad = (-1)^{n-l-1} r_l r_{l+1} \ldots r_n : \end{aligned}$$

cette équation rentre dans la formule (14).

Posez $m=n-2$, et remplacez $G(n+1,n)$ par l'unite dans le second membre, il vient

$$\begin{aligned} &G(l,n-2)\,G(l+1,n) - G(l,n)\,G(l+1,n-2) \\ &\qquad = (-1)^{n-l} r_l r_{l+1} \ldots r_{n-1} \end{aligned}$$

qu'on eût tirée de (13), en y écrivant $m=n-2$.

[8] L'équation (4)

$$G(1,n) = G(1,n-1) + r_n G(1,n-2)$$

fournit aisément l'énumération des termes distincts dont se composent les fonctions homogènes H_1, H_2, H_3, ... et par suite le nombre des termes dont $G(1,n)$ est lui-même formé. Nous désignerons respectivement par h_1, h_2, h_3, etc.... h_i,

ces dénombrements, pour les fonctions homogènes

$$H_1(1,n),\ H_2(1,n),\ \ H_3(1,n), \ldots H_i(1,n).$$

Admettons que ces lettres r_1, r_2, ... r_n, que nous avons distinguées l'une de l'autre, deviennent toutes de même valeur numérique r: il est évident que $H_1(1,n)$ devient alors $h_1 r = nr$; que $H_2(1,n)$ devient $h_2 . rr$; que $H_3(1,n)$ devient $h_3 . r^3$, et qu'en général pour toute fonction homogène $H_i(1,n) = h_i r^i$. Ainsi l'on aura pour la fonction $G(1,n)$

$$G(1,n) = 1 + rh_1 + r^2h_2 + r^3h_3 + \text{etc.}$$

Cette fonction, qui procède suivant les puissances de r, s'arrêtera à r^ih_i, i étant l'entier compris dans $\frac{n+1}{2}$, ou ce nombre lui-même quand n sera impair.

Les premières valeurs de $G(1,n)$ étaient [3]

$$G(1,1) = 1 + r_1,$$
$$G(1,2) = 1 + r_1 + r_2,$$
$$G(1,3) = 1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_1r_3;$$

ainsi, quand les r sont égaux, on a

$$G(1,1) = 1 + r,\quad G(1,2) = 1 + 2r;\quad G(1,3) = 1 + 3r + r^2.$$

Cela posé, reprenons l'équation (4), où $r_n = r$, savoir

$$G(1,n) = G(1,n-1) + rG(1,n-2):$$

pour abréger, nous allons écrire ici

$$G_n = G_{n-1} + rG_{n-2}, \tag{16}$$

où l'on voit que les G_n forment une suite récurrente. On en retrouvera la fonction génératrice

$$T = 1 + tG_1 + t^2G_2 + \ldots + t^nG_n + \text{etc.},$$

par le moyen ordinaire : il consiste ici à multiplier les deux membres de cette égalité par $1 - t - rt^2$, ce qui donne

$$
\begin{array}{rl|l|l|l}
(1 - t - rt^2)T = & 1 + G_1 & t + G_2 & t^2 + \ldots + G_n & t^n + \text{etc.} \\
& - 1 & - G_1 & - G_{n-1} & \\
& & - r & - rG_{n-2} &
\end{array}
$$

Tous les termes à partir de t^2, dans la série, s'évanouissent en vertu de l'échelle de relation, c'est-à-dire de l'équation

(16) $$G_n - G_{n-1} - rG_{n-2} = 0.$$

Ainsi l'on a cette valeur de la fonction génératrice T,

$$T = \frac{1 + tr}{1 - t(1 + tr)},$$

car $G_1 - 1 = 1 + r - 1 = r$. Il suffit maintenant d'opérer le développement de T selon les puissances entières positives de t, ce qui peut se faire de deux manières différentes.

En premier lieu, on a par le développement du diviseur de T, selon les puissances de $t(1 + tr)$, que nous supposons < 1,

$$T = 1 + tr + t(1 + tr)^2 + t^2(1 + tr)^3 + \ldots + t^{n-i}(1 + tr)^{n-i+1} + \text{etc.}$$

Le terme affecté de t^n dans $t^{n-i}(1 + tr)^{n-i+1}$ proviendra du terme en t^i, de $(1 + tr)^{n-i+1}$; ce dernier terme est, selon la formule du binôme,

$$t^i \cdot r^i \cdot \frac{(n-i+1)(n-i)(n-i-1)\ldots(n-2i+2)}{1.2.3\ldots\ldots i};$$

ainsi dans T se trouve le terme en t^n

$$t^n \cdot r^i \cdot \frac{(n-i+1)(n-i)(n-i-1)\ldots(n-2i+2)}{1.2.3\ldots\ldots i},$$

provenant du terme $t^{n-i}(1 + tr)^{n-i+1}$.

On donnera à i successivement les valeurs o, 1, 2, 3,... jusqu'à $\frac{n}{2}$, si n est pair, ou jusqu'à $\frac{n+1}{2}$, si n est impair, et l'on formera ainsi tous les termes de la valeur du coefficient G_n de t^n, dans le développement de la fonction génératrice T; il en résulte

$$(17)\quad \begin{cases} G_n = 1 + r.n + r^2.\frac{n-1.n-2}{1.2} + r^3.\frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}.\frac{n-4}{3} \\ \qquad + r^4.\frac{n-3}{1}.\frac{n-4}{2}.\frac{n-5}{3}.\frac{n-6}{4} + \text{etc.} \end{cases}$$

Cette valeur comparée à

$$G_n = 1 + rh_1 + r^2h_2 + r^3h_3 + r^4h_4 + \text{etc.}$$

donne

$$h_1 = n$$

$$h_2 = \frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2},$$

$$h_3 = \frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}.\frac{n-4}{3},$$

. . . .

. . . .

$$h_i = \frac{n-i+1}{1}.\frac{n-i}{2}.\frac{n-i-1}{3}...\frac{n-2i+2}{i}.$$

Cette expression montre que quand n sera pair, on aura $h = 0$ pour les valeurs de $i > \frac{n}{2}$; et quand n sera impair, $h_i = 0$ pour les valeurs de $i > \frac{n+1}{2}$, conformément à ce qui a été remarqué ci-dessus.

Ces nombres $h_2, h_3, \ldots h_i$ des combinaisons discontiguës ont été considérés par plusieurs analystes, et déterminés par d'autres méthodes, ainsi qu'on peut le voir dans le troisième volume des *Annales de mathématiques* de M. Gergonne, 1812.

On parvient à une expression différente de G_n en développant d'une autre manière selon les puissances de t, la fraction T : dans cette vue l'on décomposerait T en deux fractions simples répondant aux facteurs du diviseur $1 - t - t^2 r$: mais on arrive, peut-être, plus promptement au résultat en intégrant sous une forme différente l'équation (16)

$$G_n = G_{n-1} + rG_{n-2} :$$

pour cela on pose $G_n = A . \alpha^n$, A et α étant des quantités indépendantes de n. La substitution donne

$$A\alpha^n = A\alpha^{n-1} + Ar\alpha^{n-2};$$

et en divisant par $A\alpha^{n-2}$,

$$\alpha^2 = \alpha + r, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4r}) :$$

on prendra le signe + du radical pour la valeur de α, et l'on nommera β la seconde racine, qui répond au signe — du radical. L'équation (16) étant évidemment satisfaite par la valeur $G_n = B . \beta^n$, l'expression générale de G_n sera

$$G_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

A et B étant deux arbitraires qui vont être déterminées. Nous avons remarqué, ci-dessus, que l'origine particulière des G_n nous apprend que

$$G_0 = 1, \ G_1 = 1 + r;$$

il en résulte que

$$1 = A + B,$$
$$1 + r = A\alpha + B\beta;$$

multipliant par $r + 1$ la première équation et retranchant la seconde, on aura

$$A(r + 1 - \alpha) + B(r + 1 - \beta) = 0;$$

mais $\alpha + \beta = 1$, donc $r + 1 - \alpha = r + \beta = \beta^2$, et pareille-

ment $r + 1 - \beta = \alpha^2$. On aura ainsi

$$A = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta^2}{\alpha - \beta},$$

et par suite

$$G_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}.$$

En remplaçant α et β par leurs valeurs en r, on a enfin

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{1+4r}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4r}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4r}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Par la double expression de G_n on pourrait former cette équation algébrique, qui suppose n entier positif,

$$\frac{1}{\sqrt{1+4r}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4r}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4r}}{2}\right)^{n+2}\right]$$
$$= 1 + nr + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} r^2 + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3} r^3 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(n-i+1)(n-i)(n-i-1)\ldots(n-2i+2)}{2.3\ldots\ldots i} r^i :$$

le second membre s'arrêtant de lui-même à $i = < \frac{n+1}{2}$. On pourrait déduire de cette formule la décomposition du second membre en facteurs; mais cette équation rentrerait, au fond, dans celle du $\sin(n+2)z$, et que donne Euler au chapitre XIV de son *Introductio in analysin*...

La valeur de G_n, exprimée à l'aide du radical, donne la somme

$$G_n = 1 + rh_1 + r^2 h_2 + \ldots r^i h_i.$$

Soit g_n ce que devient G_n quand on y pose $r = 1$; on aura

$$g_n = 1 + h_1 + h_2 + h_3 + \text{etc.} + h_i :$$

ou bien

$$g_n = 1 + n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3} + \text{etc.}$$

Cette somme est le dénombrement total des combinaisons discontiguës que comportent n lettres. En y posant $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., on a pour les premières des g_n, les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ldots$$

La loi $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ permet de les former successivement; mais la formule donne un terme indépendamment des autres, et seulement d'après son rang.

On obtient une autre forme de g_n en posant $r=1$ dans la valeur précédente de G_n, exprimée par le radical; il en résulte

$$(19)\qquad g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]:$$

le second terme de g_n est toujours au-dessous de l'unité, et d'autant plus petit que n est plus considérable; on pourra donc calculer g_n par le nombre entier le plus voisin du premier terme $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$. Son logarithme tabulaire, à 7 décimales, est

$$n.[0,2089877] + 0,0684905.$$

[9] L'équation générale (10)

$$G(1,n) = G(1,m-1)\,G(m+1,n) + r_m\,.\,G(1,m-2)\,.\,G(m+2,n)$$

a été formée sous diverses conditions, et particulièrement celle de m entier $<n$. Quand les lettres $r_1, r_2, \ldots r_n$ qui composent les $G(1,n)$, etc., sont égales à r, cette équation devient

$$G(1,n) = G(1,m-1)\,G(m+1,n) + r.G(1,m-2)\,G(m+2,n):$$

alors $G(1,n)$ est un polynôme entier, développé selon les puissances de r, dont nous avons formé l'expression

$$G(1,n) = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta};$$

cette valeur donne facilement pour les quatre autres fonctions

analogues qui entrent dans l'équation (10)

$$G(1, m-1) = \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta},$$

$$G(m+1, n) = \frac{\alpha^{n-m+2} - \beta^{n-m+2}}{\alpha - \beta},$$

$$G(1, m-2) = \frac{\alpha^{m} - \beta^{m}}{\alpha - \beta},$$

$$G(m+2, n) = \frac{\alpha^{n-m+1} - \beta^{n-m+1}}{\alpha - \beta},$$

α et β étant toujours les racines de l'équation $\alpha^2 - \alpha - r = 0$, en sorte que $r = -\alpha\beta$. Ces polynômes doivent donc vérifier l'équation

$$G(1,n) = G(1,m-1)\,G(m+1,n) - \alpha\beta G(1,m-2)\,G(m+2,n).$$

Opérons la substitution, et multiplions par $(\alpha - \beta)$; il vient

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) = {} & (\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})(\alpha^{n-m+2} - \beta^{n-m+2}) \\ & - \alpha\beta(\alpha^{m} - \beta^{m})(\alpha^{n-m+1} - \beta^{n-m+1}) :\end{aligned}$$

des multiplications vérifient cette équation, et l'on reconnaît même que la formule est identique, quels que soient α, β, n et m. On écrira cette relation algébrique plus simplement, en y remplaçant n par $n-2$: on aura ainsi

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha^{n} - \beta^{n}) = {} & (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}) \\ & - \alpha\beta(\alpha^{n-m-1} - \beta^{n-m-1})(\alpha^{m} - \beta^{m}) :\end{aligned}$$

où m et n sont complétement arbitraires.

Nous avons établi la formule (13)

$$\begin{aligned}& G(m,n).G(l,n-1) - G(m,n-1)\,G(l,n) \\ & = (-1)^{n-m} r_{m-1} r_m \ldots r_n G(l,m-3).\end{aligned}$$

Les valeurs particulières déduites de la formule

$$G(m,n) = \frac{\alpha^{n-m+3} - \beta^{n-m+3}}{\alpha - \beta}$$

doivent satisfaire à cette relation, où l'on supposera

$$r_{m-1} = r_m = \ldots = r_n = r = -\alpha\beta;$$

il en résulte cette équation

$$(\alpha^{n-m+3}-\beta^{n-m+3})(\alpha^{n-l+2}-\beta^{n-l+2}) - (\alpha^{n-l+3}-\beta^{n-l+3})(\alpha^{n-m+2}-\beta^{n-m+2})$$
$$= (\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{n-m+2}(\alpha^{m-l}-\beta^{m-l}):$$

on reconnaît, en effet, qu'elle est identique; et l'on voit même qu'elle a lieu pour toutes valeurs algébriques des m, n, α, β.

Si dans ces relations on pose $\alpha = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $\beta = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, elles répondent à des relations trigonométriques. On pourrait déduire quelques autres formules, soit de l'équation (11), soit de la formule (13).

[10] Arrêtons-nous quelques instants, pour montrer l'usage des groupes discontigus dans la théorie des fractions continues: une fraction continue ainsi composée

$$1+\cfrac{r_1}{1+\cfrac{r_2}{1+\cfrac{r_3}{1+\text{etc.}\atop \cdots\cdots\cdots \cfrac{}{1+\cfrac{r_{n-1}}{1+r_n}}}}}$$

sera représentée par $f(r_1, r_n)$. En l'arrêtant à ses deux premiers termes, on aura

$$f(r_1, r_2) = 1 + \frac{r_1}{1+r_2} = \frac{1+r_1+r_2}{1+r_2}.$$

Mais en remplaçant r_2 par $\frac{r_2}{1+r_3}$, la fraction $f(r_1, r_2)$ se change en $f(r_1, r_3)$; on aura donc

$$f(r_1, r_3) = \frac{1 + r_1 + \dfrac{r_2}{1 + r_3}}{1 + \dfrac{r_2}{1 + r_3}} = \frac{1 + r_1 + r_2 + r_3(1 + r_1)}{1 + r_2 + r_3}.$$

Or d'après les notations de l'article [3], et la formule (4), on a

$$f(r_1, r_2) = \frac{G(1,2)}{G(2,2)}, \quad \text{et} \quad f(r_1, r_3) = \frac{G(1,2) + r_3 G(1,1)}{G(2,2) + r_3} = \frac{G(1,3)}{G(2,3)}.$$

Remplaçant ici r_3 par $\dfrac{r_3}{1 + r_4}$, on aura, en multipliant de haut en bas par $1 + r_4$,

$$f(r_1, r_4) = \frac{G(1,2)(1 + r_4) + r_3 G(1,1)}{G(2,2)(1 + r_4) + r_3} = \frac{G(1,3) + r_4 G(1,2)}{G(2,3) + r_4 G(2,2)},$$

ou bien

$$f(r_1, r_4) = \frac{G(1,4)}{G(2,4)};$$

car

$$G(1,3) + r_4 G(1,2) = G(1,4) \quad \text{et} \quad G(2,3) + r_4 G(2,2) = G(2,4)$$

selon la même formule (4).

On aura de la même manière

$$f(r_1, r_5) = \frac{G(1,5)}{G(2,5)};$$

et en général

$$f(r_1, r_n) = \frac{G(1,n)}{G(2,n)} = \frac{G(r_1, r_n)}{G(r_2, r_n)},$$

la fonction $G(r_1, r_n)$ étant le groupe des produits discontigus que nous avons défini art. [3], et qui résulte de la combinaison des n lettres r_1, r_2, $r_3, \ldots r_n$; et $G(r_2, r_n)$ étant le groupe des combinaisons discontiguës formées avec les $n - 1$ lettres r_2, r_3, $r_4, \ldots r_n$; ce serait aussi la valeur de $G(r_1, r_n)$ où l'on poserait $r_1 = 0$, ou dont on effacerait tous les termes en r_1.

Il est aisé de reproduire la fraction continue $f(r_1, r_n)$ en partant du rapport $\frac{G(1,n)}{G(2,n)}$, car on a par la formule (6)

$$G(1,n) = G(2,n) + r_1 G(3,n);$$

il en résulte

$$\frac{G(1,n)}{G(2,n)} = 1 + \frac{r_1 G(3,n)}{G(2,n)} = 1 + \frac{r_1}{G(2,n):G(3,n)};$$

mais on a, pour la même raison,

$$\frac{G(2,n)}{G(3,n)} = 1 + \frac{r_2}{G(3,n):G(4,n)},$$

$$\frac{G(3,n)}{G(4,n)} = 1 + \frac{r_3}{G(4,n):G(5,n)}, \text{ etc.};$$

et par des substitutions consécutives on aura

$$\frac{G(1,n)}{G(2,n)} = 1 + \cfrac{r_1}{1 + \cfrac{r_2}{1 + \cfrac{r_3}{1 + \text{etc.}}}},$$

cette fraction continue s'arrêtant nécessairement à $\frac{r_{n-1}}{1+r_n}$, puisque l'on aura eu à substituer le dernier rapport,

$$\frac{G(n-1,n)}{G(n,n)} = 1 + \frac{r_{n-1}}{1+r_n}.$$

La loi du retour d'une fraction continue de la forme proposée

$$f(r_1, r_n) = 1 + r_1 : (1 + r_2 : (1 + r_3 : \ldots (1 + r_{n-1} : (1 + r_n)) \ldots)),$$

à la fraction ordinaire devient donc d'une expression simple, puisqu'il suffit de former les deux groupes $G(1,n)$ et $G(2,n)$, ou seulement le premier, car le second s'en déduit en y po-

sant $r_1 = 0$. La composition du groupe $G(1,n)$ est assez simple pour que l'on en écrive tous les termes de mémoire, étant dirigé par la règle de la discontiguïté expliquée dans l'article [3].

De cette forme particulière $f(r_1,r_n)$ de la fraction continue, on peut passer à la forme la plus générale; il suffit pour cela d'écrire dans $f(r_1,r_n)$

$$r_1 = \frac{\gamma_1}{\beta\beta_1}, \quad r_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_1\beta_2}, \quad r_3 = \frac{\gamma_3}{\beta_2\beta_3}, \ldots r_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n},$$

et de multiplier ensuite par β la fraction $f(r_1,r_n)$: on a en effet

$$\beta\left(1 + \cfrac{\gamma_1 : \beta\beta_1}{1 + \cfrac{\gamma_2 : \beta_1\beta_2}{1 + \cfrac{\gamma_3 : \beta_2\beta_3}{1 + \text{etc.} \atop \cdots\cdots \atop 1 + \cfrac{\gamma_{n-1} : \beta_{n-2}\beta_{n-1}}{1 + \gamma_n : \beta_{n-1}\beta_n}}}}\right) = \beta + \cfrac{\gamma_1}{\beta_1 + \cfrac{\gamma_2}{\beta_2 + \cfrac{\gamma_3}{\beta_3 + \text{etc.} \atop \cdots\cdots \atop + \cfrac{\gamma_{n-1}}{\beta_{n-1} + \cfrac{\gamma_n}{\beta_n}}}}}.$$

Soit F, la fraction continue

$$\beta f\left(\frac{\gamma_1}{\beta\beta_1}, \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n}\right)$$

réduite à la forme de fraction ordinaire, d'après l'expression

$$f(r_1, r_n) = \frac{G(r_1, r_n)}{G(r_2, r_n)};$$

en sorte que

$$F = \frac{\beta G\left(\frac{\gamma_1}{\beta\beta_1}, \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n}\right)}{G\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1\beta_2}, \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n}\right)}:$$

cette expression renferme dans son numérateur des divi-

seurs β_1, β_2, β_3, etc., qui sont aussi contenus dans le dénominateur. On les fera tous disparaître, et l'on ramènera à la forme de fonctions entières des lettres β_i et γ_i, le numérateur et le dénominateur de la réduite F, en multipliant haut et bas par le produit $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots \beta_n$ de tous les diviseurs. La réduite F devient ainsi

$$\frac{\beta\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \mathrm{G}\left(\frac{\gamma_1}{\beta\beta_1}, \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n}\right)}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \mathrm{G}\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1\beta_2}, \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n}\right)}.$$

En effet le groupe $\mathrm{G}(r_1,r_n)$ est composé de termes tels que $\ldots r_f . r_{f+2+h} \ldots$, et ce terme deviendra, dans le numérateur de la réduite F,

$$\beta\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\left(\ldots \frac{\gamma_f}{\beta_{f-1}\beta_f} . \frac{\gamma_{f+2+h}}{\beta_{f+1+h}\beta_{f+2+h}} \ldots\right) =$$
$$\beta\beta_1\beta_2\ldots\beta_{f-2} \times \gamma_f \times \beta_{f+1}\beta_{f+2}\ldots\beta_{f+h} \times \gamma_{f+2+h} \times \beta_{f+3+h}\beta_{f+4+h}\ldots\beta_n.$$

La même réduction s'opérera sur chaque terme, tant au numérateur qu'au dénominateur de la réduite. Il sera facile de traduire en règle, ou en théorème, la loi de cette transformation : en la déduisant des groupes de combinaisons discontiguës, il me paraît qu'on lui donne l'origine la plus simple dont cette loi soit susceptible.

Si tous les numérateurs partiels $r_1, r_2, \ldots r_n$ de la fraction continue $f(r_1,r_n)$ étaient égaux entre eux et à la lettre r, la fonction $\mathrm{G}(r_1,r_n)$ se changerait en celle que nous avons déterminée [8], et dont la valeur est

$$\mathrm{G}(r_1,r_n) = \frac{1}{2^{n+2}} . \frac{(1+\sqrt{1+4r})^{n+2} - (1-\sqrt{1+4r})^{n+2}}{\sqrt{1+4r}};$$

le diviseur $\mathrm{G}(r_2,r_n)$ aurait une semblable expression déduite

de la même fonction, où l'on remplacerait n par $n-1$; ainsi

$$G(r_2, r_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(1+\sqrt{1+4r})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4r})^{n+1}}{\sqrt{1+4r}}:$$

le rapport de ces deux quantités sera l'expression de la fraction continue

$$f(r_1, r_n) = 1 + \cfrac{r}{1 + \cfrac{r}{1 + \text{etc.}}}$$

arrêtée à son $n^{\text{ième}}$ terme; l'on a donc

$$f(r_1, r_n) = \frac{(1+\sqrt{1+4r})^{n+2} - (1-\sqrt{1+4r})^{n+2}}{2.[(1+\sqrt{1+4r})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4r})^{n+1}]}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$f(r_1, r_n) = \frac{1+\sqrt{1+4r}}{2} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{1+4r}}{1+\sqrt{1+4r}}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{1+4r}}{1+\sqrt{1+4r}}\right)^{n+1}} \right\}.$$

Si l'on pose dans cette formule $r = y + y^2$; on a

$$1+\sqrt{1+4r} = 1+1+2y = 2(1+y), \quad 1-\sqrt{1+4r} = -2y;$$

partant

$$\frac{1-\sqrt{1+4r}}{1+\sqrt{1+4r}} = -\frac{y}{1+y}.$$

La fraction continue

$$1 + \cfrac{y+y^2}{1+y+y^2 \atop \underline{1+y+y^2} \atop \underline{\cdots\cdots\cdots} \atop 1+y+y^2}$$

prolongée jusqu'à son $n^{\text{ième}}$ terme, aura donc pour valeur

$$\frac{(1+y)^{n+2}-y^{n+2}(-1)^n}{(1+y)^{n+1}-y^{n+1}(-1)^{n+1}}.$$

Si $y=-\frac{1}{2}$, cette quantité devient $\frac{n+2}{2n+2}$; c'est la valeur de la fraction continue

$$1-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{1-\text{etc.}}}}}$$

prolongée jusqu'à son $n^{\text{ième}}$ terme.

Nous avons vu que le nombre des termes distincts dont le groupe $G(r_1, r_n)$ est composé, peut être exprimé par l'entier le plus voisin de

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}.$$

Ce sera évidemment aussi le nombre des termes distincts du numérateur de la réduite de la fraction continue générale; et le nombre des termes de son diviseur sera donné de la même manière par l'entier le plus voisin de

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Avant de passer à d'autres applications des fonctions $G(1,n)$, nous devons exposer rapidement quelques propriétés de certains groupes de combinaisons discontiguës plus composées, qui serviront de base à la méthode d'intégration de l'équation linéaire à coefficients variables, soit du troisième ordre, soit d'un ordre quelconque plus élevé.

[11] Deux séries de lettres

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_n,$$
$$s_2, s_3, s_4, \ldots s_n,$$

vont être combinées entre elles d'après la loi suivante qui fournira des associations discontiguës d'un nouveau caractère : on posera

$$\begin{aligned}
G(1,1) &= 1 + r_1,\\
G(1,2) &= G(1,1) + r_2 + s_2,\\
G(1,3) &= G(1,2) + r_3 G(1,1) + s_3,\\
G(1,4) &= G(1,3) + r_4 G(1,2) + s_4 G(1,1),\\
G(1,5) &= G(1,4) + r_5 G(1,3) + s_5 G(1,2),
\end{aligned}$$

et en général

$$G(1,m) = G(1,m-1) + r_m G(1,m-2) + s_m G(1,m-3) :$$

cela donne par des substitutions

$$\begin{aligned}
G(1,2) &= 1 + r_1 + r_2 + s_2,\\
G(1,3) &= 1 + r_1 + r_2 + s_2 + (1+r_1)r_3 + s_3,\\
G(1,4) &= \left\{\begin{matrix} 1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_1 r_3 \\ + s_2 + s_3 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1 + r_1 + r_2 \\ + s_2 \end{matrix}\right\} r_4 + (1+r_1)s_4 :
\end{aligned}$$

la première partie $G(1,3)$, de $G(1,4)$, est formée de lettres de rangs inférieurs à 4; la partie $G(1,2)$ multipliée par r_4 ne renferme que des lettres inférieures de deux rangs à 4; et la partie affectée de s_4 ne renferme que la lettre r_1 dont le rang est inférieur de trois à celui de s_4. La même remarque est à faire sur la constitution du groupe $G(1,3)$, ou de $G(1,5)$, $G(1,6)$, etc. Il en résulte, 1° que la lettre r_m dans $G(1,m)$ ne peut s'associer qu'avec les lettres de $G(1,m-2)$ dont le rang

est $m-2$, au plus; et 2°, que s_m ne peut s'associer qu'avec les lettres de $G(1,m-3)$, dont le rang est $m-3$ au plus, c'est-à-dire, inférieur de trois rangs, au moins, à celui de s_m. En continuant les combinaisons des lettres selon la même constitution, et jusqu'à l'épuisement des lettres des deux séries, nous aurons pour la dernière composition

$$(20)\quad G(1,n)=G(1,n-1)+r_nG(1,n-2)+s_nG(1,n-3).$$

Les notations actuelles $G(1,2)$, $G(1,3)\ldots G(1,n)$ indiquent des groupes de combinaisons discontiguës plus complexes que les groupes que nous avons considérés à partir du paragraphe [3]: il ne saurait y avoir aucune ambiguïté, parce que nous n'aurons jamais à employer conjointement des groupes des deux espèces. Il est visible que si l'on suppose nulles toutes les lettres $s_2, s_3, \ldots s_n$ dans le groupe actuel $G(1,n)$, on retrouvera l'ancien groupe du n° [3]. Mais si l'on supposait nulles les lettres $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$, il ne resterait dans le groupe $G(1,n)$ que des combinaisons discontiguës d'un caractère différent de celui du n° [3].

Nous eussions pu combiner deux séries d'un même nombre de lettres

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_n$$
$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_n$$

d'après un mode semblable, que nous avons décrit dans le tome XVII des *Comptes rendus de l'Académie;* mais nous nous sommes assuré depuis, que l'algorithme qui en résulte est plus compliqué que celui que nous allons employer, et cette complication pouvait nuire aux conséquences que nous voulons déduire : il est d'ailleurs aisé de passer des groupes de l'une des deux hypothèses à ceux de l'autre.

Avec deux séries partielles

$$r_m,\ r_{m+1},\ r_{m+2},\ \ldots\ r_n,$$
$$s_{m+1},\ s_{m+2},\ \ldots\ s_n,$$

nous formerons des groupes de combinaisons discontiguës d'après le mode que nous venons d'expliquer : ainsi nous poserons

$$\begin{aligned}
&G(m,m) = 1 + r_m,\\
&G(m,m+1) = G(m,m) + r_{m+1} + s_{m+1},\\
&G(m,m+2) = G(m,m+1) + r_{m+2}G(m,m) + s_{m+2},\\
&G(m,m+3) = G(m,m+2) + r_{m+3}G(m,m+1) + s_{m+3}G(m,m),\\
&G(m,l) = G(m,l-1) + r_lG(m,l-2) + s_lG(m,l-2),
\end{aligned}$$

etc.

Lorsque l'on aura épuisé toutes les lettres jusqu'à r_n et s_n, la dernière des combinaisons, qui suppose toutes les précédentes, sera

$$(21)\quad G(m,n) = G(m,n-1) + r_nG(m,n-2) + s_nG(m,n-3).$$

L'équation en $G(m,l)$ convient à toute valeur de $l > m+2$; pour qu'elle puisse être étendue à l moindre que $m+2$, par exemple, à $l = m+1$, on devra avoir

$$G(m,m+1) = G(m,m) + r_{m+1}G(m,m-1) + s_{m+1}G(m,m-2);$$

mais, par hypothèse,

$$G(m,m+1) = G(m,m) + r_{m+1} + s_{m+1};$$

pour que ces deux valeurs de $G(m,m+1)$ soient identiques, on posera, quel que soit le nombre entier positif m,

$$(22)\qquad G(m,m-1) = 1,\quad G(m,m-2) = 1.$$

Ces deux symboles n'étaient pas compris dans la définition du groupe $G(m,n)$, et nous sommes libres de leur attribuer ces valeurs. En posant $l=m$, dans la même équation (21) on aura

$$G(m,m)=G(m,m-1)+r_m G(m,m-2)+s_m G(m,m-3),$$

ou bien, en remplaçant $G(m,m)$, $G(m,m-1)$, $G(m,m-2)$ par les valeurs précédentes, $1+r_m=1+r_m+s_m G(m,m-3)$; ce qui exige que $G(m,m-3)=0$. En posant encore $l=m-1$ dans l'équation (21), on aura $1=1+s_{m-1}G(m,m-4)$; d'où $G(m,m-4)=0$. Il est encore nécessaire d'étendre l'équation (21) à $n=m-2$; en ayant égard aux symboles que nous venons de déterminer, elle donnera

$$1=0+r_{m-2}.0+s_{m-2}G(m,m-5),$$

en sorte que l'on a $G(m,m-5)=\frac{1}{s_{m-2}}$: on pourrait étendre plus loin ces déterminations; mais les précédentes suffiront à notre objet : nous les réunissons ici

$$(22)\begin{cases} G(m,m-1)=1, \quad G(m,m-2)=1, \\ G(m,m-3)=0, \quad G(m,m-4)=0, \quad s_{m-2}G(m,m-5)=1; \end{cases}$$

ou bien encore sous une autre forme

$$G(m+1,m)=1, \quad G(m+2,m)=1,$$
$$G(m+3,m)=0, \quad G(m+4,m)=0, \quad s_{m+3}G(m+5,m)=1:$$

des déterminations analogues ont été expliquées dans l'article [4]. Si l'on suppose $m=1$, dans les formules (22), on aura, par les quatre premières,

$$G(1,0)=1, \quad G(1,-1)=1, \quad G(1,-2)=0, \quad G(1,-3)=0.$$

[12] Dans le groupe $G(1,n)$ deux quelconques des lettres

r_m, s_m entrent d'une certaine manière, que nous allons reconnaître. Voyons d'abord comment les premières lettres r_1, s_2 concourent à la formation de ce groupe: si dans $G(1,n)$ on suppose $r_1 = 0$, $s_2 = 0$, il n'y restera que les combinaisons fournies par les lettres

$$\begin{array}{l} r_2, \; r_3, \; r_4, \; \ldots \; r_n, \\ \quad\;\; s_3, \; s_4, \; \ldots \; s_n; \end{array}$$

et le groupe qui en résulte est exprimé par $G(2,n)$: ce sera une première partie de $G(1,n)$, celle qui est indépendante de r_1 et de s_2 : le produit $r_1G(3,n)$ fournira des combinaisons discontiguës renfermées dans $G(1,n)$, et l'on peut s'assurer qu'elles offrent toutes celles qui ont r_1 pour facteur; $s_2G(4,n)$ ne renferme aussi que des combinaisons discontiguës contenues dans $G(1,n)$, et ce sont toutes celles qui ont s_2 pour facteur : on a donc, en réunissant ces trois parties de $G(1,n)$

$$G(1,n) = G(2,n) + r_1G(3,n) + s_2G(4,n).$$

Quand il s'agit du groupe $G(m,n)$, résultant des combinaisons discontiguës des lettres

$$\begin{array}{l} r_m, \; r_{m+1}, \; r_{m+2}, \; \ldots \; r_n, \\ \qquad\; s_{m+1}, \; s_{m+2}, \; \ldots \; s_n; \end{array}$$

on reconnaît, par la même démonstration, que

$$(23) \quad G(m,n) = G(m+1,n) + r_mG(m+2,n) + s_{m+1}G(m+3,n):$$

formule analogue à celle des combinaisons d'une seule série de lettres : il suffirait d'y supposer tous les s égaux à zéro pour en déduire l'équation (9). Les symboles (22) conviennent à l'équation (23), et lui donnent plus d'extension qu'elle ne semblait en avoir, d'après son origine.

Si l'on suppose, par exemple, $m = n - 1$, on aura

$$G(n-1,n) = G(n,n) + r_{n-1}G(n+1,n) + s_nG(n+2,n);$$

or $G(n+1,n)=1$, $G(n+2,n)=1$, (22); on a donc $G(n-1,n)=1+r_n+r_{n-1}+s_n$; ce qui est conforme à la définition de $G(m,m+1)$, donnée ci-dessus. On vérifierait de la même manière la formule (23) pour $m=n-2$, ou pour $m=n$, etc.

Reprenons maintenant la question générale de reconnaître comment les lettres intermédiaires r_m, s_m entrent dans la composition du groupe $G(1,n)$, des combinaisons discontiguës des deux séries

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots r_{m-1},\ r_m,\ r_{m+1},\ r_{m+2},\ldots r_n,$$
$$s_2,\ s_3,\ s_4,\ldots s_{m-1},\ s_m,\ s_{m+1},\ s_{m+2},\ldots s_n.$$

Il convient d'abord de remarquer que le produit de deux groupes, $G(1,m-l)\times G(m,n)$, ne fournit que des combinaisons discontiguës, pourvu que l soit supérieur ou égal à 2 : on a, en effet,

$$G(1,m-l)=1+F_{m-l},$$

où F_{m-l} dénote l'ensemble des combinaisons discontiguës des lettres r et s dont les indices ne surpassent pas $m-l$; on a aussi

$$G(m,n)=1+F_m,$$

F_m désignant l'ensemble des combinaisons discontiguës des lettres r dont les indices sont égaux ou supérieurs à m, ainsi que des lettres s dont les indices sont supérieurs à m : le produit de ces groupes est donc

$$G(1,m-l)\,G(m,n)=1+F_{m-l}+F_m+F_{m-l}F_m:$$

les deux premiers termes $F_{m-l}+F_m$ sont composés d'associations discontiguës; et il en est ainsi de $F_{m-l}F_m$, car un terme discontigu de F_{m-l} multiplié par un terme de F_m ne

donnera qu'un terme discontigu, tant que l ne sera pas au-dessous de 2 : on s'en assure en se rappelant que $m-l$ est le plus haut indice des lettres r, s dans F_{m-l}, et que les moindres indices des lettres de F_m sont m pour r, $m+1$ pour s; les termes les plus rapprochés, par leurs indices, dans F_{m-l} et F_m seront donc de la forme

$$\left.\begin{matrix} +\ldots r_{m-l} \\ +\ldots s_{m-l} \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{matrix} r_m s_{m+g}\ldots \\ +\, s_{m+1} r_{m+g'}\ldots \end{matrix}\right.$$

Ainsi le caractère de la discontiguïté existera dans le produit de deux termes de cette espèce, l étant supérieur à 1 : ce lemme pourrait être étendu au produit de trois, quatre, etc., groupes partiels. Cela posé, remarquez que $G(m+1,n)$, formé avec les combinaisons des lettres

$$\begin{matrix} r_{m+1}, & r_{m+2}, \ldots r_n, \\ & s_{m+2}, \ldots s_n, \end{matrix}$$

ne contient pas r_m, s_m, s_{m+1}; les mêmes lettres sont aussi étrangères au groupe $G(1,m-1)$, et par suite au produit

$$G(1,m-1)\,G(m+1,n):$$

d'après le lemme, il doit ne renfermer que des combinaisons contenues dans $G(1,n)$; ce sera donc la partie de ce groupe qui resterait, si l'on y posait $r_m=0$, $s_m=0$, $s_{m+1}=0$, ou la partie indépendante de ces lettres. Le produit $G(1,m-2)\times G(m+2,n)$, n'est aussi composé que de termes discontigus, et en le multipliant par r_m, on aura

$$G(1,m-2).r_m.G(m+2,n):$$

ce produit sera encore composé de termes discontigus, parce r_m a un indice de deux unités supérieur au plus haut indice de $G(1,m-2)$; et que les indices de $G(m+2,n)$ sont supérieurs à m, de deux unités, au moins, pour les r, et de trois

au moins, pour les s. Par les mêmes raisons, le produit $G(1,m-3)s_m G(m+2,n)$ sera l'ensemble des combinaisons discontiguës de $G(1,n)$ qui renferment la lettre s_m, et $G(1,m-2)s_{m+1}G(m+3,n)$ sera la somme des combinaisons qui ont s_{m+1} pour facteur; en réunissant les quatre parties, dont $G(1,n)$ se compose, on aura l'équation

$$(24)\quad \begin{aligned} G(1,n) = {} & G(1,m-1)G(m+1,n) + r_m\, G(1,m-2)G(m+2,n) \\ & + s_m G(1,m-3)G(m+2,n) + s_{m+1}G(1,m-2)G(m+3,n). \end{aligned}$$

Cette relation est, pour les groupes provenant de deux séries de lettres, ce qu'était l'équation (10) pour les groupes plus simples, provenant de la seule série des lettres $r_1, r_2, \ldots r_n$. Il suffit d'y supposer nulles toutes les lettres s pour retrouver la formule (10). Dans cette équation r_m, s_m, s_{m+1} entrent au premier degré; elle fait voir que si ces lettres deviennent $r_m + \rho_m$, $s_m + \sigma_m$, $s_{m+1} + \sigma_{m+1}$, l'accroissement de $G(1,n)$ sera

$$\begin{aligned} \rho_m G(1,m-2)G(m+2,n) + \sigma_m\, & G(1,m-3)G(m+2,n) \\ & + \sigma_{m+1}G(1,m-2)G(m+3,n). \end{aligned}$$

Pour obtenir le dénombrement g_n des termes de $G(1,n)$, on posera dans ce groupe $r_1 = r_2 = \ldots\ldots = r_n = 1$, $s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 1$; car alors chaque terme de $G(1,n)$ se trouve remplacé par l'unité. Il en résulte que g_n satisfait à l'équation (20), où l'on remplacera r_n et s_n par l'unité, savoir,

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3},$$

les premières valeurs de $g_0, g_1, g_2 \ldots$ étant 1, 2, 4, 7, 13, etc. : par des considérations analogues à celles du n° [8], et que je développerai ailleurs, j'ai trouvé que g_n peut être exprimé, approximativement, quand n est un peu grand, par la formule

$$g_n = \frac{\alpha^{n+4}}{\alpha^2 + 2\alpha + 3},$$

α étant la racine positive de l'équation $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1$: elle donne $\alpha = 1,8392823$; et par suite on a, à fort peu près, en logarithmes tabulaires à 7 décimales

$$\log(g_n) = n.[0,2646460] + 0,0559218.$$

[13] L'analogie nous conduit encore à considérer les combinaisons discontiguës de trois séries de lettres

$$\begin{array}{l} r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5,\ldots r_n, \\ \quad s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ldots s_n, \\ \qquad t_3,\ t_4,\ t_5,\ldots t_n: \end{array}$$

on formera des groupes semblables à ceux dont nous avons déduit les relations, en posant

$$\begin{aligned} G(1,1) &= 1 + r_1, \\ G(1,2) &= G(1,1) + r_2 + s_2, \\ G(1,3) &= G(1,2) + r_3G(1,1) + s_3 + t_3, \\ G(1,4) &= G(1,3) + r_4G(1,2) + s_4G(1,1) + t_4, \\ G(1,5) &= G(1,4) + r_5G(1,3) + s_5G(1,2) + t_5G(1,1), \\ G(1,6) &= G(1,5) + r_6G(1,4) + s_6G(1,3) + t_6G(1,2), \end{aligned}$$

et, en général, pour toute valeur de $m <= n$,

$$(25)\quad G(1,m) = G(1,m-1) + r_mG(1,m-2) + s_mG(1,m-3) + t_mG(1,m-4).$$

On voit ici que r_m ne se peut associer qu'à des lettres inférieures de deux rangs, au moins, à r_m; que s_m n'admet dans ses combinaisons que des lettres inférieures de trois rangs, et que t_m n'admet que des lettres au moins inférieures de quatre rangs au sien, ou à m : nous nous bornons ici à rappeler rapidement ces détails sur la discontiguïté, parce qu'ils ont été amplement développés dans les art. [3] et [10]. Par l'épuisement des lettres des trois séries, on arrivera à une dernière

formule, qui suppose toutes les équations antérieures,

(26) $G(1,n)=G(1,n-1)+r_nG(1,n-2)+s_nG(1,n-3)+t_nG(1,n-4)$.

Si au lieu d'employer les trois séries complètes, vous ne vous servez que des séries partielles commençant à la lettre r_m, savoir :

$$r_m,\ r_{m+1},\ r_{m+2},\ r_{m+3},\ldots r_n,$$
$$s_{m+1},\ s_{m+2},\ s_{m+3},\ldots s_n,$$
$$t_{m+2},\ t_{m+3},\ldots t_n,$$

vous composerez, d'après la même loi de discontiguïté, des groupes que voici :

$$G(m,m)=1+r_m,$$
$$G(m,m+1)=G(m,m)+r_{m+1}+s_{m+1},$$
$$G(m,m+2)=G(m,m+1)+r_{m+2}G(m,m)+s_{m+2}+t_{m+2},$$
$$G(m,m+3)=G(m,m+2)+r_{m+3}G(m,m+1)+s_{m+3}G(m,m)+t_{m+3},$$

et en général

$$(27)\quad G(m,n)=G(m,n-1)+r_nG(m,n-2)+s_nG(m,n-3)+ + t_nG(m,n-4).$$

Pour l'usage de cette équation, il convient de fixer la signification des symboles $G(m,m-1)$, $G(m,m-2)$, $G(m,m-3)$, $G(m,m-4)$, $G(m,m-5)$, $G(m,m-6)$, etc. : posons, dans la formule (27), $n=m+2$; elle donnera

$$G(m,m+2)=G(m,m+1)+r_{m+2}G(m,m)+s_{m+2}G(m,m-1) + t_{m+2}G(m,m-2);$$

par l'équation de définition on a

$$G(m,m+2)=G(m,m+1)+r_{m+2}G(m,m)+s_{m+2}+t_{m+2}:$$

les deux formules devant être identiques, quels que soient s_{m+2}, t_{m+2}, il faut pour cela que

$$G(m,m-1)=1,\quad G(m,m-2)=1.$$

Si dans la même formule (27) on pose $n = m + 1$, en ayant égard aux valeurs que nous venons de trouver pour $G(m,m-1)$, $G(m,m-2)$, on aura

$$G(m,m+1) = G(m,m) + r_{m+1} + s_{m+1} + t_{m+1}G(m,m-3);$$

mais, par définition, $G(m,m+1) = G(m,m) + r_{m+1} + s_{m+1}$; donc le symbole $G(m,m-3) = 0$. Si dans la même formule vous posez $n = m$, en ayant égard aux trois valeurs précédentes des symboles $G(m,m-1) = 1$, etc., elle deviendra

$$G(m,m) = 1 + r_m + s_m . 0 + t_m G(m,m-4):$$

cette valeur devant se réduire à $1 + r_m$, il s'ensuit que $G(m,m-4) = 0$. En posant, encore, $n = m-1$, puis $n = m-2$, on trouvera $G(m,m-5) = 0$, et ensuite $t_{m-2}(m,m-6) = 1$. Ainsi pour ces symboles, qui n'étaient pas compris dans les définitions des groupes, on doit avoir

$$(28)\begin{cases} G(m,m-1) = 1, \ G(m,m-2) = 1, \ G(m,m-3) = 0, \\ G(m,m-4) = 0, \ G(m,m-5) = 0, \ t_{m-2}G(m,m-6) = 1; \end{cases}$$

afin que l'équation (27) puisse être étendue aux valeurs $m+2$, $m+1, \ldots m-2$ de n. Voyez les articles [4] et [11].

En posant $m = 1$, on aura

$$G(1,0) = 1, G(1,-1) = 1, G(1,-2) = 0, G(1,-3) = 0, G(1,-4) = 0.$$

[14] Le groupe $G(m,n)$ dépend des premières lettres r_m, s_{m+1}, t_{m+2}, et il importe de reconnaître sa composition sous ce rapport. Si l'on supposait nulles ces trois quantités, on n'aurait plus à combiner que les séries

$$\begin{array}{rrr} r_{m+1}, & r_{m+2}, & r_{m+3}, \ldots r_n, \\ & s_{m+2}, & s_{m+3}, \ldots s_n, \\ & & t_{m+3}, \ldots t_n, \end{array}$$

qui donneraient lieu au groupe $G(m+1,n)$: c'est une première partie de $G(m,n)$. Dans ce même groupe, la lettre r_m se trouvera associée à tous les termes de $G(m+2,n)$, car ce groupe partiel renferme l'unité jointe à toutes les combinaisons discontiguës des lettres

$$\begin{array}{llll} r_{m+2}, & r_{m+3}, & r_{m+4}, \ldots & r_n, \\ & s_{m+3}, & s_{m+4}, \ldots & s_n, \\ & & t_{m+4}, \ldots & t_n; \end{array}$$

et la lettre r_m doit être adjointe à chacune de ces combinaisons dans $G(m,n)$; l'ensemble des termes affectés de r_m est donc $r_m G(m+2,n)$. On reconnaît de la même manière, pour les lettres s_{m+1}, t_{m+2}, que les parties de $G(m,n)$ qui les renferment sont

$$s_{m+1}G(m+3,n), \quad t_{m+2}G(m+4,n):$$

on s'assure aisément d'ailleurs qu'il ne peut y avoir double emploi dans ces quatre classes de termes qui constituent $G(m,n)$; on aura donc, en les réunissant,

$$(29) \qquad \begin{aligned} G(m,n) = {} & G(m+1,n) + r_m\, G(m+2,n) \\ & + s_{m+1}G(m+3,n) + t_{m+2}G(m+4,n). \end{aligned}$$

Pour le groupe complet $G(1,n)$, on posera $m=1$ dans cette équation; elle donne

$$G(1,n) = G(2,n) + r_1G(3,n) + s_2G(4,n) + t_3G(5,n).$$

Ces formules sont analogues à celles des art. [5] et [12] : ces dernières y sont comprises comme cas particuliers.

Le groupe partiel $G(m+1,n)$ est composé avec les séries

$$\begin{array}{llll} r_{m+1}, & r_{m+2}, & r_{m+3}, \ldots & r_n, \\ & s_{m+2}, & s_{m+3}, \ldots & s_n, \\ & & t_{m+3}, \ldots & t_n, \end{array}$$

et les lettres r_m, s_m, s_{m+1}, t_m, t_{m+1}, t_{m+2} lui sont étrangères; elles le sont aussi au groupe $G(1,m-1)$. On voit aisément ici, comme dans le lemme de l'art. [12], que le produit

$$G(1,m-1)\times G(m+1,n)$$

de ces deux groupes fournira toutes les combinaisons discontiguës du groupe complet $G(1,n)$ étrangères aux six lettres mises à part; en sorte que si l'on supposait nulles, dans $G(1,n)$, les lettres dont il s'agit, ce groupe se réduirait au produit

$$G(1,m-1)\times G(m+1,n):$$

ce sera donc une première partie de $G(1,n)$. Si vous multipliez les deux groupes $G(1,m-2)$ et $G(m+2,n)$, vous aurez aussi des combinaisons discontiguës, et ce produit multiplié par r_m donnera

$$G(1,m-2)r_m G(m+2,n)$$

qui offrira la somme de toutes les combinaisons où r_m entre comme facteur, parce que $m-2$ est le plus haut indice des lettres de $G(1,m-2)$, et $m+2$ est le plus petit indice des lettres de $G(m+2,n)$. s_m affecte aussi un système de combinaisons dans $G(1,n)$, et leur somme est

$$G(1,m-3)s_m G(m+2,n);$$

les combinaisons qui ont s_{m+1} pour facteur sont

$$G(1,m-2)s_{m+1}G(m+3,n);$$

celles qui ont t_m, t_{m+1}, t_{m+2} pour facteurs forment respectivement les sommes

$$G(1,m-4)\,t_m\,G(m+2,n),$$
$$G(1,m-3)t_{m+1}G(m+3,n),$$
$$G(1,m-2)t_{m+2}G(m+4,n);$$

réunissons les sept classes de termes que nous venons de reconnaître dans la constitution du groupe $G(1,n)$, et il viendra

$$\begin{aligned} G(1,n) = \quad & G(1,m-1)G(m+1,n) \\ & + r_m\, G(1,m-2)G(m+2,n) \\ & + s_m\, G(1,m-3)G(m+2,n) \\ & + s_{m+1}G(1,m-2)G(m+3,n) \\ & + t_m\, G(1,m-4)G(m+2,n) \\ & + t_{m+1}G(1,m-3)G(m+3,n) \\ & + t_{m+2}G(1,m-2)G(m+4,n): \qquad (30) \end{aligned}$$

formule semblable à celles qui portent les numéros (10) et (24), et dont on pourra tirer des conséquences analogues.

L'évaluation du nombre g_n des termes distincts du groupe $G(1,n)$ dépend d'une série récurrente répondant à l'équation

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3} + g_{n-4},$$

les premières valeurs de g_0, g_1, g_2, g_3, etc., étant les nombres 1, 2, 4, 8, 15, 29...; j'ai trouvé que le terme général de cette série est représenté, à très-peu près, par

$$g_n = (10)^{n[0,2850013]+0,038064},$$

en sorte que le logarithme tabulaire de g_n est

$$n[0,2850013\ldots] + 0,038064\ldots$$

Les mêmes considérations sont applicables à des groupes de combinaisons discontiguës provenant d'un plus grand nombre de séries de lettres, telles que celles que nous avons employées dans les art. [3], [10], [13]. Il serait superflu d'entrer dans le développement de formules dont le type est suffisamment caractérisé dans les trois premiers ordres de combinaisons discontiguës, dont nous venons de nous occuper : nous allons passer à l'usage de ces relations pour intégrer les équations linéaires aux différences finies.

87.

SECONDE PARTIE.

De l'intégration des équations linéaires aux différences finies.

Avant de traiter les équations du second ordre et des ordres plus élevés, objet spécial de ces recherches, il est utile de rappeler ce qui concerne l'équation du premier ordre, afin de mieux faire sentir le lien analogique des méthodes et des résultats.

[15] Nous prendrons l'équation linéaire à différences finies du premier ordre sous la forme

$$Y_{n+1} = 6_n Y_n + \Lambda_n, \tag{31}$$

dans laquelle Y_n est la fonction inconnue de la variable n, qui est un nombre entier; 6_n et Λ_n sont deux fonctions connues de cette variable : après avoir remplacé n par les valeurs $n-1$, $n-2$, ... 3, 2, 1, 0, on forme n équations semblables à la précédente, et qui sont

$$\begin{aligned} Y_n &= 6_{n-1} Y_{n-1} + \Lambda_{n-1}, \\ Y_{n-1} &= 6_{n-2} Y_{n-2} + \Lambda_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Y_1 &= 6_0 \; Y_0 \; + \Lambda_0, \end{aligned}$$

et l'objet de la recherche est d'exprimer Y_{n+1} au moyen de Y_0 et des 6_0, 6_1, 6_2, ... 6_n, Λ_0, Λ_1, ... Λ_n qui sont censées des grandeurs connues : cela revient à éliminer les n quantités Y_n, Y_{n-1}, Y_{n-2}, ... Y_2, Y_1 entre ces $n+1$ équations. L'élimi-

nation est facile dans le cas actuel : il suffit en effet de multiplier par $\mathsf{6}_n$ la seconde formule en Y_n; par $\mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}$ la troisième en Y_{n-1}; par $\mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}\mathsf{6}_{n-2}$ la quatrième; et ainsi des autres jusqu'à la dernière en Y_1 qui sera multipliée par $\mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}\mathsf{6}_{n-2}\ldots\mathsf{6}_2\mathsf{6}_1$: on ajoutera ensuite les n produits à la première équation en Y_{n+1}, et l'on aura

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = {} & \mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}\mathsf{6}_{n-2}\ldots\mathsf{6}_2\mathsf{6}_1\mathsf{6}_0 Y_0 \\ & + \mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}\mathsf{6}_{n-2}\ldots\mathsf{6}_2\mathsf{6}_1 \Lambda_0 \\ & + \mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}\mathsf{6}_{n-2}\ldots\mathsf{6}_2 \Lambda_1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mathsf{6}_n\mathsf{6}_{n-1}\Lambda_{n-2} + \mathsf{6}_n\Lambda_{n-1} + \Lambda_n; \end{aligned}$$

formule où l'on écrira $n-1$ à la place de n pour obtenir Y_n, ce qui donnera

$$(32) \quad \begin{cases} Y_n = Y_0\Pi_n(\mathsf{6}_n) + \Lambda_0\Pi_{n-1}(\mathsf{6}_n) + \Lambda_1\Pi_{n-2}(\mathsf{6}_n) + \text{etc.} \\ \qquad \ldots + \Lambda_{n-2}\Pi_1(\mathsf{6}_n) + \Lambda_{n-1}: \end{cases}$$

pour abréger, on représente ici un produit tel que $\mathsf{6}_{m-1}\mathsf{6}_{m-2}\mathsf{6}_{m-3}\ldots\mathsf{6}_{m-i}$ par $\Pi_i(\mathsf{6}_m)$. Il résulte de cette notation, quand i et k sont des entiers positifs,

$$(33) \qquad \Pi_{i+k}(\mathsf{6}_m) = \Pi_i(\mathsf{6}_m)\Pi_k(\mathsf{6}_{m-i}) = \Pi_k(\mathsf{6}_m)\Pi_i(\mathsf{6}_{m-k});$$

on a, en effet,

$$\begin{aligned} \Pi_{i+k}(\mathsf{6}_m) &= \mathsf{6}_{m-1}\mathsf{6}_{m-2}\ldots\ldots\ldots\mathsf{6}_{m-i} \times \mathsf{6}_{m-i-1}\mathsf{6}_{m-i-2}\ldots\mathsf{6}_{m-i-k} = \\ &= \mathsf{6}_{m-1}\mathsf{6}_{m-2}\ldots\mathsf{6}_{m-k} \times \mathsf{6}_{m-k-1}\mathsf{6}_{m-k-2}\ldots\ldots\mathsf{6}_{m-k-i}. \end{aligned}$$

Il convient de remarquer dans la formule (33)

$$\Pi_{i+k}(\mathsf{6}_m) = \Pi_i(\mathsf{6}_m)\Pi_k(\mathsf{6}_{m-i})$$

que si vous posez $i = 0$, elle devient

$$\Pi_k(\mathsf{6}_m) = \Pi_0(\mathsf{6}_m).\Pi_k(\mathsf{6}_m)$$

ou bien, après avoir divisé par $\Pi_k(\mathcal{E}_m)$, $\Pi_0(\mathcal{E}_m) = 1$: ce symbole $\Pi_0(\mathcal{E}_m)$ qui n'était pas expressément renfermé dans la définition de $\Pi_i(\mathcal{E}_m)$, doit donc recevoir l'unité pour valeur, afin que la formule

$$\Pi_{i+k}(\mathcal{E}_m) = \Pi_i(\mathcal{E}_m)\Pi_k(\mathcal{E}_{m-i}) = \Pi_k(\mathcal{E}_m)\Pi_i(\mathcal{E}_{m-k})$$

puisse s'étendre aux valeurs $i = 0$ et $k = 0$. On pourrait aussi l'étendre à des valeurs négatives de i et de k; mais ce serait presque étranger au sujet que nous avons principalement en vue.

Tel est le procédé par lequel Laplace a formé l'intégrale trouvée en premier lieu par Lagrange, à l'aide d'une autre méthode. Nous devons encore rapporter une marche différente suivie par Laplace. Nous poserons donc

$$Y_n = y_n \mathcal{E}_{n-1}\mathcal{E}_{n-2}\mathcal{E}_{n-3}\ldots\mathcal{E}_1.\mathcal{E}_0 = y_n.\Pi_n(\mathcal{E}_n);$$

d'où résultera, pour les premières valeurs de n,

$$Y_1 = y_1\Pi_1(\mathcal{E}_1) = y_1\mathcal{E}_0, \quad Y_0 = y_0\Pi_0(\mathcal{E}_0) = y_0.$$

Substituant cette expression dans l'équation, elle deviendra

$$y_{n+1}\Pi_{n+1}(\mathcal{E}_{n+1}) = y_n\mathcal{E}_n\Pi_n(\mathcal{E}_n) + \mathrm{A}_n;$$

divisez par $\Pi_{n+1}(\mathcal{E}_{n+1}) = \mathcal{E}_n\Pi_n(\mathcal{E}_n)$, et représentez $\frac{\mathrm{A}_n}{\Pi(\mathcal{E}_{n+1})}$ par λ_n; l'équation simplifiée sera

$$y_{n+1} = y_n + \lambda_n.$$

On y remplacera encore n par $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc.; l'on aura ainsi

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \lambda_{n-1}, \\ y_{n-1} &= y_{n-2} + \lambda_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_2 &= y_1 + \lambda_1, \\ y_1 &= y_0 + \lambda_0; \end{aligned}$$

ajoutant ces $n+1$ formules, et omettant les termes qui se détruisent dans les deux membres, on aura

$$y_{n+1}=y_0+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\text{etc.}+\lambda_{n-1}+\lambda_n.$$

Multipliez présentement par $\Pi_{n+1}(\beta_{n+1})$, et remplacez les λ_0, $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ par leurs valeurs en A_0, A_1, etc., A_n, et vous retrouverez l'expression Y_n de Lagrange. En rapportant ce procédé, nous voulons surtout y faire remarquer la transformation $Y_n=y_n\Pi_n(\beta_n)$ qui a ramené l'équation proposée à une autre $y_{n+1}=y_n+\lambda_n$, dans laquelle l'ancien coefficient β_n est remplacé par l'unité. Laplace n'a employé cette transformation que pour le premier ordre, mais elle est applicable à une équation linéaire d'un ordre quelconque, et elle sera, en partie, le principe des méthodes que nous voulons exposer.

Nous remarquerons sur l'intégrale Y_n et sur les formules qui y conduisent, que les β_0, β_1, $\beta_2,\ldots\beta_n$, les A_0, $A_1,\ldots A_n$ sont des quantités que l'on peut regarder comme indépendantes les unes des autres : il n'est pas du tout nécessaire que les β_i résultent d'une même fonction $f(n)=\beta_n$, où n aurait été remplacé par 0, 1, 2,... Les combinaisons purement algébriques qui conduisent au résultat sont totalement étrangères à cette hypothèse, et le véritable caractère de la formule (32) est celui d'une équation finale provenant de l'élimination des inconnues Y_{n-1}, $Y_{n-2},\ldots Y_2$, Y_1, ainsi que nous l'avons déjà énoncé au commencement de cet écrit.

La marche qui vient d'être suivie suppose que n est un entier positif, et que la grandeur Y_0, qui reste arbitraire dans l'intégrale, soit le premier terme de la série Y_0, Y_1, $Y_2,\ldots Y_n$. Ce premier terme, au reste, pourrait répondre à des valeurs

négatives de l'indice n, telles que -1, -2, etc.; car on pourrait employer les équations

$$Y_0 = \beta_{-1} Y_{-1} + \Lambda_{-1}, \quad Y_{-1} = \beta_{-1} Y_{-2} + \Lambda_{-2}.$$

On peut considérer sous un autre rapport l'intégrale. Reprenons l'équation (31); en y écrivant $n-1$ à la place de n, puis $n-2, n-3, \ldots$ jusqu'à $n=m$, on aura $n-m+1$ formules

$$\begin{aligned}
Y_n &= \beta_{n-1} Y_{n-1} + \Lambda_{n-1},\\
Y_{n-1} &= \beta_{n-2} Y_{n-2} + \Lambda_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_{m+1} &= \beta_m \; Y_m + \Lambda_m.
\end{aligned}$$

En multipliant la seconde par β_{n-1}, la troisième par

$$\beta_{n-1}\beta_{n-2} = \Pi_2(\beta_n),$$

la quatrième par

$$\beta_{n-1}\beta_{n-2}\beta_{n-3} = \Pi_3(\beta_n),$$

et la dernière par

$$\beta_{n-1}\beta_{n-2}\ldots\beta_{m+1} = \Pi_{n-m-1}(\beta_n);$$

on aura par l'addition des équations

$$\begin{aligned}
Y_n = Y_m\beta_m\Pi_{n-m-1}(\beta_n) + \Lambda_m \; \Pi_{n-m-1}(\beta_n) + \Lambda_{m+1}\Pi_{n-m-2}(\beta_n) + \text{etc.}\\
\ldots + \Lambda_{n-2}\Pi_1(\beta_n) \quad + \Lambda_{n-1}. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Cette formule est semblable à celle qui donnait Y_n, et elle n'en diffère que par la quantité Y_m qui remplace maintenant la grandeur arbitraire Y_0, ainsi que par le nombre des facteurs qui entrent dans les $\Pi_i(\beta_n)$. On formera un résultat équivalent en divisant la dernière équation par β_m; en divisant la

deuxième, en remontant, par $\epsilon_{m+1}\epsilon_m = \Pi_2(\epsilon_{m+2})$; la troisième en remontant par $\epsilon_{m+2}\epsilon_{m+1}\epsilon_m = \Pi_3(\epsilon_{m+3})$; la quatrième par $\epsilon_{m+3}\epsilon_{m+2}\epsilon_{m+1}\epsilon_m = \Pi_4(\epsilon_{m+4})$, et ainsi des autres, jusqu'à la première en Y_n qui sera divisée par $\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}\ldots\epsilon_{m+1}\epsilon_m = \Pi_{n-m}(\epsilon_n)$; on ajoutera encore toutes les formules, et l'on prendra la valeur de Y_m dans l'équation; il vient ainsi

$$(35)\quad Y_m = \frac{Y_n}{\Pi_{n-m}(\epsilon_n)} - \frac{A_{n-1}}{\Pi_{n-m}(\epsilon_n)} - \frac{A_{n-2}}{\Pi_{n-m-1}(\epsilon_{n-1})} - \frac{A_{n-3}}{\Pi_{n-m-2}(\epsilon_{n-2})} - \text{etc.} \ldots - \frac{A_{m+1}}{\Pi_2(\epsilon_{m+2})} - \frac{A_m}{\Pi_1(\epsilon_{m+1})}.$$

Changeons dans cette formule la lettre m en n', et remplaçons n par m; elle deviendra

$$(36)\quad Y_{n'} = \frac{Y_m}{\Pi_{m-n'}(\epsilon_m)} - \frac{A_{m-1}}{\Pi_{m-n'}(\epsilon_m)} - \frac{A_{m-2}}{\Pi_{m-n'-1}(\epsilon_{m-1})} - \frac{A_{m-3}}{\Pi_{m-n'-2}(\epsilon_{m-2})} - \text{etc.} \ldots - \frac{A_{n'+1}}{\Pi_2(\epsilon_{n'+2})} - \frac{A_{n'}}{\Pi_1(\epsilon_{n'+1})}.$$

Ce sera pour l'équation du premier ordre

$$Y_{n'+1} = \epsilon_{n'} Y_{n'} + A_{n'},$$

l'intégrale répondant à toute valeur de la variable $n' < m$; et Y_m sera la quantité arbitraire, ou le terme le plus avancé de la série

$$Y_{n'},\ Y_{n'+1},\ Y_{n'+2},\ldots,\ Y_m.$$

L'intégrale (34)

$$Y_n = Y_m \Pi_{n-m}(\epsilon_n) + A_m\ \Pi_{n-m-1}(\epsilon_n) + A_{m+1}\Pi_{n-m-2}(\epsilon_n) + \text{etc.} \ldots + A_{n-3}\Pi_2(\epsilon_n) + A_{n-2}\Pi_1(\epsilon_n) + A_{n-1}$$

qui satisfait à l'équation

$$Y_{n+1} = \epsilon_n Y_n + A_n,$$

répond au cas que l'on considère ordinairement, et où m

est supposé moindre que la variable n, en sorte que l'arbitraire Y_m est le premier terme de la série

$$Y_m,\ Y_{m+1},\ Y_{m+2},\ldots Y_n.$$

Les deux expressions de Y_n et de $Y_{n'}$ dans lesquelles $n>m>n'$ sont fort différentes, quoiqu'elles offrent certaines similitudes. Ces analogies deviendraient plus manifestes, si l'on introduisait dans les formules l'usage des factorielles $\Pi_{-k}(\beta_n)$ à indices entiers négatifs $-k$; ce qui est facile en partant de l'équation (33), savoir :

$$\Pi_n(\beta_m)=\Pi_{n-i}(\beta_m)\times\Pi_i(\beta_{m-n+i})=\Pi_i(\beta_m)\Pi_{n-i}(\beta_{m-i}).$$

Il est probable que l'usage de ces sortes de fonctions s'introduira dans l'analyse; mais nous n'avons pas l'intention de nous en occuper particulièrement ici.

Au reste, on peut toujours ramener le second cas de $m>n'$ au premier, en posant $n=m-n'$, et $Y_n=Y'_{n'}$: à des valeurs croissantes de n', depuis $n'=0$ jusqu'à $n'=m$, répondent des états décroissants de n depuis m jusqu'à zéro. On peut également poser $n=p-n'$, p étant un entier, si l'on veut que n' le soit, puisque nous avons supposé n entier : il s'agit seulement d'un déplacement de l'origine de la variable n. Mais quelquefois l'équation demande à être directement traitée, en évitant une substitution qui la compliquerait.

[16] L'équation linéaire du second ordre à différences finies, est de la forme

$$Y_{n+2}=\beta_n Y_{n+1}+\gamma_n Y_n+A_n : \tag{37}$$

on y désigne encore par Y_n une fonction inconnue de n, et par Y_{n+1}, Y_{n+2} les valeurs de la même fonction répondant à

$n+1$ et $n+2$ mis à la place de n; β_n, γ_n, Λ_n sont des fonctions données en n. L'équation doit être satisfaite par une expression Y_n de la variable n et de quantités déterminées qui dépendront de la même lettre n.

On simplifiera cette équation, comme dans l'article [14], en substituant à Y_n une autre variable : nous poserons pour cela $Y_n = y_n \Pi_{n-1}(\beta_{n-1})$ où nous représentons encore le produit $\beta_0\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}$ par $\Pi_{n-1}(\beta_{n-1})$; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-2}$ étant les différentes valeurs de β_n répondant à $0, 1, 2, \ldots n-2$ mis à la place de n ; et y_n étant la nouvelle variable fonction de n : la substitution dans l'équation donne

$$y_{n+2}\Pi_{n+1}(\beta_{n+1}) = y_{n+1}\beta_n\Pi_n(\beta_n) + y_n\gamma_n \cdot \Pi_{n-1}(\beta_{n-1}) + \Lambda_n.$$

Après avoir divisé par le produit $\Pi_{n+1}(\beta_{n+1})$, on aura pour déterminer y_n l'équation

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n} \cdot y_n + \frac{\Lambda_n}{\Pi_{n+1}(\beta_{n+1})},$$

que nous écrirons ainsi

(38) $$y_{n+2} = y_{n+1} + r_n y_n + \lambda_n,$$

en posant

$$r_n = \frac{\gamma_n}{\beta_{n-1}\beta_n}, \quad \lambda_n = \frac{\Lambda_n}{\Pi_{n+1}(\beta_{n+1})}.$$

Ces valeurs conviennent à toute grandeur entière positive de n, depuis $n=1$: mais les équations (37) (38) quand $n=0$, sont

$$Y_2 = \beta_0 Y_1 + \gamma_0 Y_0 + \Lambda_0,$$
$$y_2 = \quad y_1 + r_0 y_0 + \lambda_0,$$

on a $Y_2 = y_2 \cdot \beta_0$, et la première équation divisée par β_0 donne

$$y_2 = Y_1 + Y_0 \cdot \frac{\gamma_0}{\beta_0} + \frac{\Lambda_0}{\beta_0}:$$

cette valeur sera identique avec la seconde si l'on prend

$$Y_1 = y_1, \quad Y_0 = y_0, \quad r_0 = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0}, \quad \lambda_0 = \frac{\Lambda_0}{\epsilon_0}:$$

ce sont les valeurs à employer comme premiers termes des séries des lettres y_n, r_n, λ_n répondant à $n=0$.

La transformation $Y_n = y_n \Pi_{n-1}(\epsilon_{n-1})$ suppose essentiellement que le coefficient ϵ_n de l'équation n'est pas nul. Si l'équation était privée du terme en Y_{n+1} et ramenée à trois termes, son intégration offrirait peu de difficulté, ainsi qu'on pourra le voir ci-après.

On sait qu'une équation linéaire de la forme (38), peut être ramenée à une équation analogue, mais privée de son dernier terme; en sorte que dès que l'on aura intégré l'équation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n, \tag{39}$$

l'on obtiendra, par diverses méthodes, l'intégrale de l'équation complète

$$y_{n+2} = y_{n+1} + r_n y_n + \lambda_n.$$

Nous allons donc traiter, en premier lieu, l'équation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n:$$

l on y pose successivement $n=0, 1, 2, 3\ldots$ et l'on a cette série de formules

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = u_1 + r_0 u_0, \\ u_3 = u_2 + r_1 u_1, \\ u_4 = u_3 + r_2 u_2, \\ u_5 = u_4 + r_3 u_3, \\ u_6 = u_5 + r_4 u_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n: \end{array}\right\} \tag{40}$$

par ces égalités nous déduirons quelques-unes des premières valeurs u_3, u_4, u_5, u_6... exprimées en u_1 et u_0. On a par la deuxième, où l'on remplace u_2,

$$u_3 = u_1(1 + r_1) + r_0 u_0;$$

la valeur de $u_4 = u_3 + r_2 u_2$ devient, après la substitution,

$$u_4 = u_1(1 + r_1 + r_2) + r_0 u_0(1 + r_2);$$

on a encore $u_5 = u_4 + r_3 u_3$, et par la substitution

$$u_5 = u_1(1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_1 r_3) + r_0 u_0(1 + r_2 + r_3);$$

avec $u_5 + r_4 u_4$ on compose u_6, savoir

$$\begin{aligned} u_6 = \; & u_1(1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_4) \\ & + r_0 u_0(1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_2 r_4); \end{aligned}$$

on aura de la même manière

$$\begin{aligned} u_7 = \; & u_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_1 r_5 \\ \qquad + r_2 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_5 + r_1 r_3 r_5 \end{array} \right\} \\ & + r_0 u_0 \{ 1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_2 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_5 \}. \end{aligned}$$

Les valeurs suivantes u_8, u_9, etc., présenteront un mode de composition que l'on peut déjà saisir sur celles qui viennent d'être écrites; expliquons en quoi il consiste : chaque valeur se compose de deux classes de termes affectés soit de u_1, soit de $r_0 u_0$; dans u_7, par exemple, la partie affectée de u_1 est l'unité plus la somme des lettres r_1, r_2, r_3, r_4, r_5; à cette somme se trouvent jointes toutes les combinaisons binaires discontiguës formées avec ces cinq lettres, savoir : $r_1 r_3$, $r_1 r_4$, $r_1 r_5$, $r_2 r_4$, $r_2 r_5$, $r_3 r_5$; et, enfin, la seule combinaison discontiguë ternaire $r_1 r_3 r_5$ que comportent les cinq mêmes lettres, art. [3]. Le coefficient de $r_0 u_0$ dans u_7, résulte de

celui de u_1 où l'on poserait simplement $r_1 = 0$: c'est, par conséquent, la somme de toutes les combinaisons discontiguës que comportent les quatre éléments r_2, r_3, r_4, r_5, cette somme étant ajoutée à l'unité. En rapprochant cette composition de la quantité que nous avons nommée

$$G(1,n) = 1 + H_1(1,n) + H_2(1,n) + H_3(1,n) + \text{etc.}$$

on voit que le coefficient de u_1 dans u_7 est le groupe $G(1,5)$, et que le coefficient de $r_0 u_0$ est $G(2,5)$; on aura donc, par cette notation algébrique assez simple,

$$u_7 = u_1 G(1,5) + r_0 u_0 G(2,5);$$

et l'on reconnaît pareillement, pour u_6, que

$$u_6 = u_1 G(1,4) + r_0 u_0 G(2,4).$$

Le meme mode de composition convient évidemment aussi à u_5, u_4, u_3, et l'on va reconnaître que cette constitution s'étend à un rang quelconque, pour les fonctions u_n données par les équations (40). Admettez, en effet, que l'on ait établi ces deux formules consécutives

$$u_n = u_1 G(1,n-2) + r_0 u_0 G(2,n-2),$$
$$u_{n+1} = u_1 G(1,n-1) + r_0 u_0 G(2,n-1);$$

où les $G(1,n-2)$, $G(2,n-2)$,... sont des groupes définis ci-dessus [3]; en substituant ces u_n, u_{n+1} dans l'équation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n,$$

il vient

$$u_{n+2} = u_1 G(1,n-1) + r_0 u_0 G(2,n-1) + r_n[u_1 G(1,n-2) + r_0 u_0 G(2,n-2)]$$

ou bien, en réunissant les termes affectés de u_1 et de u_0

$$\begin{aligned} u_{n+2} = {} & u_1[G(1,n-1) + r_n G(1,n-2)] \\ & + r_0 u_0[G(2,n-1) + r_n G(2,n-2)]. \end{aligned}$$

Mais on a par les propriétés des groupes de produits discontigus, art. [3], formule (4)

$$\begin{aligned} G(1,n-1) + r_n G(1,n-2) = G(1,n), \\ G(2,n-1) + r_n G(2,n-2) = G(2,n); \end{aligned}$$

la valeur de u_{n+2} devient donc

$$u_{n+2} = u_1 G(1,n) + r_0 u_0 G(2,n),$$

c'est-à-dire qu'elle suivrait la loi de formation admise pour u_{n+1} et pour u_n. Cette loi ayant été constatée pour les valeurs consécutives u_6, u_7, il s'ensuit qu'elle s'étend à u_8, puis à u_9, et successivement à u_{n+2}. Ainsi la valeur u_{n+2} est exprimée généralement par la formule

$$u_{n+2} = u_1 G(1,n) + u_0 r_0 G(2,n):$$

en remplaçant n par $n-2$, on a

(41) $$u_n = u_1 G(1,n-2) + u_0 r_0 G(2,n-2);$$

ou bien

$$u_n = u_1 G(r_1, r_{n-2}) + u_0 r_0 G(r_2, r_{n-2}).$$

[17] Nous pouvions parvenir plus rapidement à cette intégrale de l'équation (39)

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n,$$

en partant de la propriété de la fonction $G(1,n)$, exprimée par la formule (4)

$$G(1,n) = G(1,n-1) + r_n G(1,n-2):$$

il est évident que si, dans l'équation linéaire (39), vous posez $u_n = AG(1,n-2)$, A étant indépendant de n, vous aurez

$$AG(1,n) = AG(1,n-1) + Ar_nG(1,n-2),$$

équation identique, en vertu de la propriété du groupe $G(1,n)$. L'équation est encore satisfaite quand vous posez

$$u_n = BG(2,n-2),$$

car la substitution donne

$$BG(2,n) = BG(2,n-1) + Br_nG(2,n-2);$$

après avoir divisé par B, on aura l'équation identique (6) de l'art. [3]

$$G(2,n) = G(2,n-1) + r_nG(2,n-2):$$

ces deux solutions distinctes de l'équation linéaire fourniront son intégrale complète, où A et B sont les deux constantes arbitraires

$$u_n = AG(1,n-2) + BG(2,n-2).$$

On déterminera ces constantes par les premières valeurs de u_n qui donnent

$$u_2 = u_1 + r_0u_0.$$
$$u_3 = u_2 + r_1u_1 = u_1(1+r_1) + r_0u_0.$$

En posant successivement $n=2$, $n=3$, dans l'intégrale $u_n = AG(1,n-2) + BG(2,n-2)$, on aura

$$u_2 = AG(1,0) + BG(2,0),$$
$$u_3 = AG(1,1) + BG(2,1);$$

mais il a été établi, art. [4], que

$$G(1,0) = G(2,0) = 1 = G(2,1)$$
$$G(1,1) = 1 + r_1;$$

et les équations se réduisent à

$$A + B = u_2 = u_1 + r_0 u_0,$$
$$(1 + r_1)A + B = u_3 = u_1(1 + r_1) + r_0 u_0;$$

ce qui donne

$$A = 1, \quad B = r_0 u_0.$$

On a donc, pour u_n, cette valeur déjà formée (41)

$$u_n = u_1 G(1, n-2) + u_0 r_0 G(2, n-2),$$

dont le caractère est de satisfaire à l'équation aux différences finies proposée, ainsi qu'aux deux formules initiales

$$u_2 = u_1 + r_0 u_0,$$
$$u_3 = u_2 + r_1 u_1,$$

où u_0 et u_1, sont complétement arbitraires. Dans cette formule (41), nous dénotons en ce moment par $G(1, n-2)$, $G(2, n-2)$ des groupes de combinaisons discontiguës, formés selon les règles du paragraphe [3] : ainsi pour le premier de ces groupes, composé des lettres $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-2}$, on a

$$G(1, n-2) = 1 + H_1(1, n-2) + H_2(1, n-2) + \ldots + H_i(1, n-2),$$

et ici les $H_1, H_2, H_3, \ldots$ sont des sommes homogènes de produits discontigus, savoir

$$H_1(1, n-2) = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots\ldots + r_{n-2},$$
$$\begin{aligned} H_2(1, n-2) = r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_1 r_5 + \ldots + r_1 r_{n-2} \\ + r_2 r_4 + r_2 r_5 + \ldots + r_2 r_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + r_{n-4} r_{n-2}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} H_3(1, n-2) = r_1 r_3 r_5 + r_1 r_3 r_6 + \ldots\ldots + r_1 r_3 r_{n-2} \\ + r_1 r_4 r_6 + \ldots\ldots + r_1 r_4 r_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{etc.} \qquad + r_{n-6} r_{n-4} r_{n-2}, \end{aligned}$$

La première de ces sommes se compose de $n-2$ termes. La seconde $H_2(1,n-2)$ renferme $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ termes distincts. La troisième $H_3(1,n-2)$ renferme $\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}$, termes distincts, et ainsi de suite selon la règle établie, art. [8], pour toutes les autres classes H_4, H_5, etc. Nous avons montré en outre (19) que le nombre des termes dont le groupe $G(1,n-2)$ se trouve composé, est

$$g_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

La seconde partie de l'intégrale $u_0 r_0 G(2,n-2)$ résulterait de la première en y posant $r_1 = 0$, et en remplaçant u_1 par $u_0 r_0$. Le groupe $G(2,n-2)$ ne renferme que les combinaisons discontiguës des lettres r_2, r_3, ... r_{n-2} : ces lettres étant en nombre $n-3$, le dénombrement de leurs combinaisons discontiguës sera

$$g_{n-3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Ajoutant ces deux nombres g_{n-2}, g_{n-3}, on aura le nombre des termes de la valeur complète de u_n : mais en formant la somme $g_{n-2}+g_{n-3}$ on aura g_{n-1}, d'après l'équation (16); il viendra donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

pour le nombre des termes de l'expression de u_n : on pourra calculer ce nombre par l'entier le plus voisin du premier terme $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, ainsi que nous l'avons fait précédemment, art. [19].

[18] Nous venons de remarquer que l'intégrale de l'équation à différences finies

$$u_n = u_1 G(1, n-2) + u_0 r_0 G(2, n-2)$$

renferme les deux quantités u_1 et $u_0 r_0$ qui demeurent arbitraires, et qui tiennent lieu des deux constantes que comporte l'intégrale de l'équation du second ordre ; elle contient de plus les $n-2$ quantités censées connues $r_1, r_2, \ldots r_{n-2}$. Ces dernières lettres peuvent y recevoir des valeurs indépendantes et à volonté, ainsi que nous en avons déjà fait la remarque à la fin de l'art. [14] : rien n'exige que ces valeurs résultent d'une fonction analytique donnée r_n, où l'on remplacerait n par les nombres 1, 2, 3,... : cette formule n'est, en effet, que l'équation finale de l'élimination des $n-2$ lettres $u_2, u_3, \ldots u_{n-1}$ entre les $n-1$ équations linéaires (40)

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + r_0 u_0, \\
u_3 &= u_2 + r_1 u_1, \\
u_4 &= u_3 + r_2 u_2, \\
u_5 &= u_4 + r_3 u_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_n &= u_{n-1} + r_{n-2} u_{n-2}.
\end{aligned} \qquad (40')$$

Le résultat de cette opération, qui se présente d'abord sous un aspect fort compliqué, est exprimé par

$$u_n = u_1 G(1, n-2) + r_0 u_0 G(2, n-2),$$

où $G(1, n-2)$, $G(2, n-2)$, sont des groupes d'une composition facile, art. [3]. Quand on fait abstraction de la première égalité $u_2 = u_1 + r_0 u_0$, et que l'on ne combine que les $n-2$ autres, le résultat de l'élimination des $u_3, u_4, \ldots u_{n-1}$

est la formule

$$u_n = u_2 G(2,n-2) + r_1 u_1 G(3,n-2).$$

Cette équation est évidemment donnée par la formule (41) où l'on marquerait chaque lettre d'un accent de plus, en sorte que r_0 y soit changé en r_1; r_1 en r_2, etc.; u_0 en u_1; u_1 en u_2; il faudrait après cela remplacer n par $n-1$.

Si l'on ne commence à combiner les formules (40′) qu'à partir de la $m^{\text{ième}}$ équation $u_{m+1} = u_m + r_{m-1} u_{m-1}$, on aura pour la valeur de u_n

(42) $$u_n = u_m G(m,n-2) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,n-2):$$

c'est encore l'intégrale de l'équation linéaire du second ordre $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n r_n$.

La formation de cette équation (42) a exigé que $n > m$: néanmoins elle peut être étendue à $n = m$. Le second membre devient alors $u_m G(m,m-2) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,m-2)$; or, il a été établi, [art. 4], que $G(m,m-2) = 1$; on a aussi $G(m,m-3) = 0$, d'où $G(m+1,m-2) = 0$; on voit donc que la valeur du second membre se réduit à u_m pour $n = m$.

Quand on y pose $n = m - 1$, on a

$$u_m G(m,m-3) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,m-3);$$

mais le premier terme est nul et il ne reste ici que

$$u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,m-3).$$

Le symbole $G(m+1,m-3)$ n'ayant pas encore reçu de détermination, il faut, comme dans l'art. [4], recourir à l'équation (6), où l'on mettra $m+1$ à la place de m, et où l'on posera $n = m-1$; cela donne

$$G(m+1,m-1) = G(m+1,m-2) + r_{m-1} G(m+1,m-3):$$

mais l'on a $G(m+1,m-1) = 1$, $G(m+1,m-2) = 0$; on a donc $1 = r_{m-1} G(m+1,m-3)$; ce qui réduit $u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,m-3)$

à u_{m-1}. Ainsi l'équation (42) peut être étendue même au cas de $n = m - 1$, en se servant convenablement des symboles $G(m,m-i)$ qui, alors, remplacent des groupes. L'intégrale (41) est évidemment susceptible de la même extension à $n = 1$, et même à $n = 0$.

Dans cette formule (42), u_{m-1}, u_m tiennent lieu des deux arbitraires indépendantes de n que comporte l'intégration. On peut y réintroduire les premières arbitraires u_1, u_0; en effet, on a en vertu de l'équation (41), où l'on posera successivement $n = m - 1$, $n = m$,

$$u_{m-1} = u_1 G(1,m-3) + u_0 r_0 G(2,m-3),$$
$$u_m = u_1 G(1,m-2) + u_0 r_0 G(2,m-2);$$

substituez ces valeurs dans la formule (42)

$$u_n = u_m G(m,n-2) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,n-2),$$

il vient pour l'expression de u_n

$$G(m,n-2) \,.\, [u_1 G(1,m-2) + u_0 r_0 G(2,m-2)]$$
$$+ r_{m-1} G(m+1,n-2)[u_1 G(1,m-3) + u_0 r_0 G(2,m-3)] =$$
$$= u_1[G(1,m-2).G(m,n-2) + r_{m-1} G(1,m-3).G(m+1,n-2)]$$
$$+ u_0 r_0[G(2,m-2).G(m,n-2) + r_{m-1} G(2,m-3).\, G(m+1,n-2)]$$

En vertu de la formule (10) de l'art. [5], où l'on mettra $m-1$ à la place de m, on a

$$G(1,n-2) = G(1,m-2)G(m,n-2) + r_{m-1} G(1,m-3)G(m+1,n-2).$$

On a pareillement (10)

$$G(2,n-2) = G(2,m-2)G(m,n-2) + r_{m-1} G(2,m-3)G(m+1,n-2);$$

la valeur de u_n se trouve ainsi ramenée à

$$u_n = u_1 G(1,n-2) + u_0 r_0 G(2,n-2).$$

[19] La formule intégrale (42)

$$u_n = u_m G(m,n-2) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,n-2)$$

pouvait facilement être déduite de l'équation (6) : elle enseigne à former u_n à l'aide de u_{m-1} et de u_m. On en tire, en mettant $n-1$ à la place de n,

$$u_{n-1} = u_m G(m,n-3) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1,n-3);$$

si vous éliminez u_{m-1} entre ces formules, vous aurez

$$u_n G(m+1,n-3) - u_{n-1} G(m+1,n-2) =$$
$$= u_m [G(m,n-2)G(m+1,n-3) - G(m,n-3)G(m+1,n-2)].$$

Ainsi l'on peut avoir u_m au moyen de u_n, u_{n-1}, savoir :

$$u_m = \frac{u_n G(m+1,n-3) - u_{n-1} G(m+1,n-2)}{G(m,n-2)\,G(m+1,n-3) - G(m,n-3)\,G(m+1,n-2)}.$$

Cette valeur se simplifie par la relation (14) : en changeant les signes de cette formule, on a

$$G(m-1,n)G(m,n-1) - G(m-1,n-1)G(m,n)$$
$$= -(-1)^{n-m} r_{m-1} . r_m \ldots r_n.$$

On y écrira $m+1$ et $n-2$ à la place de m et de n ; cela donne le dénominateur de u_m

$$G(m,n-2)G(m+1,n-3) - G(m,n-3)G(m+1,n-2)$$
$$= (-1)^{n-m} r_m r_{m+1} \ldots r_{n-2} :$$

l'expression de u_m devient ainsi

$$u_m = \frac{u_n G(m+1,n-3) - u_{n-1} G(m+1,n-2)}{(-1)^{n-m} . r_m r_{m+1} \ldots r_{n-2}}. \qquad (43)$$

En considérant m comme une variable moindre que $n-1$, cette valeur de u_m peut être regardée comme l'intégrale de l'équation à différences finies

$$(44) \qquad u_{m+2} = u_{m+1} + r_m u_m,$$

remplissant la condition de satisfaire aux deux formules

initiales

$$u_n = u_{n-1} + r_{n-2}u_{n-2},$$
$$u_{n-1} = u_{n-2} + r_{n-3}u_{n-3}:$$

celles-ci donnent

$$u_{n-2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{r_{n-2}},$$
$$u_{n-3} = \frac{u_n - (1 + r_{n-2})u_{n-1}}{-r_{n-3}r_{n-2}}:$$

alors n n'est plus la variable, et u_n, u_{n-1} sont les deux arbitraires de l'intégration; c'est m qui est devenu variable sous la restriction de demeurer au-dessous de $n-1$, en sorte que sa plus grande valeur soit $n-2$. La valeur de u_m s'étendrait cependant à $m=n-1$ et à $m=n$, à l'aide des symboles analogiques dont nous venons de faire usage dans l'article précédent.

Cette intégrale (43) peut être rattachée à une considération différente à quelques égards : on écrira l'équation (44) sous la forme

$$u_m = -\frac{1}{r_m}u_{m+1} + \frac{1}{r_m}u_{m+2};$$

nous y poserons

$$u_m = \frac{(-1)^m v_m}{r_n r_{n-1} r_{n-2} \ldots r_{m+1} r_m},$$

partant

$$\frac{u_{m+1}}{r_m} = \frac{-(-1)^m v_{m+1}}{r_n r_{n-1} \ldots r_{m+1} r_m},$$

et

$$\frac{u_{m+2}}{r_m} = \frac{(-1)^m v_{m+2} r_{m+1}}{r_n r_{n-1} \ldots r_{m+2} r_{m+1} r_m}.$$

En substituant, on supprimera le diviseur commun $r_n r_{n-1} \ldots r_m$, et l'on aura l'équation

$$v_m = v_{m+1} + r_{m+1} v_{m+2};$$

nous remplacerons r_{m+1} par r'_m, et l'équation qui doit déterminer v_m sera

$$(44') \qquad v_m = v_{m+1} + r'_m v_{m+2}.$$

En vertu de la relation de u_m à v_m, on aura pour $m=n$,

$$v_n = (-1)^n u_n r_n;$$

pour $m=n-1$, on aura

$$v_{n-1} = -(-1)^n u_{n-1} r_n r_{n-1}.$$

Entre trois groupes $G(m,n)$, $G(m+1,n)$, $G(m+2,n)$ de combinaisons discontiguës formées avec des lettres

$$r'_m, \quad r'_{m+1}, \quad r'_{m+2}, \ldots\ldots r'_n,$$

nous avons reconnu, (9), la relation

$$G(m,n) = G(m+1,n) + r'_m G(m+2,n);$$

en employant $n-3$, et $n-4$, à la place de n, c'est-à-dire en combinant moins de lettres entre elles, on a pareillement :

$$G(m,n-3) = G(m+1,n-3) + r'_m G(m+2,n-3),$$
$$G(m,n-4) = G(m+1,n-4) + r'_m G(m+2,n-4).$$

Il est évident, par ces formules, que si l'on pose dans l'équation (44'),

$$v_m = AG(m,n-3) + A_1 G(m,n-4),$$

elle sera complétement satisfaite, en regardant A et A_1 comme des quantités indépendantes de m. Ces deux arbitraires vont permettre de satisfaire aux conditions prescrites : dans l'équation $v_m = v_{m+1} + r'_m v_{m+2}$, posons successivement $m=n-2$, $m=n-3$, nous aurons

$$v_{n-2} = v_{n-1} + r'_{n-2} v_n,$$
$$v_{n-3} = v_{n-2} + r'_{n-3} v_{n-1} = v_{n-1}(1+r'_{n-3}) + v_n r'_{n-2};$$

ainsi v_{n-2}, et v_{n-3}, sont simplement exprimés en v_{n-1} et v_n. Nous remarquerons [4] que le symbole $G(n-2,n-3)=1$; que $G(n-2,n-4)=1$; et que

$$G(n-3,n-3)=1+r'_{n-3},\quad G(n-3,n-4)=1;$$

les valeurs de v_{n-2}, v_{n-3}, déduites de v_m donnent en faisant $m=n-2$, et $m=n-3$;

$$v_{n-2}=A+A_1,$$
$$v_{n-3}=A[1+r'_{n-3}]+A_1;$$

ainsi

$$A\,r'_{n-3}=v_{n-3}-v_{n-2}=v_{n-1}\,r'_{n-3};$$

ou bien

$$A=v_{n-1},\quad \text{et}\quad A_1=v_{n-2}-v_{n-1}=v_n\,r'_{n-2};$$

par cette détermination l'on aura donc

$$v_m=v_{n-1}G(m,n-3)+v_n r'_{n-2}G(m,n-4):$$

formule qui fournira la valeur des v_m, pour toute valeur de m au-dessous de $n-1$, c'est-à-dire pour $m=n-2$, $n-3$, $n-4$... Les symboles $G(m,n-3)$, $G(m,n-4)$ sont ici composés en $r'_m=r_{m+1}$, $r'_{m+1}=r_{m+2}$, etc.; ainsi l'on a

$$G(r'_m,r'_{n-3})=G(r_{m+1},r_{n-2})=G(m+1,n-2),$$
$$G(r'_m,r'_{n-4})=G(r_{m+1},r_{n-3})=G(m+1,n-3),$$

les derniers groupes étant composés en lettres r et non plus en r'. Rétablissons maintenant dans v_m sa valeur en u_m, et substituons aussi à v_{n-1} et à v_n, leurs valeurs en u_n et u_{n-1}; on aura

$$(-1)^m u_m.r_n r_{n-1}\ldots r_{m+1}r_m=(-1)^n.\left\{\begin{matrix}-u_{n-1}r_n r_{n-1}G(m+1,n-2)\\ +u_n\quad r_n r_{n-1}G(m+1,n-3)\end{matrix}\right\};$$

équation dont on tire, pour u_m, la même expression que ci-

dessus (43) : il est aisé de vérifier, par la substitution, que cette valeur satisfait à l'équation (44).

Changeons la variable m en n' dans la formule (43), et remplaçons-y le nombre n par la lettre m ; on aura ainsi

$$u_{n'} = \frac{u_m G(n'+1, m-3) - u_{m-1} G(n'+1, m-2)}{(-1)^{n'} r_{n'} r_{n'+1} r_{n'+2} \ldots r_{m-2}};$$

nous négligeons le facteur constant $(-1)^m$, ce qui est permis en raison de la forme linéaire de l'équation (44). Maintenant u_m, u_{m-1}, sont les deux arbitraires, et la valeur précédente $u_{n'}$ satisfait à l'équation

$$u_{n'+2} = u_{n'+1} + r_{n'} u_{n'},$$

sous la condition que la variable n' demeure moindre que m. Nous avions trouvé, (42), que quand la variable n de l'équation, entièrement semblable, $u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n$, devait rester supérieure à m, l'expression u_n est de cette forme

$$u_n = u_m G(m, n-2) + u_{m-1} r_{m-1} G(m+1, n-2).$$

Deux formes différentes répondent donc aux deux cas que nous distinguons, et qui se rapportent aux hypothèses

$$n' < m < n,$$

les lettres n' et n étant employées pour désigner alternativement la variable dans l'équation, selon le cas à traiter. Cette remarque, que nous avions déjà faite ci dessus, à l'occasion de l'équation du premier ordre, s'étend à un ordre quelconque : nous avons d'ailleurs indiqué, art. [15], un moyen pour rappeler le second cas au premier, quand on le juge convenable.

Le problème d'exprimer la fonction u_{n+2} satisfaisant à l'équation $$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n,$$

et ayant la propriété de prendre deux valeurs données $u_{n'+2}$, $u_{n''+2}$, quand l'indice n reçoit les valeurs particulières n' et n'', peut être résolu d'une manière plus générale : cette solution montrera encore l'utilité de l'algorithme des groupes $G(m,n)$, et des relations que nous en avons déduites. Nous supposerons les entiers n', n'' tels que $n < n' < n''$; nous aurons pour u_{n+2}, $u_{n'+2}$, $u_{n''+2}$, selon l'expression (41)

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_1 G(1,n) + u_0 r_0 G(2,n), \\ u_{n'+2} &= u_1 G(1,n') + u_0 r_0 G(2,n'), \\ u_{n''+2} &= u_1 G(1,n'') + u_0 r_0 G(2,n''). \end{aligned}$$

Nous composerons la somme de ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par les quantités

$$\begin{aligned} &G(1,n')\ G(2,n'') - G(1,n'')\ G(2,n'), \\ &G(1,n'')\ G(2,n) - G(1,n)\ G(2,n''), \\ &G(1,n)\ G(2,n') - G(1,n')\ G(2,n): \end{aligned}$$

on voit sur-le-champ que u_1 et u_0, seront éliminés, et l'équation résultante sera

$$\begin{aligned} 0 = &[G(1,n')\ G(2,n'') - G(1,n'')\ G(2,n')]u_{n+2} \\ &+ [G(1,n'')\ G(2,n) - G(1,n)\ G(2,n'')]u_{n'+2} \\ &+ [G(1,n)\ G(2,n') - G(1,n')\ G(2,n)]u_{n''+2}. \end{aligned}$$

En posant $l = 1$, $m = n'$, $n = n''$ dans formule (15), on a

$$G(1,n')G(2,n'') - G(1,n'')G(2,n') = (-1)^{n'-1} r_1 r_2 \ldots r_{n'+1} G(n'+3,n''):$$

en observant que $G(n'+3,n') = 0$, cette formule a lieu pour $n'' = n'$; écrivons ici n à la place de n', et changeons les signes des deux membres

$$G(1,n'')G(2,n) - G(1,n)G(2,n'') = -(-1)^{n-1} r_1 r_2 \ldots r_{n+1} G(n+3,n'');$$

cette même équation, où l'on remplacera n' et n'' par n et

n', donnera enfin

$$G(1,n)G(2,n') - G(1,n')G(2,n) = (-1)^{n-1}r_1r_2\ldots r_{n+1}G(n+3,n').$$

D'après cela, l'équation résultante devient

$$(-1)^{n'-1}r_1r_2\ldots r_{n'+1}G(n'+3,n'')u_{n+2} + (-1)^{n}r_1r_2\ldots r_{n+1}G(n+3,n'')u_{n'+2}$$
$$+ (-1)^{n-1}r_1r_2\ldots r_{n+1}G(n+3,n')u_{n''+2} = 0:$$

on divisera par $(-1)^{n-1}r_1r_2r_3\ldots r_{n+1}$, et il viendra

$$0 = (-1)^{n'-n}r_{n+2}\ldots r_{n'}r_{n'+1}G(n'+3,n'')u_{n+2}$$
$$- G(n+3,n'')u_{n'+2} + G(n+3,n')u_{n''+2}.$$

Si dans cette formule vous considérez n'' comme variable, et $n' > n$ comme deux entiers donnés, elle fournira la valeur $u_{n''+2}$ au moyen de n'', qui entre dans les groupes $G(n'+3,n'')$, $G(n+3,n'')$, à l'aide des $r_{n''}$, $r_{n''-1}$, $r_{n''-2}$, ... dont ils sont formés. La valeur de $u_{n''+2}$ dépendra des deux arbitraires u_{n+2}, $u_{n'+2}$: elle ne devra être étendue qu'à des $n'' >= n' > n$. Sous ces conditions, elle sera l'intégrale complète de l'équation

$$u_{n''+2} = u_{n''+1} + r_{n''}u_{n''}.$$

Dans la même formule considérez n et n'' comme deux entiers donnés, u_{n+2} et $u_{n''+2}$ comme deux arbitraires, et n' comme la variable; alors elle fournira $u_{n'+2}$, au moyen des deux arbitraires u_{n+2}, $u_{n''+2}$ et des quantités $r_{n'}$ qui entrent dans les groupes; mais la variable n' sera limitée, et devra être renfermée entre les entiers n et n'' : elle pourra atteindre soit n'', soit n; sous ces conditions on aura l'intégrale de l'équation

$$u_{n'+2} = u_{n'+1} + r_{n'}u_{n'}.$$

Enfin la même formule offre l'intégrale de l'équation semblable

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n,$$

où n devient la variable, assujettie à la condition $n<=n'<n''$: n' et n'' sont, en ce cas, deux entiers donnés, et les grandeurs $u_{n'+2}$, $u_{n''+2}$ tiennent lieu de deux arbitraires que l'on prendra à volonté. Lorsque n deviendra égal à n', pour retrouver $u_{n+2}=u_{n'+2}$, on devra se rappeler, (22), que $G(n'+3,n')=0$.

[20] Revenons à l'équation (38) que nous avions à traiter

$$y_{n+2}=y_{n+1}+r_n y_n+\lambda_n,$$

et à laquelle nous avons substitué une équation moins générale, en u_n, sans dernier terme λ_n. On pourrait lui appliquer le procédé des substitutions successives qui nous a servi pour l'équation (39); mais nous emploierons une autre marche, qui se rattache plus directement à l'usage des groupes de combinaisons discontiguës, et qui, au fond, revient au même principe. Remplaçons n par $n-1$, par $n-2$, $n-3$,...2, 1, 0 dans l'équation; cela donne

$$\begin{aligned}
y_{n+2}&=y_{n+1}+r_n\, y_n+\lambda_n,\\
y_{n+1}&=y_n+r_{n-1}y_{n-1}+\lambda_{n-1},\\
y_n&=y_{n-1}+r_{n-2}y_{n-2}+\lambda_{n-2},\\
y_{n-1}&=y_{n-2}+r_{n-3}y_{n-3}+\lambda_{n-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
y_3&=y_2+r_1\, y_1+\lambda_1,\\
y_2&=y_1+r_0\, y_0+\lambda_0:
\end{aligned}$$

ajoutons ces n formules, mais après avoir multiplié

la 3ième par $G(n,n)=1+r_n$,
la 4ième par $G(n-1,n)=1+r_{n-1}+r_n$,
la 5ième par $G(n-2,n)=1+r_{n-2}+r_{n-1}+r_n+r_{n-2}r_n$,

et ainsi des autres jusqu'à la dernière qui sera multipliée par

$G(2,n)$: dans l'équation résultante nous ne conserverons au premier membre que y_{n+2}, et il vient ainsi $y_{n+2} =$

$$\left.\begin{matrix}-G(n,n)\\+1+r_n\end{matrix}\right]y_n+\left.\begin{matrix}-G(n-1,n)\\+G(n,n)\\+r_{n-1}\end{matrix}\right]y_{n-1}+\left.\begin{matrix}-G(n-2,n)\\+G(n-1,n)\\+r_{n-1}G(n,n)\end{matrix}\right]y_{n-2}+\left.\begin{matrix}-\ G(n-3,n)\\+\ G(n-2,n)\\+r_{n-2}G(n-1,n)\end{matrix}\right]y_{n-3}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots+\left.\begin{matrix}-\ G(2,n)\\+\ G(3,n)\\+r_2G(4,n)\end{matrix}\right]y_2\left.\begin{matrix}+\ G(2,n)\\+r_1G(3,n)\end{matrix}\right]y_1+G(2,n)r_0y_0+$$

$$+\lambda_n+\lambda_{n-1}+G(n,n)\lambda_{n-2}+G(n-1,n)\lambda_{n-3}+\ldots+\lambda_1G(3,n)+\lambda_0G(2,n).$$

On voit facilement que les termes en $y_n, y_{n-1}, \ldots\ldots y_3, y_2$ s'éliminent, parce qu'on a

$$G(n,n) \quad = 1 + r_n, \quad G(n-1,n) = G(n,n) + r_{n-1}$$
$$G(n-2,n) = G(n-1,n) + r_{n-2}G(n,n),$$

et en général

$$G(n-m,n) = G(n-m+1,n) + r_{n-m}G(n-m+2,n),$$

ce que donne l'équation (9), en y écrivant $n-m$ à la place de m : cette élimination des n quantités $y_{n+1}, y_n \ldots y_2$ réduit l'équation résultante à

$$y_{n+2} = y_1G(1,n) + y_0r_0G(2,n)$$
$$+\lambda_n+\lambda_{n-1}+\lambda_{n-2}G(n,n)+\lambda_{n-3}G(n-1,n)+\ldots+\lambda_0G(2,n).$$

Dans cette valeur on remplacera n par $n-2$, et il vient, en changeant l'ordre des termes en λ

$$(45)\quad\left\{\begin{aligned}&y_n = y_1G(1,n-2) + y_0r_0G(2,n-2)\\&\quad+\lambda_0G(2,n-2)+\lambda_1G(3,n-2)+\lambda_2G(4,n-2)+\ldots\\&\quad\ldots+\lambda_{n-5}G(n-3,n-2)+\lambda_{n-4}G(n-2,n-2)+\lambda_{n-3}+\lambda_{n-2}.\end{aligned}\right.$$

Telle est l'expression de y_n qui convient à l'équation pro-

posée : y_0 et y_1 sont deux lettres qui représentent les valeurs de y_n répondant à $n=0$, et à $n=1$; elles sont arbitraires, et remplacent les deux constantes voulues par l'ordre de l'équation que nous devions intégrer. Elles sont multipliées par des fonctions $G(1,n-2)$, $G(2,n-2)$ etc., des lettres données $r_1, r_2, r_3 \ldots r_{n-2}$, complétement déterminées dans leur composition; des fonctions analogues entrent comme coefficients des $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-5}, \lambda_{n-4}$. Cette intégrale offre, dans sa constitution, les mêmes caractères et la même généralité que l'on remarque sur l'intégrale de l'équation aux différences finies du premier ordre, trouvée par Lagrange; je veux dire que cette valeur est une fonction algébrique déterminée de $r_0, r_1, r_2 \ldots r_{n-2}$, ainsi que de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-2}$, qui sont $2n-2$ quantités données, ou dépendantes de n, et en outre elle renferme les arbitraires y_0, y_1.

Il est évident que le procédé que nous venons de suivre aurait pu être appliqué à l'équation (39), et qu'il eût conduit à l'expression de l'intégrale que nous avons formée (31).

L'on se convaincra facilement que toute autre combinaison qui satisferait à l'équation (38) rentrera dans la précédente, s'il n'existe aucune relation qui permette la fusion des lettres r_0, r_1, r_2, ... r_{n-2} entre elles, ou avec les λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_{n-2}$: tant que ces grandeurs demeureront algébriques et indépendantes l'une de l'autre, l'équation ne pourra être satisfaite que par l'expression que nous venons de donner. Les solutions d'équations particulières du second ordre que l'on a formées, pour des problèmes spéciaux, rentrent nécessairement dans la formule générale. Lorsque ces formules renferment autant de lettres indépendantes que les nôtres, on peut les amener à leur être identiques.

L'indication précise de la composition ou de la loi du résultat général, est ce que nous croyons ajouter à ce que l'on possédait déjà sur cette matière : cette loi n'était connue, ce me semble, que pour l'équation linéaire du premier ordre.

Nous avons pris pour arbitraires y_0 et y_1 : on eût pu employer tout aussi bien y_{m-1}, y_m, et les formules seraient entièrement semblables à celles que nous venons d'écrire; mais elles supposeraient n supérieur à m. Si la variable n était au-dessous de m, on aurait pour le résultat des formules différentes à plusieurs égards, ainsi que nous l'avons fait observer à l'occasion de l'équation privée de son dernier terme. Il sera facile de les former d'après ce que nous avons donné à la fin de l'article précédent [19].

Ayant à traiter l'équation

$$y_{n+2} = y_{n+1} + r_n y_n + \lambda_{n-1}, \tag{38}$$

qui a un dernier terme λ_n, nous eussions pu recourir à l'intégrale complète de l'équation privée de ce terme, savoir :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r_n u_n,$$

intégrale que nous avons mise sous cette forme :

$$u_n = \mathrm{A}\,\mathrm{G}(1, n-2) + \mathrm{B}\,\mathrm{G}(2, n-2),$$

où A et B sont des arbitraires indépendantes de la variable n; en partant de cette intégrale, et y supposant les deux quantités A et B variables avec n, on peut satisfaire l'équation (38), en posant

$$y_n = \mathrm{A}_n \mathrm{G}(1, n-2) + \mathrm{B}_n \mathrm{G}(2, n-2);$$

et l'on parvient ainsi à une détermination complète de A_n et

de B_n, au moyen de simples sommations: par cette marche, fondée sur un théorème de Lagrange, on forme en effet une valeur de y_n, dont la première expression est assez compliquée; toutefois, on la ramène, à celle que je viens de donner (45), à l'aide de quelques transformations, et des remarques de l'article [7].

[21] Nous avons enfin à composer la valeur de Y_n qui doit satisfaire à l'équation proposée (37)

$$Y_{n+2} = \beta_n Y_{n+1} + \gamma_n Y_n + \Lambda_n :$$

nous avons $Y_n = y_n \Pi_{n-1}(\beta_{n-1}) = y_n \beta_{n-2} \beta_{n-3} \ldots \beta_1 \beta_0$, y_n étant donnée par la valeur (45) : y_0 et y_1 seront remplacés par Y_0 et Y_1, art. [16]; nous mettrons en évidence des $r_1, \ldots r_{n-2}$ dans les groupes G, de y_n; on aura donc, (45),

$$\begin{aligned} y_n = {} & Y_1 G(r_1, r_{n-2}) + Y_0 r_0 G(r_2, r_{n-2}) + \\ & + \lambda_0 G(r_2, r_{n-2}) + \lambda_1 G(r_3, r_{n-2}) + \ldots\ldots \\ & \ldots + \lambda_{n-5}(r_{n-3}, r_{n-2}) + \lambda_{n-4} G(r_{n-2}, r_{n-2}) + \lambda_{n-3} + \lambda_{n-2}. \end{aligned}$$

Il faudra substituer ici les valeurs

$$r_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad r_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_0\beta_1}, \quad r_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_1\beta_2}, \ldots r_{n-2} = \frac{\gamma_{n-2}}{\beta_{n-3}\beta_{n-2}};$$

$$\lambda_0 = \frac{\Lambda_0}{\beta_0}, \quad \lambda_1 = \frac{\Lambda_1}{\beta_0\beta_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\Lambda_2}{\beta_0\beta_1\beta_2}, \ldots\ldots$$

$$\ldots \lambda_{n-3} = \frac{\Lambda_{n-3}}{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-3}}, \quad \lambda_{n-2} = \frac{\Lambda_{n-2}}{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{n-2}}:$$

on multipliera l'équation précédente par $\beta_0\beta_1\beta_2\ldots\ldots\beta_{n-2}$: son premier membre devient Y_n; on y remplacera aussi les λ par leurs valeurs, en conservant néanmoins les r, pour simplifier, et provisoirement; il viendra ainsi

$$
\left.
\begin{aligned}
Y_n = {} & \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{n-2}[\varepsilon_0 Y_1 G(r_1, r_{n-2}) + Y_0\gamma_0 G(r_2, r_{n-2})] \\
& + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{n-2}\Lambda_0 G(r_2, r_{n-2}) \\
& + \varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{n-2}\Lambda_1 G(r_3, r_{n-2}) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \varepsilon_{n-3}\varepsilon_{n-2}\Lambda_{n-4} G(r_{n-2}, r_{n-2}) + \varepsilon_{n-2}\Lambda_{n-3} + \Lambda_{n-2}.
\end{aligned}
\right\} \quad (46)
$$

Considérons le terme en Y_1 de cette formule, savoir,

$$Y_1\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-2} G\left(\frac{\gamma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1}, \frac{\gamma_{n-2}}{\varepsilon_{n-3}\varepsilon_{n-2}}\right):$$

nous savons, [3], que le groupe $G(r_1, r_{n-2})$ est une somme de termes de cette forme :

$$r_f \times r_{f+2+h} \times r_{f+4+h+h_1} \times r_{f+6+h+h_1+h_2}\cdots$$

On multipliera ce produit par $Y_1\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-2}$ pour composer le terme correspondant de Y_n; il deviendra donc

$$Y_1\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-2} \times \frac{\gamma_f}{\varepsilon_{f-1}\varepsilon_f} \times \frac{\gamma_{f+2+h}}{\varepsilon_{f+1+h}\varepsilon_{f+2+h}} \times \ldots\ldots$$

Le produit $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$, enlève tous les diviseurs de ce terme, et il se réduit à

$$Y_1\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{f-2} \times \gamma_f \times \varepsilon_{f+1}\varepsilon_{f+2}\ldots\varepsilon_{f+h} \times \gamma_{f+2+h} \times \varepsilon_{f+3+h}\ldots\ldots$$

On saisit aisément la loi de ce produit, en le rapprochant du terme discontigu $r_f . r_{f+2+h} . r_{f+4+h+h_1}\ldots\ldots$ dont il dérive :

1° On écrit dans celui-ci des γ au lieu des r :

$$\gamma_f \times \gamma_{f+2+h} \times \gamma_{f+4+h+h_1} \times \ldots$$

2° On enlève au produit $Y_1\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{f-1}\varepsilon_f\ldots\varepsilon_{f+1+h}\varepsilon_{f+2+h}\ldots$ les couples de facteurs contigus $\varepsilon_{f-1}\varepsilon_f$, $\varepsilon_{f+1+h}\varepsilon_{f+2+h}$, etc., ce qui le réduit à

$$Y_1\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{f-2} \times \varepsilon_{f+1}\ldots\varepsilon_{f+h} \times \varepsilon_{f+3+h}\ldots$$

Ce dernier produit, multiplié par le discontigu $\gamma_f \times \gamma_{f+2+h} \ldots$ donnera le terme cherché de Y_n. On pourra l'écrire sous cette forme :

$$Y_1 \Pi_{f-1}(\mathcal{E}_{f-1}) \times \gamma_f \times \Pi_h(\mathcal{E}_{f+1+h}) \times \gamma_{f+2+h} \times \Pi_{h_1}(\mathcal{E}_{f+3+h+h_1}) \ldots$$

en continuant à employer la notation $\Pi_f(\mathcal{E}_m) = \mathcal{E}_{m-1}\mathcal{E}_{m-2}\ldots\mathcal{E}_{m-f}$ de l'art. [15]. Cette loi de formation est conforme à ce que nous avons expliqué dans l'art. [10] à l'occasion des fractions continues.

La seconde partie de Y_n, affectée de Y_0, est

$$Y_0\gamma_0\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\ldots\mathcal{E}_{n-2}G\left(\frac{\gamma_2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}, \frac{\gamma_{n-2}}{\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2}}\right).$$

Le groupe $G(r_2, r_{n-2})$ étant composé de termes soumis à la discontiguité, et de la forme

$$r_f \cdot r_{f+2+h} \cdot r_{f+4+h+h_1} \cdot r_{f+6+h+h_1+h_2} \ldots$$

on aura, comme ci-dessus, à y remplacer les r_f par des $\frac{\gamma_f}{\mathcal{E}_{f-1}\cdot\mathcal{E}_f}$; ainsi le terme du groupe que nous considérons se changera en

$$Y_0\gamma_0\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\ldots\mathcal{E}_{f-2}\cdot\gamma_f\cdot\mathcal{E}_{f+1}\mathcal{E}_{f+2}\ldots\mathcal{E}_{f+h}\cdot\gamma_{f+h+2}\cdot\mathcal{E}_{f+3+h}\ldots$$

et il sera, par conséquent, soumis à la même loi que le terme en Y_1.

Le terme affecté de Λ_{n-4} est $\Lambda_{n-4}\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2}G(r_{n-2}, r_{n-2})$ ou bien

$$\Lambda_{n-4}\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2}\left[1 + \frac{\gamma_{n-2}}{\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2}}\right] = [\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2} + \gamma_{n-2}]\Lambda_{n-4}.$$

Le terme suivant, affecté de Λ_{n-5}, aura pour coefficient

$$\mathcal{E}_{n-4}\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2}\left[1 + \frac{\gamma_{n-3}}{\mathcal{E}_{n-4}\mathcal{E}_{n-3}} + \frac{\gamma_{n-2}}{\mathcal{E}_{n-3}\mathcal{E}_{n-2}}\right];$$

ainsi ce terme devient

$$[\beta_{n-4}\beta_{n-3}\beta_{n-2} + \gamma_{n-3}\beta_{n-2} + \beta_{n-4}\gamma_{n-2}]\Lambda_{n-5}:$$

il en est ainsi de tous les autres, et l'on reconnaît dans la formation de leurs coefficients la loi indiquée à l'occasion des termes en Y_1 et en $Y_0\gamma_0$.

Notre méthode, ayant été fondée sur la transformation $Y_n = y_n \Pi_{n-1}(\beta_{n-1})$, suppose que les β_t renfermés dans le produit Π_{n-1} ne le rendent pas nul, c'est-à-dire qu'aucun des facteurs β_t ne soit nul. Si pourtant on avait à intégrer l'équation privée de son terme en Y_{n+1}, savoir :

$$Y_{n+2} = \gamma_n Y_n + \Lambda_n,$$

on pourrait déduire le résultat de l'intégrale ci-dessus, où l'on supposerait d'abord β_n égal à une constante β, que l'on rendrait infiniment petite après avoir composé la formule : elle perd alors plusieurs classes de termes et se simplifie considérablement. Mais il vaut mieux traiter l'équation donnée elle-même, en y remplaçant encore n par des valeurs inférieures, qui seront, en cette occasion, $n-2$, $n-4$, $n-6$,...; cela donne les équations suivantes

$$\begin{aligned}
Y_{n+2} &= \gamma_n Y_n + \Lambda_n,\\
Y_n &= \gamma_{n-2} Y_{n-2} + \Lambda_{n-2},\\
Y_{n-2} &= \gamma_{n-4} Y_{n-4} + \Lambda_{n-4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_{n-2m+2} &= \gamma_{n-2m} Y_{n-2m} + \Lambda_{n-2m}:
\end{aligned}$$

on multiplie l'équation en Y_n par γ_n, celle en Y_{n-2} par $\gamma_n\gamma_{n-2}$, la suivante par $\gamma_n\gamma_{n-2}\gamma_{n-4}$, jusqu'à la dernière, qui sera multipliée par $\gamma_n\gamma_{n-2}\gamma_{n-4}\ldots\gamma_{n-2m+2}$; et en ajoutant toutes les

formules, on aura

$$\begin{aligned} Y_{n+2} = Y_{n-2m} & \gamma_n\gamma_{n-2}\gamma_{n-4}\ldots\gamma_{n-2m+4}\gamma_{n-2m+2}\gamma_{n-2m} \\ + \Lambda_{n-2m} & \gamma_n\gamma_{n-2}\gamma_{n-4}\ldots\gamma_{n-2m+4}\gamma_{n-2m+2} \\ + \Lambda_{n-2m+2} & \gamma_n\gamma_{n-2}\gamma_{n-4}\ldots\gamma_{n-2m+4} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \Lambda_{n-2} & \gamma_n + \Lambda_n. \end{aligned}$$

La quantité Y_{n-2m} de cette formule tient lieu d'une seule arbitraire, en sorte que l'intégrale semble se présenter avec cette particularité; mais on doit remarquer que quand n est pair, $n-2m$ est pair aussi, et l'arbitraire Y_{n-2m} est une valeur de la forme Y_{2i} qui sera comprise parmi les Y_n à indices pairs; quand, au contraire, n devient impair, Y_{n-2m} est une valeur de la forme Y_{2i+1} à indice impair donné; et cette arbitraire, sans relation nécessaire à Y_{2i}, ne sera comprise que parmi les Y_n à indices impairs. Il résulte de là que les Y_{2p} dépendent de l'arbitraire Y_{2i} seule, et les Y_{2p+1} dépendent de l'autre arbitraire Y_{2i+1} : ainsi deux arbitraires sont nécessaires, pour répondre à une valeur quelconque de n dans la formation de Y_n. L'expression générale pourrait être composée avec les valeurs de Y_n qui répondent aux cas de $n=2p$, et de $n=2p+1$, mais cette composition semble peu utile.

Nous avons employé pour n des valeurs $n-2$, $n-4$ $\ldots n-2m$; on eût pu également se servir de valeurs supérieures $n+2, n+4, \ldots n+2m$, et l'on aurait des résultats semblables.

L'équation $Y_{n+2} = \gamma_n Y_n + \Lambda_n$ pouvait être ramenée au premier ordre, en posant $n = 2p$, et $Y_{2p} = y_p$, quand n est pair; et $n = 2p+1$, $Y_{2p+1} = y_p$, quand n est impair; mais il est aussi simple de traiter directement l'équation telle qu'elle

se présente. On pourra encore écrire ces deux formules

$$Y_{n+2} = \gamma_n \ Y_n \ + A_n,$$
$$Y_{n+3} = \gamma_{n+1} Y_{n+1} + A_{n+1};$$

on retranchera la première de la seconde, et l'on aura

$$Y_{n+3} = Y_{n+2} + \gamma_{n+1} Y_{n+1} - \gamma_n Y_n + A_{n+1} - A_n:$$

cette équation du troisième ordre pourra recevoir l'application de la méthode que nous allons exposer dans l'article [23]. A la fin de l'opération, on aura à réduire les trois constantes à deux seulement, à l'aide de l'équation proposée

$$Y_{n+2} = \gamma_n Y_n + A_n.$$

Mais cette voie ne sera pas la plus simple, car l'intégration de l'équation du troisième ordre est beaucoup plus compliquée que celle du second ordre qu'il s'agissait d'intégrer.

[22] Nous venons de traiter le cas où la variable n sera un entier positif et supérieur à l'entier m, auquel se rapportent les deux arbitraires Y_{m-1} et Y_m qui entrent dans l'intégrale, et qui sont Y_0 et Y_1 quand on prend $m=1$. Il peut arriver que la variable n doive être inférieure à m ou à l'entier pour lequel on connaît Y_{m-1} et Y_m : nous avons déjà dit qu'alors on pourra poser $n=m-n'$ et $Y_n = Y'_{n'}$, et cette substitution ramènera le second cas au premier; mais il sera quelquefois utile de traiter l'équation plus directement, sans changer la variable n, et on le peut, en effet, par le moyen des groupes de combinaisons discontiguës employés d'une manière qui diffère à quelques égards de celle que nous venons de suivre. L'équation (37) sera mise sous la

forme

$$Y_n = -\frac{\beta_n}{\gamma_n} Y_{n+1} + \frac{1}{\gamma_n} Y_{n+2} - \frac{\Lambda_n}{\gamma_n},$$

ou bien $Y_n = \beta'_n Y_{n+1} + \gamma'_n Y_{n+2} + \Lambda'_n$. On fera ici $Y_n = \beta'_n \beta'_{n+1} \ldots \beta'_m y'_n$; et l'équation se trouvera ramenée à cette forme

$$y'_n = y'_{n+1} + r'_n y'_{n+2} + \lambda'_n,$$

où r'_n et λ'_n sont des fonctions connues des lettres β, γ, Λ de l'équation proposée, rapportées à diverses valeurs particulières ou algébriques de n; ainsi elles seront traitées comme des fonctions connues de n.

On remplacera successivement n par $n+1, n+2, n+3, \ldots m-2$; il en résultera un système de $m-n-1$ égalités :

$$\begin{aligned}
y'_n &= y'_{n+1} + r'_n \; y'_{n+2} + \lambda'_n, \\
y'_{n+1} &= y'_{n+2} + r'_{n+1} y'_{n+3} + \lambda'_{n+1}, \\
y'_{n+2} &= y'_{n+3} + r'_{n+2} y'_{n+4} + \lambda'_{n+2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y'_{m-3} &= y'_{m-2} + r'_{m-3} y'_{m-1} + \lambda'_{m-3}, \\
y'_{m-2} &= y'_{m-1} + r'_{m-2} y'_m \;\; + \lambda'_{m-2} :
\end{aligned}$$

entre ces formules nous allons éliminer les

$$y'_{n+1}, y'_{n+2}, y_{n+3}, \ldots y_{m-2};$$

alors il ne restera que y_n qui sera exprimé en y_{m-1} et y_{m-2} : on opère cette élimination en formant la somme des équations, après avoir multiplié la troisième par

$$G'(n,n) \quad = 1 + r'_n,$$

la quatrième par

$$G'(n,n+1) = 1 + r'_n + r'_{n+1},$$

la cinquième par

$$G'(n,n+2)=1+r'_n+r'_{n+1}+r'_{n+2}+r'_n r'_{n+2},$$

la dernière par

$$G'(n,m-4);$$

dans cette opération, vous remarquerez qu'en général, (6),

$$G'(n,n+h)=G'(n,n+h-1)+r'_{n+h}G'(n,n+h-2),$$

et que, par suite, les termes affectés de y'_{n+h} se détruisent; la somme des équations sera donc réduite à

$$\begin{aligned} y'_n = y'_{m-1}[G'(n,m-4) + r'_{m-3}G'(n,m-5)] \\ + r'_{m-2}y'_m G'(n,m-4) + \lambda'_n + \lambda'_{n+1} + \\ + \lambda'_{n+2}G'(n,n) + \lambda'_{n+3}G'(n,n+1) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \lambda'_{m-2}G'(n,m-4): \end{aligned}$$

par la même relation (6), on a

$$G(n,m-3)=G(n,m-4)+r_{m-3}G(n,m-5),$$

et le coefficient de y'_{m-1} pourra être remplacé par $G'(n,m-3)$. Il n'y aura plus à faire dans cette formule, que des substitutions, du même genre que celles que nous avons indiquées au commencement du paragraphe précédent.

[23] L'équation linéaire complète du troisième ordre, aux différences finies, est

$$(47)\qquad Y_{n+3}=\beta_n Y_{n+2}+\gamma_n Y_{n+1}+\delta_n Y_n+A_n:$$

en posant, comme nous avons fait pour l'équation du second ordre,

$$Y_n=y_n.\beta_{n-3}.\beta_{n-4}.\beta_{n-5}\ldots\beta_1.\beta_0;$$

on la ramènera sur-le-champ à la forme plus simple

$$(48) \qquad y_{n+3} = y_{n+2} + r_n y_{n+1} + s_n y_n + \lambda_n,$$

r_n, s_n, λ_n étant des fonctions connues de n, déduites des valeurs de β_n, γ_n, δ_n et Λ_n. On voit que cette transformation exige qu'aucun des $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ ne soit nul, et qu'elle est applicable à un ordre quelconque, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, pourvu que l'équation ne soit pas privée de son second terme.

Si l'on peut composer l'expression de u_n qui vérifie généralement l'équation privée de son terme λ_n, savoir,

$$(49) \qquad u_{n+3} = u_{n+2} + r_n u_{n+1} + s_n u_n,$$

on en déduira promptement la valeur de y_n, par le théorème de Lagrange : nous donnerons, [24], un procédé plus simple, et analogue à celui dont nous nous sommes servis pour l'équation du second ordre [20].

Nous avons formé [11] avec deux systèmes de lettres

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}, r_n,$$
$$s_2, s_3, \ldots s_{n-1}, s_n,$$

un groupe de combinaisons discontiguës représenté par $G(1,n)$, d'après un mode complétement déterminé : ce groupe jouit de la propriété exprimée par la formule (20),

$$G(1,n) = G(1,n-1) + r_n G(1,n-2) + s_n G(1,n-3);$$

la comparaison de cette formule à l'équation

$$u_{n+3} = u_{n+2} + r_n u_{n+1} + s_n u_n$$

suffit pour reconnaître que l'on satisfera à celle-ci, en posant

$$u_n = AG(1,n-3),$$

A étant une quantité arbitraire, mais indépendante de n.

Au lieu de former les combinaisons discontiguës avec la totalité des éléments $r_1, r_2, r_3, \ldots s_2, s_3, s_4, \ldots$ on peut n'employer qu'une partie de ces éléments, en commençant à $r_m, r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots$ où $m < n$; il en résulte un groupe $G(m.n)$, moins étendu, par le nombre de ses termes, que le premier groupe, et qui jouit aussi de la propriété de vérifier identiquement l'équation

$$(21)\quad G(m,n) = G(m,n-1) + r_n G(m,n-2) + s_n G(m,n-3).$$

On pourra donc encore satisfaire à l'équation (49) en posant

$$u_n = A_m G(m,n-3),$$

A_m étant une quantité qui ne dépendra pas de la variable n. En donnant à m trois valeurs entières différentes, par exemple, $m=1$, $m=2$, $m=3$, on aura trois solutions distinctes de l'équation proposée, et leur somme formera une valeur générale renfermant les trois arbitraires A_1, A_2, A_3; on aura donc, pour l'intégrale de l'équation proposée, cette expression

$$u_n = A_1 G(1,n-3) + A_2 G(2,n-3) + A_3 G(3,n-3). \quad (50)$$

Mais on pourrait employer aussi pour solution

$$u_n = A_m G(m,n-3) + A_{m'} G(m',n-3) + A_{m''} G(m'',n-3), \quad (51)$$

m, m', m'' étant trois entiers au-dessous de $n-3$. Cette manière de satisfaire à l'équation résout la question proposée; mais on exige ordinairement que le résultat soit ap-

proprié à certaines formules particulières, comme conditions imposées. Le sens le plus ordinaire de cette question consiste à regarder la formule

$$u_{n+3} = u_{n+2} + r_n u_{n+1} + s_n u_n,$$

comme un type d'après lequel on est censé avoir formé une série d'équations particulières qui répondent, par exemple, à $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. : ces équations sont alors

$$\left.\begin{aligned} u_3 &= u_2 + r_0 u_1 + s_0 u_0,\\ u_4 &= u_3 + r_1 u_2 + s_1 u_1,\\ u_5 &= u_4 + r_2 u_3 + s_2 u_2,\\ u_6 &= u_5 + r_3 u_4 + s_3 u_3,\\ u_7 &= u_6 + r_4 u_5 + s_4 u_4,\\ &\text{etc. :} \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

la valeur de u_3 doit être substituée dans u_4, celle-ci dans u_5, avec u_3; puis u_5, u_4, u_3 substitués dans u_6, et ainsi de suite; et l'on demande une expression de u_n, répondant à un rang quelconque n, en fonction de toutes les grandeurs r_0, s_0, r_1, s_1, etc., r_{n-3}, s_{n-3}, qui se seront introduites dans les formules.

Soit, pour abréger,

$$v_0 = r_0 u_1 + s_0 u_0, \quad v_1 = r_1 u_1,$$

en sorte que

$$u_3 = u_2 + v_0$$
$$u_4 = u_2[1 + r_1] + v_0 + v_1;$$

la valeur de u_5, où l'on remplacera u_4 et u_3 par les précédentes, en u_2, v_0 et v_1, sera

$$u_5 = u_2[1 + r_1 + r_2 + s_2] + v_0[1 + r_2] + v_1;$$

celle de u_6 sera

$$u_6 = u_2\begin{bmatrix}1+r_1+r_2+r_3\\ \quad +s_2+s_3\end{bmatrix} + v_0\begin{bmatrix}1+r_2+r_3\\ \quad +s_3\end{bmatrix} + v_1[1+r_3];$$

pour u_7, on aura

$$u_7 = u_2\begin{bmatrix}1+r_1+r_2+r_3+r_4+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_4\\ \quad +s_2+s_3+s_4+s_2r_4+r_1s_4\end{bmatrix} + v_0\begin{bmatrix}1+r_2+r_3+r_4+r_2r_4\\ \quad +s_3+s_4\end{bmatrix} + v_1\begin{bmatrix}1+r_3+r_4\\ \quad +s_4\end{bmatrix};$$

et ainsi de suite. On voit par ces premières valeurs, que les u_2, v_0, v_1 entreront dans toutes les suivantes au premier degré; et l'on reconnaît facilement qu'en composant les coefficients, les combinaisons sont toutes soumises aux règles de la discontiguité : ainsi les coefficients de u_2, v_0, v_1, ne sont que des groupes discontigus résultant des deux séries de lettres r_i, s_i. Considérons d'abord dans u_7 le coefficient de u_2 : nous savons, art. [11], que le groupe de combinaisons discontiguës formées avec les 7 lettres

$$\begin{matrix} r_1, r_2, r_3, r_4, \\ s_2, s_3, s_4, \end{matrix}$$

se compose des termes

$$\begin{bmatrix}1+r_1+r_2+r_3+r_4+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_4\\ \quad +s_2+s_3+s_4+s_2r_4+r_1s_4\end{bmatrix} = G(1,4):$$

ainsi ce groupe est identique au coefficient de u_2. La même remarque convient au coefficient de v_0, dans u_7, qui est

$$1+r_2+r_3+r_4+s_3+s_4+r_2r_4:$$

cette somme de termes constitue, en effet, le groupe $G(2,4)$: le coefficient de v_1, dans u_7, est

$$1+r_3+r_4+s_4 = G(3,4).$$

Les trois parties de u_7 étant réunies, donneront donc

$$u_7 = u_2 G(1,4) + v_0 G(2,4) + v_1 G(3,4).$$

Par des remarques semblables, on reconnaît que la valeur de u_6 peut aussi être représentée par

$$u_6 = u_2 G(1,3) + v_0 G(2,3) + v_1 G(3,3);$$

et celle de u_5 par

$$u_5 = u_2 G(1,2) + v_2 G(2,2) + v_1.$$

On voit donc que ces expressions de u_5, u_6, u_7 sont composées de trois classes de termes affectés de u_2, v_0, et v_1 : il en sera ainsi de u_8, de u_9, etc., jusqu'à un rang quelconque. On prouvera d'ailleurs aisément que si la valeur de u_n est reconnue de la forme

$$u_n = u_2 G(1,n-3) + v_0 G(2,n-3) + v_1 G(3,n-3), \qquad (53)$$

pour trois valeurs consécutives particulières $n, n+1, n+2$, elle aura nécessairement la même forme pour $n+3$: cela résulte de la propriété des groupes G, exprimée dans l'équation (20); or, nous venons de constater que la forme dont il s'agit existe pour $n=5, n=6, n=7$; il s'ensuit qu'elle subsistera pour $n=8$, et par suite pour $n=9$: de degré en degré on s'élèvera à une valeur quelconque de n. Nous nous dispensons de répéter ici le détail de la démonstration de l'art. [16], relative à l'équation du second ordre.

Au reste, il suffit dans la formule ci-dessus,

$$u_n = AG(1,n-3) + A_2 G(2,n-3) + A_3 G(3,n-3),$$

de poser $A = u_2$, $A_2 = v_0$, $A_3 = v_1$, pour rendre cette valeur identique à celle que nous venons de former (53) par des substitutions successives : cette valeur satisfait à l'équation (49) et l'on peut vérifier qu'elle se change en u_3, quand on pose $n = 3$; en u_2 quand on fait $n = 2$, et ainsi des autres : en effet, pour $n = 3$ elle devient

$$u_3 = u_2 G(1,0) + v_0 G(2,0) + v_1 G(3,0);$$

mais par les formules (22) on a

$$G(1,0) = 1, \quad G(2,0) = 1, \quad G(3,0) = 0;$$

la valeur se réduit donc à $u_2 + v_0$, qui est bien celle de u_3. Pour $n = 2$ on a la formule

$$u_n = u_2 G(1,-1) + v_0 G(2,-1) + v_1 G(3,-1);$$

mais $G(1,-1) = 1$, $G(2,-1) = 0$, $G(3,-1) = 0$; il reste donc $u_n = u_2$.

Quand on posera $n = 1$, dans u_n, il faudra se rappeler que, d'après l'un des symboles (22), on a $s_1 G(3,-2) = 1$: la valeur $u_2 G(1,-2) + v_0 G(2,-2) + v_1 G(3,-2)$, se réduit ainsi à $\frac{v_1}{s_1} = u_1$.

Les quantités u_2, v_0, v_1 tiennent lieu, dans la valeur u_n, des trois constantes arbitraires que comporte l'ordre de l'équation (49). La composition de cette intégrale est semblable à celle que nous avons formée (41) pour l'équation linéaire du second ordre à différences finies. Les deux lettres $v_0 = r_0 u_1 + s_0 u_0$, $v_1 = s_1 u_1$, sont données, puisque l'on assigne les premières valeurs u_0 et u_1 de u_n. Quant à r_0 et r_1, elles sont censées connues.

[24] Nous allons reprendre l'équation complète (48) pourvue de son dernier terme λ_n, savoir,

$$y_{n+3}=y_{n+2}+r_n y_{n+1}+s_n y_n+\lambda_n :$$

en y remplaçant n par $n-1$, par $n-2$, ... 3, 2, 1, 0, elle donne, $n-1$ autres formules, en sorte que l'on a

$$\begin{array}{l}
y_{n+3}=y_{n+2}+r_n\ y_{n+1}+s_n\ y_n\ +\lambda_n,\\
y_{n+2}=y_{n+1}+r_{n-1}y_n\ +s_{n-1}y_{n-1}+\lambda_{n-1},\\
y_{n+1}=y_n\ +r_{n-2}y_{n-1}+s_{n-2}y_{n-2}+\lambda_{n-2},\\
y_n\ =y_{n-1}+r_{n-3}y_{n-2}+s_{n-3}y_{n-3}+\lambda_{n-3},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_4\ =y_3\ +r_1\ y_2\ +s_1\ y_1\ +\lambda_1,\\
y_3\ =y_2\ +r_0\ y_1\ +s_0\ y_0\ +\lambda_0.
\end{array}$$

Nous ajouterons toutes ces égalités après avoir multiplié

la $3^{\text{ième}}$ par $G(n,n) \quad = 1+r_n$,
la $4^{\text{ième}}$ par $G(n-1,n)=1+r_{n-1}+r_n\ +s_n$,
la $5^{\text{ième}}$ par $G(n-2,n)=1+r_{n-2}+r_{n-1}+s_{n-1}+r_n+s_n+r_{n-2}r_n$,
la $6^{\text{ième}}$ par $G(n-3,n)$,

et ainsi des autres, jusqu'aux trois dernières, qui seront multipliées

la $(n-1)^{\text{ième}}$ par $G(4,n)$,
la $(n)^{\text{ième}}$ par $G(3,n)$,
la $(n+1)^{\text{ième}}$ par $G(2,n)$;

dans la somme des équations, nous ne conserverons que y_{n+3} au premier membre en faisant passer au second tous les autres termes; l'équation résultante sera ainsi :

$$\begin{aligned}
y_{n+3} = {} & y_{n+2}[-1+1] \\
& + y_{n+1}[-G(n,n)+1+r_n] \\
& + y_n\ [-G(n-1,n)+G(n,n)+r_{n-1}+s_n] \\
& + y_{n-1}[-G(n-2,n)+G(n-1,n)+r_{n-2}G(n,n)+s_{n-1}] \\
& + y_{n-2}[-G(n-3,n)+G(n-2,n)+r_{n-3}G(n-1,n)+s_{n-2}G(n,n)] \\
& + y_{n-3}[-G(n-4,n)+G(n-3,n)+r_{n-4}G(n-2,n)+s_{n-3}G(n-1,n)] \\
& + y_{n-4}[-G(n-5,n)+G(n-4,n)+r_{n-5}G(n-3,n)+s_{n-4}G(n-2,n)] \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_4\ [-G(3,n)+G(4,n)+r_3G(5,n)+s_4G(6,n)] \\
& + y_3\ [-G(2,n)+G(3,n)+r_2G(4,n)+s_3G(5,n)] \\
& + y_2\ [G(2,n)+r_1G(3,n)+s_2G(4,n)] \\
& + y_1\ [r_0G(2,n)+s_1G(3,n)] \\
& + y_0\ [s_0G(2,n)] \\
& + \lambda_n+\lambda_{n-1}+\lambda_{n-2}G(n,n)+\lambda_{n-3}G(n-1,n)+\text{etc.} \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \lambda_i G(i+2,n)+\ldots+\lambda_1 G(3,n)+\lambda_0 G(2,n).
\end{aligned}$$

Dans cette somme le terme en y_{n+2} disparaît de lui-même; le coefficient de y_{n+1} est

$$(-1-r_n+1+r_n)=0;$$

celui de y_n est

$$(-1-r_{n-1}-r_n-s_n+1+r_n+r_{n-1}+s_n)=0.$$

Les coefficients de tous les autres y_{n-1}, y_{n-2}, etc., sont nuls, identiquement, en vertu de la formule (23), savoir,

$$0=-G(m,n)+G(m+1,n)+r_m G(m+2,n)+s_{m+1}G(m+3,n):$$

cette première partie de la somme entière se réduira ainsi aux termes en y_2, y_1 et y_0 seulement, puisque les $y_3, y_4, y_5 \ldots y_{n+2}$

se seront éliminés par leurs coefficients. Le terme affecté de y_2 est

$$y_2[G(2,n) + r_1G(3,n) + s_2G(4,n)]:$$

la même équation (25) montre que ce terme est identique à $y_2G(1,n)$; les termes suivants sont égaux à

$$(y_1r_0 + y_0s_0)G(2,n) + y_1s_1G(3,n).$$

La valeur de y_{n+3}, ainsi réduite, donnera celle de y_n par le changement de n en $n-3$, et l'on aura

$$(54)\quad \begin{aligned} y_n = y_2G(1,n-3) &+ [y_1r_0 + y_0s_0 + \lambda_0]\ G(2,n-3) \\ &+ [y_1s_1 + \lambda_1]\ G(3,n-3) + \lambda_2G(4,n-3) \\ &+ \lambda_3\ G(5,n-3) + \lambda_4G(6,n-3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_{n-6}G(n-4,n-3) \\ &+ \lambda_{n-5}G(n-3,n-3) \\ &+ \lambda_{n-4} + \lambda_{n-3}. \end{aligned}$$

On voit que si les λ sont nuls, l'expression de y_n reprend la forme de u_n de la valeur (53) : ainsi ces deux marches différentes conduisent au même résultat pour le cas dont il s'agit. Cette remarque a déjà été faite pour le second ordre, et par cette voie on aurait pu se dispenser d'une partie des développements de l'art. [22]. Dans cette formule (54) il reste à substituer les Y_n, $\mathsf{6}_n$, γ_n, etc., à la place des y_n, r_n, s_n, λ_n, ainsi que nous l'avons fait pour l'équation du second ordre, mais nous nous dispenserons d'écrire ces formules.

La méthode que nous venons d'employer suppose, comme celle de l'art. [22], que les $\mathsf{6}_n$ ne sont pas nuls, dans l'équation (47). Elle s'appliquera sans difficulté quand

ε_n sera constant et égal à ε : après avoir formé l'intégrale, on pourra y poser $\varepsilon = 0$, parce que cette lettre n'entrera pas en diviseur quand l'arbitraire Y_m se rapportera à un indice $m < n$. Mais il vaudra mieux traiter directement l'équation en profitant de sa forme simplifiée, qui sera alors

$$Y_{n+3} = \gamma_n Y_{n+1} + \delta_n Y_n + \Lambda_n.$$

On pourra en premier lieu la ramener à l'équation

$$y_{n+3} = y_{n+1} + t_n y_n + \lambda_n,$$

et appliquer à cette forme particulière, des combinaisons analogues à celles que nous avons employées. Il se présente alors des groupes de combinaisons discontiguës qui ne sont pas sans rapports avec ceux que nous avons introduits pour le cas général, mais qui en diffèrent cependant à plusieurs égards. Nous ne croyons pas devoir développer leurs propriétés en ce moment : les analystes qui voudront le faire, y parviendront aisément en se dirigeant par les considérations exposées dans les art. [3], [11], [13].

On pourra encore ici former l'équation

$$Y_{n+4} = \gamma_{n+1} Y_{n+2} + \delta_{n+1} Y_{n+1} + \Lambda_{n+1},$$

et en retrancher l'équation proposée ; il en résulte une équation du quatrième ordre

$$Y_{n+4} = Y_{n+3} + \gamma_{n+1} Y_{n+2} + (\delta_{n+1} - \gamma_n) Y_{n+1} - \delta_n Y_n + \Lambda_{n+1} - \Lambda_n.$$

Cette équation étant complète, pourra être intégrée par le procédé que nous allons exposer, et par suite on obtiendra Y_n de l'équation proposée, en réduisant les arbitraires au nombre convenable à l'aide de l'équation donnée du troi-

sième ordre. Mais nous répétons ici que cette marche sera pénible, et il sera préférable de recourir à une autre voie.

[25] Lorsque l'on voudra intégrer l'équation du troisième ordre, de manière que Y_n réponde à des valeurs de n, qui soient toutes au-dessous de m, on mettra l'équation sous la forme

$$Y_n = -\frac{\gamma_n}{\delta_n} Y_{n+1} - \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} Y_{n+2} - \frac{1}{\delta_n} Y_{n+3} - \frac{A_n}{\delta_n},$$

on posera ensuite,

$$Y_n = \frac{\gamma_m \gamma_{m-1} \ldots \gamma_n}{\delta_m \delta_{m-1} \ldots \delta_n} y'_n (-1)^n,$$

et par cette transformation l'équation sera ramenée à

$$y'_n = y'_{n+1} + r'_n y'_{n+2} + s'_{n+1} y'_{n+3} + \lambda'_n, \quad (55)$$

r'_n, s'_{n+1}, λ_n étant de simples fonctions des lettres $\varepsilon_n, \gamma_n, \delta_n$, A rapportées à diverses valeurs successives $n, n+1, n+2, \ldots m-3$ de n : ainsi ce sont des grandeurs connues, ou des fonctions de n.

Substituez successivement $n+1$, $n+2$, $n+3, \ldots m-3$, à la place de n; il en résultera le système de formules que voici : nous en avons supprimé les accents, pour faciliter l'écriture et l'impression :

$$\begin{aligned}
y_n &= y_{n+1} + r_n y_{n+2} + s_{n+1} y_{n+3} + \lambda_n,\\
y_{n+1} &= y_{n+2} + r_{n+1} y_{n+3} + s_{n+2} y_{n+4} + \lambda_{n+1},\\
y_{n+2} &= y_{n+3} + r_{n+2} y_{n+4} + s_{n+3} y_{n+5} + \lambda_{n+2},\\
y_{n+3} &= y_{n+4} + r_{n+3} y_{n+5} + s_{n+4} y_{n+6} + \lambda_{n+3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{m-3} &= y_{m-2} + r_{m-3} y_{m-1} + s_{m-2} y_m + \lambda_{m-3}.
\end{aligned}$$

Ajoutez ces $m-n-2$ équations, mais après avoir multiplié

la 3ième par $G(n,n)=1+r_n$,
la 4ième par $G(n,n+1)=1+r_n+r_{n+1}+s_{n+1}$,
la 5ième par $G(n,n+2)=1+r_n+r_{n+1}+s_{n+1}+r_{n+2}+s_{n+2}+r_n r_{n+1}$,
la 6ième par $G(n,n+3)$,

et ainsi de suite jusqu'à la $(m-n-2)^{\text{ième}}$ qui sera multipliée par $G(n,m-5)$: vous remarquerez que, dans cette somme, y_{n+h+2} est multiplié par

$$-G(n,n+h)+G(n,n+h-1)+r_{n+h}G(n,n+h-2)+s_{n+h}G(n,n+h-3);$$

or, cette combinaison des groupes est nulle en vertu de la relation (21); de toute la somme il ne restera donc que l'équation

$$\begin{aligned} y_n = y_{m-2}[\quad & G(n,m-5)+r_{m-4}G(n,m-6)+s_{m-4}G(n,m-7)] \\ & +y_{m-1}[r_{m-3}G(n,m-5)+s_{m-3}G(n,m-6)] \\ & +y_m \quad s_{m-2}G(n,m-5)+\lambda_n+\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}G(n,n) \\ & +\lambda_{n+3}G(n,n+1)+\lambda_{n+4}G(n,n+2)+ \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\lambda_{m-3}G(n,m-5) : \end{aligned} \qquad (56)$$

on pourra remplacer le coefficient de y_{m-2} par sa valeur $G(n,m-4)$, et, l'on a aussi pour celui de y_{m-1},

$$r_{m-3}G(n,m-5)+s_{m-3}G(n,m-6)=G(n,m-3)-G(n,m-4).$$

Il ne restera plus qu'à opérer des substitutions, afin d'introduire dans cette intégrale les Y_n ainsi que les coefficients β_n, γ_n, δ_n, Λ_n, qui entraient dans l'équation proposée (47).

[26] Les formes de cette analyse sont telles, que l'on doit maintenant reconnaître, avec évidence, qu'elle s'étend à l'équation linéaire d'un ordre quelconque. Nous supposerons l'équation du quatrième ordre déjà mise sous la forme

$$(57) \qquad y_{n+4} = y_{n+3} + r_n y_{n+2} + s_n y_{n+1} + t_n y_n + \lambda_n.$$

Nous ne reproduirons pas tout ce qui a été développé à l'occasion des deux autres ordres, pour l'équation privée de son dernier terme λ_n, et nous aborderons immédiatement cette équation complète.

Dans la formule (57) on remplacera la lettre n par $n-1$, par $n-2$, par ....3, 2, 1, 0; on composera ainsi le tableau suivant de $n+1$ formules

$$\begin{array}{l}
y_{n+4} = y_{n+3} + r_n\, y_{n+2} + s_n\, y_{n+1} + t_n\, y_n + \lambda_n, \\
y_{n+3} = y_{n+2} + r_{n-1} y_{n+1} + s_{n-1} y_n + t_{n-1} y_{n-1} + \lambda_{n-1}, \\
y_{n+2} = y_{n+1} + r_{n-2} y_n + s_{n-2} y_{n-1} + t_{n-2} y_{n-2} + \lambda_{n-2}, \\
y_{n+1} = y_n + r_{n-3} y_{n-1} + s_{n-3} y_{n-2} + t_{n-3} y_{n-3} + \lambda_{n-3}, \\
y_n = y_{n-1} + r_{n-4} y_{n-2} + s_{n-4} y_{n-3} + t_{n-4} y_{n-4} + \lambda_{n-4}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_7 = y_6 + r_3\, y_5 + s_3\, y_4 + t_3\, y_3 + \lambda_3, \\
y_6 = y_5 + r_2\, y_4 + s_2\, y_3 + t_2\, y_2 + \lambda_2, \\
y_5 = y_4 + r_1\, y_3 + s_1\, y_2 + t_1\, y_1 + \lambda_1, \\
y_4 = y_3 + r_0\, y_2 + s_0\, y_1 + t_0\, y_0 + \lambda_0;
\end{array}$$

en procédant, comme nous avons fait dans les articles [20] et [24], nous ajouterons ces formules, après avoir multiplié

la troisième par $G(n,n) = 1 + r_n$,
la quatrième par $G(n-1,n) = 1 + r_{n-1} + r_n + s_n$,
la cinquième par $G(n-2,n) = 1 + r_{n-2} + r_{n-1} + s_{n-1}$
$+ r_n + s_n + t_n + r_{n-2} r_n$,

la sixième par $G(n-3,n)$,
la septième par $G(n-4,n)$,
etc.
la $(n-1)^{\text{ième}}$ par $G(4,n)$,
la $(n)^{\text{ième}}$ par $G(3,n)$,
la $(n+1)^{\text{ième}}$ par $G(2,n)$:

nous laisserons dans un seul membre y_{n+4} en passant tous les autres termes dans le second membre ; il viendra

$$\begin{aligned}
y_{n+4} = & y_{n+2}[-G(n,n) + 1 + r_n] \\
& + y_{n+1}[-G(n-1,n) + G(n,n) + r_{n-1} + s_n] \\
& + y_n\ [-G(n-2,n) + G(n-1,n) + r_{n-2}G(n,n) + s_{n-1} + t_n] \\
& + y_{n-1}[-G(n-3,n) + G(n-2,n) + r_{n-3}G(n-1,n) + s_{n-2}G(n,n) + t_{n-1}] \\
& + y_{n-2}[-G(n-4,n) + G(n-3,n) + r_{n-4}G(n-2,n) + s_{n-3}G(n-1,n) + t_{n-2}G(n,n)] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + y_4[-G(2,n) + G(3,n) + r_2G(4,n) + s_3G(5,n) + t_4G(6,n)] \\
& + y_3[\ G(2,n) + r_1G(3,n) + s_2G(4,n) + t_3G(5,n)] \\
& + y_2[r_0G(2,n) + s_1G(3,n) + t_2G(4,n)] \\
& + y_1[s_0G(2,n) + t_1G(3,n)] \\
& + (y_0t_0 + \lambda_0)\ G(2,n) + \lambda_1G(3,n) + \lambda_2G(4,n) \ldots + \lambda_{n-2}G(n,n) + \lambda_{n-1} + \lambda_n.
\end{aligned}$$

On reconnaît sur-le-champ que les premiers termes du second membre en y_{n+2}, y_{n+1} disparaissent par leurs coefficients qui sont identiquement nuls ; et il en est même ainsi de tous les autres $y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \ldots$ jusqu'à y_4, en vertu de l'équation (29),

$$G(m+1,n) + r_mG(m+2,n) + s_{m+1}G(m+3,n) + t_{m+2}G(m+4,n) - G(m,n) = 0 :$$

en effet, le coefficient de y_n est la fonction précédente, où

l'on aurait écrit $m = n - 2$; celui de y_{n-1} sera la même fonction où l'on écrira $m = n - 3$, et ainsi des autres, jusqu'à y_4, dont le coefficient sera la même fonction dont la valeur est nulle, où l'on écrirait $m = 2$; par cette même équation (29), dans laquelle on posera $m = 1$, l'on aura

$$G(2,n) + r_1 G(3,n) + s_2 G(4,n) + t_3 G(5,n) = G(1,n);$$

et ici le premier membre est le coefficient de y_3 : la valeur de y_{n+4} se composera donc des termes conservés après ces nombreuses réductions; nous y substituerons $n-4$ à la place de n, et nous aurons l'expression suivante pour y_n, ou pour l'intégrale de l'équation linéaire du quatrième ordre,

$$(58)\quad \begin{aligned} y_n = {} & y_3 G(1,n-4) + [y_2 r_0 + y_1 s_0 + y_0 t_0 + \lambda_0] G(2,n-4) \\ & + [y_2 s_1 + y_1 t_1 + \lambda_1] G(3,n-4) + [y_2 t_2 + \lambda_2] G(4,n-4) \\ & + \lambda_3 G(5,n-4) + \lambda_4 G(6,n-4) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \lambda_{n-6} G(n-4,n-4) + \lambda_{n-5} + \lambda_{n-4}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est en tout semblable à celles que nous avons formées pour le second ordre, ainsi que pour le troisième, quand l'équation est complète. Si l'équation (57) était privée de son dernier terme λ_n, l'intégrale précédente perdrait toute la partie affectée des $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-4}$.

Il serait superflu d'insister davantage pour montrer que des groupes de combinaisons discontiguës fournissent le moyen de former la seule espèce d'intégrale dont les équations linéaires complètes soient susceptibles, quand leurs coefficients variables r_n, s_n, t_n, etc., demeurent des quantités

entièrement algébriques : l'indépendance de ces quantités ne leur permet pas de se réduire l'une par l'autre, et elles font naître des combinaisons d'un caractère spécial, dont nous nous sommes proposé de faire connaître la loi, et quelques-unes des propriétés.

SUPPLÉMENT AUX ARTICLES [12] ET [25] DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

[12'] Nous avons donné, à la fin de l'article [19], pour l'équation linéaire du second ordre, une intégrale qui admet pour ses deux arbitraires des valeurs quelconques u_m, $u_{m'}$ de la fonction u_n, répondant à $n=m$, et à $n=m'$. Cette intégrale repose sur des relations particulières des groupes $G(m,n)$ exprimées dans les équations (15). Nous allons montrer que cette forme d'intégrales peut être étendue au troisième ordre, et l'on verra sans difficulté qu'on en obtiendrait de semblables pour un ordre quelconque. Nous devons préalablement établir de nouvelles relations analogues à celles que nous venons de rappeler, mais qui concerneront des groupes plus composés, provenant de deux séries de lettres, et que nous avons traités dans les articles [11] et [12].

Nous écrirons, dans l'équation (23) de l'article [12], n à la place de m, et successivement n', n'', n''' au lieu de n; il en résulte les trois formules

$$G(n,n')=G(n+1,n')+r_nG(n+2,n')+s_{n+1}G(n+3,n'),$$
$$G(n,n'')=G(n+1,n'')+r_nG(n+2,n'')+s_{n+1}G(n+3,n''),$$
$$G(n,n''')=G(n+1,n''')+r_nG(n+2,n''')+s_{n+1}G(n+3,n''');$$

nous composerons la somme de ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par les combinaisons alternées

$$G(n+1,n'')G(n+2,n''')-G(n+1,n''')G(n+2,n''),$$
$$G(n+1,n''')G(n+2,n')-G(n+1,n')G(n+2,n'''),$$
$$G(n+1,n')G(n+2,n'')-G(n+1,n'')G(n+2,n'):$$

nous représenterons le premier membre de l'équation résultante par $P(n)$, en sorte que nous poserons, pour abréger,

$$\begin{aligned}P(n)=G(n,n')&[G(n+1,n'')G(n+2,n''')-G(n+1,n''')G(n+2,n'')]\\+G(n,n'')&[G(n+1,n''')G(n+2,n')-G(n+1,n')G(n+2,n''')]\\+G(n,n''')&[G(n+1,n')G(n+2,n'')-G(n+1,n'')G(n+2,n')];\end{aligned}$$

on reconnaîtra sans difficulté que le second membre de la formule composée se réduit aux seuls termes multipliés par s_{n+1}, et que leur somme est $s_{n+1}P(n+1)$, $P(n+1)$ étant ce que devient la fonction $P(n)$ en y remplaçant n par $n+1$, mais en laissant n', n'', n''', tels qu'ils sont dans $P(n)$; l'équation résultante est donc

$$P(n)=s_{n+1}P(n+1).$$

Nous supposerons que n' n'est supérieur ni à n'', ni à n''' : remplaçons n, dans cette formule, successivement par $n+1$, $n+2$, $n+3$,... jusqu'à $n'+1$; et multiplions par ordre les équations, en écartant le facteur commun aux deux membres : cela fait

$$P(n)=s_{n+1}s_{n+2}s_{n+3}\ldots s_{n'+2}P(n'+2).$$

On obtiendra la fonction $P(n'+2)$ en remplaçant n par $n'+2$ dans $P(n)$: dans cette substitution l'on devra avoir égard aux formules (22)

$$G(n'+1,n')=1,\quad G(n'+2,n')=1,$$
$$G(n'+3,n')=0,\quad G(n'+4,n')=0;$$

on voit aisément que la valeur de $P(n'+2)$ se réduit à sa première ligne, les deux autres ayant leurs termes affectés soit de $G(n'+3,n')=0$, soit de $G(n'+4,n')=0$: ainsi l'on trouvera

$$P(n'+2)=G(n'+3,n'')G(n'+4,n''')-G(n'+3,n''')G(n'+4,n''),$$

ce qui donne pour la fonction $P(n)$ l'expression simple

$$P(n)=[G(n'+3,n'')G(n'+4,n''')-G(n'+3,n''')G(n'+4,n'')]s_{n+1}s_{n+2}\ldots s_{n'+2};$$

ou bien, en rétablissant la valeur que $P(n)$ représente, on aura cette relation soumise à l'hypothèse de $n<=n'+2$, et de n'' et n''' non inférieurs à n',

$$\left.\begin{aligned} &G(n,n')[G(n+1,n'')G(n+2,n''')-G(n+1,n''')G(n+2,n'')]\\ +&G(n,n'')[G(n+1,n''')G(n+2,n')-G(n+1,n')G(n+2,n''')]\\ +&G(n,n''')[G(n+1,n')G(n+2,n'')-G(n+1,n'')G(n+2,n')]\\ =&s_{n+1}s_{n+2}\ldots s_{n'+2}[G(n'+3,n'')G(n'+4,n''')-G(n'+1,n''')G(n'+4,n'')]. \end{aligned}\right\} \quad (24')$$

Cette formule devient identique, et $0=0$, quand on y suppose $n''=n'$, ou $n'''=n'$, ou $n''=n'''$; ainsi on pourra l'étendre depuis $n''=n'$ à toute valeur supérieure à n' prise pour n'', et il en sera ainsi pour n'''. La restriction de n'' et n''', non inférieurs à n', a surtout pour objet d'éviter d'introduire des symboles $G(m,m-i)$ dont les valeurs n'auraient pas été préalablement déterminées, comme nous avons dû le faire (22) pour les premiers $G(m,m-1)=1$, $G(m,m-2)=1$, $G(m,m-3)=0$, etc. Si par la suite l'usage de ces formules exigeait leur extension dans le sens que j'indique, il serait aisé, ce semble, de se rendre compte de ce qu'elles donneraient, en suivant régulièrement les analogies dont nous avons posé les principes : mais nous ne devons pas nous étendre sur ce point quant à présent.

Une autre relation analogue à la précédente sera fournie par des combinaisons déduites de l'équation (21) rapportée à trois valeurs m, m', m'', de m; ce qui donne les trois égalités

$$\begin{aligned}
G(m\,,n) &= G(m\,,n-1) + r_n G(m\,,n-2) + s_n G(m\,,n-3),\\
G(m',n) &= G(m',n-1) + r_n G(m',n-2) + s_n G(m',n-3),\\
G(m'',n) &= G(m'',n-1) + r_n G(m'',n-2) + s_n G(m'',n-3);
\end{aligned}$$

nous les multiplierons respectivement par les fonctions

$$\begin{aligned}
&G(m',n-1)G(m'',n-2) - G(m'',n-1)G(m',n-2),\\
&G(m'',n-1)G(m\,,n-2) - G(m\,,n-1)G(m'',n-2),\\
&G(m\,,n-1)G(m',n-2) - G(m',n-1)G(m\,,n-2),
\end{aligned}$$

et après les avoir ajoutées, il ne restera au second membre que les termes affectés de s_n : le premier membre sera représenté par $P_1(n)$; en sorte que

$$\begin{aligned}
P_1(n) = {} & G(m\,,n)[G(m',n-1)G(m'',n-2) - G(m'',n-1)G(m',n-2)]\\
& + G(m',n)[G(m'',n-1)G(m\,,n-2) - G(m\,,n-1)G(m'',n-2)]\\
& + G(m'',n)[G(m\,,n-1)G(m',n-2) - G(m',n-1)G(m\,,n-2)]:
\end{aligned}$$

il suffira d'écrire le second membre pour reconnaître qu'il peut être représenté par $s_n P_1(n-1)$, la fonction $P_1(n-1)$ étant ce que devient $P_1(n)$ quand on y remplace n par $n-1$, en laissant les lettres m telles qu'elles sont dans $P_1(n)$; on aura donc cette équation

$$P_1(n) = s_n P_1(n-1).$$

Supposons que m' et m'' sont des entiers inférieurs à m: nous remplacerons successivement n, dans l'équation en $P_1(n)$, par $n-1, n-2, \ldots$ jusqu'à $m-1$, et en multipliant par ordre les formules, nous enlèverons le facteur commun

aux deux membres; il viendra

$$P_1(n) = s_n s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_{m-1} P_1(m-2).$$

Le facteur $P_1(m-2)$ s'obtient en écrivant $m-2$ à la place de n dans $P_1(n)$: la première ligne de la valeur sera multipliée par $G(m,m-2) = 1$; les deux autres lignes affectées des groupes $G(m',m-2)$, $G(m'',m-2)$, seront détruites par des symboles $G(m,m-3)$, $G(m,m-4)$, dont la valeur est zéro, (22), et qui entreront comme facteurs des termes compris dans les parenthèses : on aura donc simplement

$$P_1(m-2) = G(m',m-3)G(m'',m-4) - G(m'',m-3)G(m',m-4);$$

et par suite

$$P_1(n) = s_n s_{n-1} \ldots s_{m-1} \begin{bmatrix} G(m',m-3)G(m'',m-4) \\ -G(m'',m-3)G(m',m-4) \end{bmatrix}.$$

En rétablissant pour $P_1(n)$ son expression au moyen des groupes, on aura cette relation

(24'')
$$\begin{aligned} &G(m,n)[G(m',n-1)G(m'',n-2) - G(m'',n-1)G(m',n-2)] \\ &+G(m',n)[G(m'',n-1)G(m,n-2) - G(m,n-1)G(m'',n-2)] \\ &+G(m'',n)[G(m,n-1)G(m',n-2) - G(m',n-1)G(m,n-2)] \\ &= s_n s_{n-1} \ldots s_{m-1}[G(m',m-3)G(m'',m-4) - G(m'',m-3)G(m',m-4)]. \end{aligned}$$

Pour établir cette formule on a supposé que n est $> m$: elle convient cependant à $n = m$, et même à $n = m - 1$, ainsi qu'il est facile de le reconnaître par les équations qui l'ont fournie; mais à la place de plusieurs des groupes G, il se présentera quelques-uns des symboles définis (22). On a aussi admis que m' et m'' étaient supérieurs à m : si l'on supposait $m' = m$, la formule ne cesserait pas d'avoir lieu, mais elle deviendrait $0 = 0$, par la mutuelle

destruction des termes de chaque membre. Ces deux relations (24') (24'') sont pour les groupes formés avec deux séries de lettres, ce qu'étaient les équations (15) et (14) pour les groupes provenant d'une seule série : nous ne les avons établies que depuis l'impression du paragraphe [12] de notre mémoire.

Deux relations du même genre conviennent aux groupes $G(m,n) = G(r_m, s_{m+1}, t_{m+2}, r_n, s_n, t_n)$ que nous avons considérés dans les paragraphes [13] et [14]. Pour former la première, on partira de l'équation

$$G(n,n') = G(n+1,n') + r_n G(n+2,n') + s_{n+1} G(n+3,n') + t_{n+2} G(n+4,n')$$

que donne la formule (29), en y écrivant n à la place de m, et n' à la place de n ; on rapportera cette équation à trois autres valeurs n'', n''', n^{IV}, de n', ce qui fournira quatre équations : elles seront ajoutées, après avoir été multipliées par des facteurs qui ne laisseront subsister au second membre de la somme, que les termes affectés de t_{n+2}, et qui d'ailleurs conserveront le premier membre tel qu'il se présentera : ces facteurs seront des combinaisons alternées, formées avec les groupes $G(n+1,n')$, $G(n+2,n')$, $G(n+3,n')$, $G(n+1,n'')$, $G(n+2,n'')$, etc. : l'on trouvera ainsi une première relation de la forme

$$P(n) = t_{n+2} P(n+1),$$

puis on procédera exactement comme nous l'avons fait à l'occasion la formule (24').

La seconde relation dérive de la formule (27)

$$G(m,n) = G(m,n-1) + r_n G(m,n-2) + s_n G(m,n-3) + t_n G(m,n-4),$$

rapportée à trois autres valeurs m', m'', m''', de m; on combinera les quatre formules de manière à ne conserver au second membre que des t_n : pour cela on aura à les multiplier par quatre fonctions alternées qui feront disparaître dans la somme les termes provenant de la partie

$$G(m,n-1)+r_nG(m,n-2)+s_nG(m,n-3),$$

rapportée aux valeurs m', m'', m''', de m. Voyez, sur ces combinaisons, la formule (24'') de ce supplément.

Ces formules se compliquant beaucoup, nous devons nous borner à en indiquer l'existence pour les groupes de tous les ordres, ainsi que la voie qui permet de les établir

[25'] Nous avons formé pour l'équation

$$u_{n+3}=u_{n+2}+r_nu_{n+1}+s_nu_n,$$

l'expression suivante (53) de u_n

$$u_n=u_2G(1,n-3)+v_0G(2,n-3)+u_1s_1G(3,n-3),$$

où $v_0=r_0u_1+s_0u_0=u_3-u_2$: cette valeur est constituée de manière qu'elle se réduit à u_0 quand $n=0$; à u_1, quand $n=1$; et à u_2 quand $n=2$. On a évidemment aussi cette autre forme pour u_n,

$$u_n=u_{m+1}G(m,n-3)+(u_{m+2}-u_{m+1})G(m+1,n-3)+u_ms_mG(m+2,n-3),$$

si l'on veut que u_n se change en u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, quand n deviendra m, $m+1$, $m+2$: il suffira de poser $n=m$, par exemple, pour reconnaître que le second membre se change en u_m; il devient, en effet,

$$u_{m+1}G(m,m-3)+(u_{m+2}-u_{m+1})G(m+1,m-3)+u_ms_mG(m+2,m-3);$$

par les formules (22), on a

$$G(m,m-3)=0=G(m+1,m-3) \quad \text{et} \quad s_{m-2}G(m,m-5)=1,$$

cette dernière donne aussi $s_m G(m+2,m-3)=1$; par ces valeurs on voit que la quantité précédente se réduit à u_m. On vérifierait de la même manière qu'elle devient u_{m+1} ou u_{m+2} quand on y pose $n=m+1$ ou $n=m+2$: pour abréger, j'écrirai $u_{m+2}-u_{m+1}=v_m$. C'est à des valeurs de n supérieures à m que convient surtout l'intégrale précédente, et il serait incommode de l'étendre à des valeurs de n inférieures à m, parce qu'alors se présenteraient des symboles $G(m,m-i)$ non définis, et que nous avons cherché à éviter au delà de $G(m,m-4)$ ou de $G(m,m-5)$, ainsi que nous l'avons déjà dit. Nous y écrirons $m'+3$, $m''+3$ et $m'''+3$ à la place de n; et, pour plus de symétrie, nous emploierons aussi $m+3$ à la place de m; cela donnera les trois formules

$$u_{m'+3}=u_{m+4}G(m+3,m')+v_{m+3}G(m+4,m')+u_{m+3}s_{m+3}G(m+5,m'),$$
$$u_{m''+3}=u_{m+4}G(m+3,m'')+v_{m+3}G(m+4,m'')+u_{m+3}s_{m+3}G(m+5,m''),$$
$$u_{m'''+3}=u_{m+4}G(m+3,m''')+v_{m+3}G(m+4,m''')+u_{m+3}s_{m+3}G(m+5,m''').$$

Chacune des quantités $u_{m'+3}$, $u_{m''+3}$, $u_{m'''+3}$, satisfait à l'équation

$$u_{n+3}=u_{n+2}+r_n u_{n+1}+s_n u_n,$$

où l'on aura remplacé n par m', m'', ou m''' : par exemple, $u_{m'''+3}$ exprimé par la troisième formule, a m''' pour sa variable, et u_{m+4}, $v_{m+3}=u_{m+5}-u_{m+4}$, u_{m+3} sont les trois arbitraires; cette valeur de $u_{m'''+3}$ satisfait complétement à l'équation

$$u_{m'''+3}=u_{m'''+2}+r_{m'''}u_{m'''+1}+s_{m'''}u_{m'''}.$$

Cela posé, concevons que dans $u_{m'''+3}$ on remplace les deux arbitraires u_{m+4}, et v_{m+3} par les valeurs que l'on tirerait des deux premières formules, qui ne renferment pas la variable m''' : ces deux arbitraires seront données en $u_{m''+3}$, $u_{m'+3}$, u_{m+3}, et elles contiendront, de plus, des quantités connues,

provenant des groupes $G(m+3,m')$, $G(m+3,m'')$, etc.; après cette substitution, la valeur de $u_{m'''+3}$ sera encore l'intégrale complète de l'équation linéaire rapportée à la variable m''', car on n'aura fait que remplacer des constantes par d'autres : ce remplacement de u_{m+3}, v_{m+3} revient à l'élimination de ces deux quantités entre les trois équations précédentes, qui donnent des valeurs de $u_{m'+3}$, $u_{m''+3}$, $u_{m'''+3}$. Opérons l'élimination en multipliant les trois formules, respectivement, par les combinaisons alternées

$$G(m+3,m'')G(m+4,m''')-G(m+3,m''')G(m+4,m''),$$
$$G(m+3,m''')G(m+4,m')-G(m+3,m')G(m+4,m'''),$$
$$G(m+3,m')G(m+4,m'')-G(m+3,m'')G(m+4,m'),$$

et en ajoutant les trois équations : il ne subsistera dans le second membre que $u_{m+3}s_{m+3}$ qui sera multiplié par une combinaison des groupes G; or, cette combinaison sera précisément la fonction $P(m+3)$ de l'article [12'] de ce supplément, dans laquelle les n', n'', n''' seraient remplacés par des m', m'', m'''; et la lettre n le serait par $m+3$: d'après la transformation établie (24'), dans ce même article, pour la fonction $P(n)$, on a

$$\begin{aligned}P(m+3)=\;&G(m+3,m')[G(m+4,m'')G(m+5,m''')-G(m+4,m''')G(m+5,m'')]\\ &+G(m+3,m'')[G(m+4,m''')G(m+5,m')-G(m+4,m')G(m+5,m''')]\\ &+G(m+3,m''')[G(m+4,m')G(m+5,m'')-G(m+4,m'')G(m+5,m')]\\ =\;&s_{m+4}s_{m+5}\dots s_{n'+2}[G(m'+3,m'')G(m'+4,m''')-G(m'+3,m''')G(m'+4,m'')] :\end{aligned}$$

il suit de là que l'équation (R) résultant de l'élimination sera

$$\begin{aligned}0=-u_{m+3}\,&[G(m'+3,m''')G(m'+4,m'')-G(m'+3,m'')G(m'+4,m''')]s_{m+3}s_{m+4}\dots s_{m'+2}\\ +u_{m'+3}&[G(m+3,m'')G(m+4,m''')-G(m+3,m''')G(m+4,m'')]\\ +u_{m''+3}&[G(m+3,m''')G(m+4,m')-G(m+3,m')G(m+4,m''')] \qquad \text{(R)}\\ +u_{m'''+3}&[G(m+3,m')G(m+4,m'')-G(m+3,m'')G(m+4,m')].\end{aligned}$$

Cette formule donnera donc pour $u_{m'''+3}$ l'intégrale de l'équation aux différences du troisième ordre, où m''' sera la variable : mais il est évident, pour les mêmes raisons, qu'elle donnera une valeur de $u_{m''+3}$ qui résoudra d'une manière générale l'équation

$$u_{m''+3} = u_{m''+2} + r_{m''}u_{m''+1} + s_{m''}u_{m''},$$

dans laquelle m'' est actuellement la variable, et où $u_{m'''+3}$, $u_{m'+3}$, u_{m+2} seront les arbitraires, m''', m', m étant trois nombres donnés. La même formule (R) sera aussi l'intégrale de l'équation

$$u_{m'+3} = u_{m'+2} + r_{m'}u_{m'+1} + s_{m'}u_{m'},$$

quand on y considère m' comme la variable, et alors m, m'', m''' seront trois nombres donnés, différents l'un de l'autre; u_{m+3}, $u_{m''+3}$, $u_{m'''+3}$ seront, en ce cas, les trois arbitraires. Enfin, si dans la même équation (R) on considère m comme variable, on en tirera pareillement u_{m+3} exprimé par la variable m, et par les trois quantités $u_{m'+3}$, $u_{m''+3}$, $u_{m'''+3}$ qui seront devenues les trois arbitraires de l'intégrale. La transformation de $P(m+3)$ dont nous nous sommes servis suppose que m' est au-dessus de m; elle suppose aussi que m' ne doit pas surpasser m'' ni m''' : ainsi les intégrales que nous tirons de la formule (R), considérée alternativement comme nous venons de l'indiquer, sont soumises à des limitations pour l'étendue de la variable à laquelle se rapportera l'équation.

Nous nous bornons à mentionner cette formule (R) dont l'usage serait analogue à ce que nous avons expliqué à la fin

de l'article [19] pour les équations du second ordre : il est visible que l'on pourra en former une semblable pour les équations linéaires du quatrième ordre, ou des ordres plus élevés, en suivant la même marche.



FIN DU TOME DIX-NEUVIÈME.